

This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

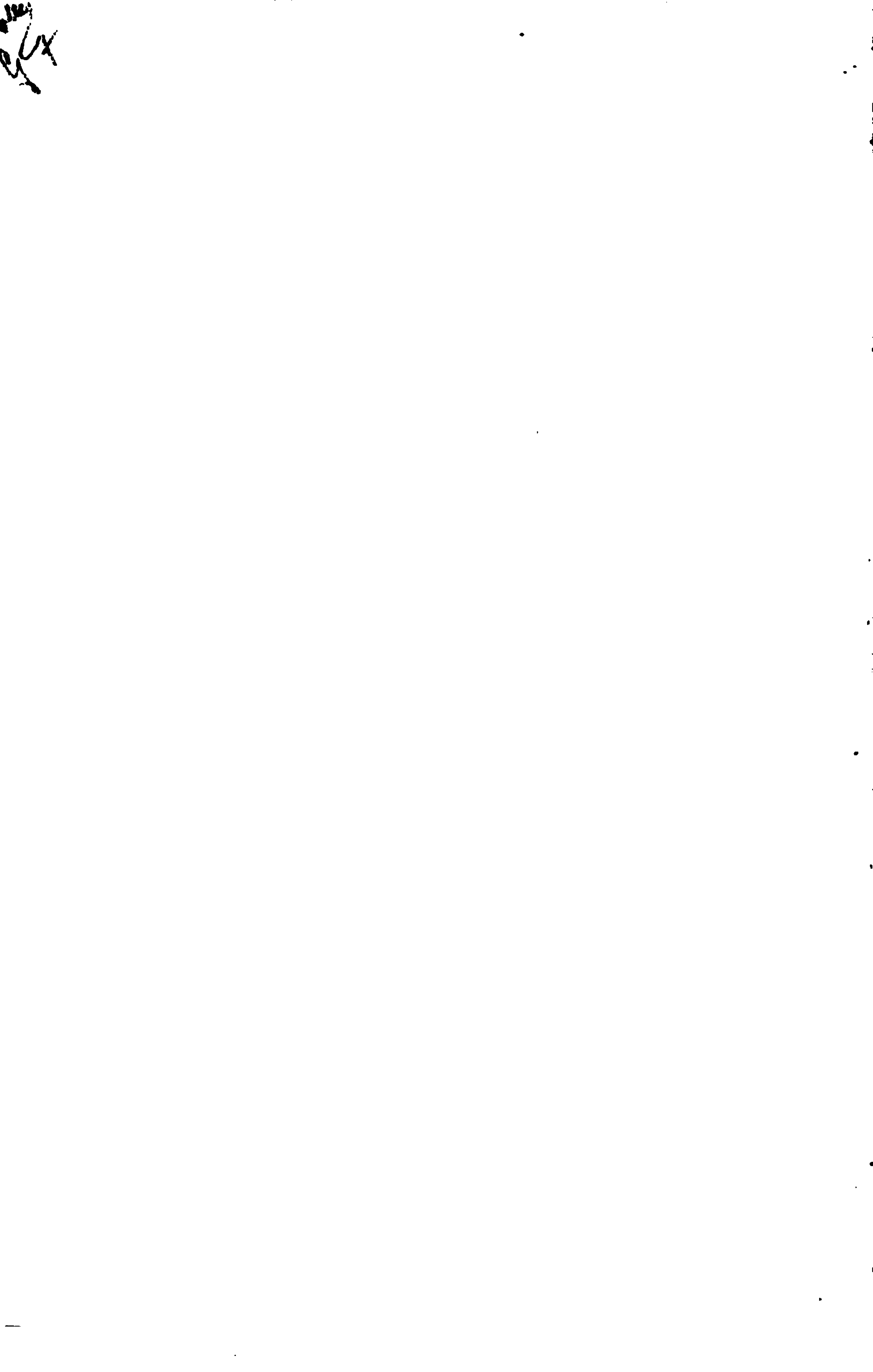
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse http://books.google.com



Mathem
Q
1
.I

# L'INTERMÉDIAIRE

DES

# MATHÉMATICIENS.

PRIX DE L'ABONNEMENT ANNUEL (12 NUMÉROS) :

Paris..................... 7 fr. | Dép. et Union postale... 8 fr. 50

Les douze numéros forment chaque année un Volume de 300 pages au moins.

# L'INTERMÉDIAIRE

DES

# MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET É. LEMOINE,


DIRIGÉ PAR

**C.-A. LAISANT,**
Docteur ès Sciences,
Examinateur à l'École Polytechnique,

**Émile LEMOINE,**
Ingénieur civil,
Ancien Élève de l'École Polytechnique,

**Ed. MAILLET,**
Docteur ès Sciences,
Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

**A. GRÉVY,**
Docteur ès Sciences,
Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Professeur au Lycée Saint-Louis.


**Publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique.**

## TOME XIII. — 1906.




PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

55, Quai des Grands-Augustins, 55.

1906



(Tous droits réservés.)

Printed in France

math. lit.
compl. ... 
...
8°-11-39
37878

# L'INTERMÉDIAIRE

DES

# MATHÉMATICIENS.

---

## QUESTIONS (1).

2991. [Σ] (**1903**, 7, 99; **1904**, 1, 113, 260; **1905**, 6)

### PRIX ACADÉMIQUES.

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE MADRID.

Calculer et établir sous forme de Tables les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions transcendantes d'un usage fréquent dans les applications et pour lesquelles il n'existe pas encore de Tables.

Les Tables devront être d'une étendue analogue à celle des Tables trigonométriques, l'approximation étant appropriée au but des Tables.

Le texte accompagnant les Tables devra être rédigé en espagnol ou en latin. Les Mémoires seront reçus au Secrétariat de l'Académie, Calle de Valverde, 36, Madrid, jusqu'au 31 décembre 1906.

Premier prix : diplôme, médaille d'or et 1500 pesetas.

Second prix : diplôme et médaille d'or.

---

(1) Pour gagner de la place, nous supprimons cette année, comme nous l'avons déjà fait en 1896, 1903 et 1905, la Liste des abréviations conventionnelles. Nos collaborateurs pourront la consulter dans les Tomes précédents ou dans l'*Index du Répertoire de bibliographie des Sciences mathématiques* (Paris, Gauthier-Villars). Ils pourront également se reporter aux observations indiquées en tête du Tome XI (1904), observations que nous ne reproduisons pas ici. LA RÉD.

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE DANEMARK.

Multiplication et division des *numérales;* interprétation géométrique. Mémoires à adresser, avant fin octobre 1906, au Secrétaire de l'Académie, M. H.-G. Zeuthen, professeur à l'Université de Copenhague, et à rédiger en danois, suédois, anglais, allemand, français ou latin. Prix : médaille d'or de 320 couronnes.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

*Prix pour* 1906. — 1° On demande une contribution à l'étude algébrique et géométrique des formes $n$-linéaires, $n$ étant $> 3$. Prix : 600fr.

2° Histoire et critique des expériences sur l'induction uni-polaire de Weber, et élucider, au moyen de nouvelles expériences, les lois et l'interprétation de ce fait physique. Prix : 800fr.

Mémoires en français ou en flamand.

UNIVERSITÉ DE CAMBRIDGE.

*Prix Adams pour* 1906. — Étudier les irrégularités du mouvement de la Lune qui peuvent être ramenées directement à une action planétaire. Prix : 4500 shillings (1).

ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS (2).

Comme dans la question **2863** (**1905**, 6), et de plus :

*Grand prix des Sciences mathématiques,* pour 1908 (3000fr). — Réaliser un progrès important dans l'étude de la déformation de la surface générale du second degré.

---

(1) D'après l'*Enseignement mathématique,* nos 3 et 4 (1905), auxquels on pourra se reporter pour plus de détails.

(2) Chaque concours est maintenant clos le 1er janvier de l'année du concours. La Rédaction recevra avec reconnaissance des renseignements bibliographiques sommaires relatifs aux divers prix faisant l'objet de la question 2991, pourvu qu'ils parviennent à bref délai. Inutile de parler de ce qui se trouve dans l'*Encyclopädie der Math. Wissensch.*

Pour les prix périodiques, il convient de se reporter aux questions antérieures analogues.

*Prix Fourneyron*, pour 1908 (1000$^{fr}$). — Étude théorique ou expérimentale des turbines à vapeur (même sujet que précédemment).

*Prix Vaillant*, pour 1909 (4000$^{fr}$). — Perfectionner en un point important l'application des principes de la Dynamique des fluides à la théorie de l'hélice.

*Prix Plumey*, annuel (4000$^{fr}$). — Perfectionnement des machines à vapeur ou de la navigation à vapeur.

*Prix Pierre Guzman*, pour 1910. — Progrès important en Astronomie.

*Prix Damoiseau*, pour 1908. — Théorie de la planète Éros basée sur toutes les observations connues.

*Prix Binoux*, pour 1907 (2000$^{fr}$). — Travaux sur l'Histoire des Sciences.

*Prix Boileau*, pour 1909 (1300$^{fr}$). — Recherches sur les mouvements des fluides de nature à contribuer aux progrès de l'Hydraulique.

Il y a quelques autres prix intéressant les mathématiciens, mais comportant un programme moins précis (voir *C. R.*, t. CXLI, 18 décembre 1905). E. MAILLET.

**2992.** [**D1**] Quelqu'un pourrait-il me dire en quoi pèche le raisonnement qui suit : Il s'agit de démontrer que, si $f(x, y) = 0$ est satisfaite pour $x = x_0$, $y = y_0$, $y$ sera, en général, fonction continue de $x$ pour $x = x_0$.

On a

$$f(x_0, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + k f'_{y_0}(x_0, y_0 + k\theta) \qquad (0 < \theta < 1);$$

si donc $k$ est assez petit, comme

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

alors $f(x_0, y_0 + k)$ est de même signe que $k f'_{y_0}(x_0 + \theta k)$, et, par suite, si $f'_{y_0}(x_0, y_0)$ n'est pas nul, de même signe que $k f'(x_0, y_0)$; or $k f'_{y_0}$ et $-k f'_{y_0}$ étant de signes contraires, $f(x_0, y_0 + k)$ et $f(x_0, y_0 - k)$ seront de signes contraires; or, on peut prendre $h$ assez petit pour que

$f(x_0+h, y_0-k)$ et $f(x_0, y_0-k)$ soient de mêmes signes, et pour que $f(x_0+h, y_0+k)$ et $f(x_0, y_0-k)$ soient de mêmes signes, c'est-à-dire pour que

$$f(x_0+h, y_0+k')$$

s'annule pour une valeur $k'$ comprise entre $-k$ et $+k$, quelque petit que soit $k$, ce qui démontre la continuité. Cela suppose seulement que $f$ ait une dérivée par rapport à $y$ et soit continue par rapport à $x$, et que $f'_{y_0}(x_0, y_0)$ ne soit pas nul.

Si l'on a plusieurs équations

$$(1) \qquad f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la première, $f_1 = 0$, définit une fonction $y_1$ continue de $y_2, \ldots, y_n, x$; portant sa valeur dans les autres, on aura un système de $n-1$ équations

$$F_i(x, y_2, \ldots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

qui définit une fonction $y_2$ continue de $y_3, \ldots, y_n, x, \ldots$; donc $y_n$ est fonction continue de $x$, etc.

(Le théorème est donc démontré à l'égard des fonctions imaginaires de variables imaginaires, car, si $X_1 + Y_1\sqrt{-1}, \ldots$ sont les fonctions, $x + y\sqrt{-1}$ la variable, on est ramené à des équations réelles entre $X_1, Y_1, \ldots$ et $x, y$.)

L'existence de la dérivée en résulte, car de (1) on tire

$$f_i(x+\Delta x, y_1+\Delta y_1, \ldots) - f_i(x, y_1, \ldots)$$
$$= \frac{\partial f_i}{\partial x}\Delta x + \sum \frac{\partial f_i}{\partial y_j}\Delta y_j = 0,$$

formules où $y_j$ doit être remplacée par $y_j + \theta\,\Delta y_j$ et $x$ par $x + \theta\,\Delta x$. De ces équations on tire $\frac{\Delta y_j}{\Delta x}$ et leurs limites si $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ n'est pas nul.

Ce qui me fait poser cette question, c'est :

1° Que, quoique j'aie donné la démonstration précédente depuis de longues années dans mon *Algèbre*, et qu'elle ait

été connue des professeurs de spéciales, il est recommandé de ne pas la donner aux élèves;

2° Que, dans la plupart des Traités de haute Analyse, on donne une démonstration hypertranscendante du théorème en question. H. Laurent.

**2993. [Ab et I17]** M. E. Lucas dit dans sa *Théorie des nombres* (p. 126) :

« Le produit d'une somme de quatre carrés par une somme de quatre carrés est une somme de quatre carrés », puis que « Brioschi a donné une formule semblable pour une somme de huit carrés ».

Mais M. Samuel Roberts a démontré qu'il n'existait pas de formules analogues pour la somme de seize carrés au plus (*The Quarterly Journal,* 1879 et 1880); tandis que M. Lebesgue, dans son *Introduction à la théorie des nombres* (p. 65), dit :

« La proposition s'étend au produit de la somme de $2^m$ carrés par celle de $2^m$ carrés qui est aussi formée de $2^m$ carrés comme l'a montré Angelo Genocchi » (*Annali di Matematica,* t. III, n° 4).

M. Escott, en réponse à la question **2846** (**1904**, 262), au Cahier d'août 1905 (p. 182), attribue la généralisation de cette proposition à Cayley.

Qui a raison? Plakhowo (Tambow, Russie).

**2994. [I17]** Comment pourrait-on démontrer que l'équation

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2 = 12N$$

est soluble en nombres entiers quel que soit N.

H.-B. Mathieu (Saïgon).

**2995. [O8]** Si l'on considère deux positions $P_1$ et $P_2$ d'un solide S, et si par un point de l'espace on mène des

droites égales et parallèles aux vecteurs qui joignent deux points correspondants du solide S dans les positions A et B, les extrémités de ces droites sont dans un même plan. Je désire une démonstration géométrique de ce théorème.

H.-B. Mathieu (Saïgon).

**2996.** **[V]** Pourrait-on me dire l'auteur, le titre et la date des Ouvrages où l'on rencontre pour la première fois les formules

$$2S = \Sigma(x_m y_{m+1}) - \Sigma(x_{m+1} y_m),$$
$$2S = \Sigma[(x_m - x_{m+1})(y_m + y_{m+1})],$$
$$2S = \Sigma[x_m(y_{m+1} - y_{m-1})]$$

donnant la surface d'un polygone en fonction des coordonnées de ses sommets?

G. Lemaire.

**2997.** **[K9aα]** Je désirerais une solution numérique ou graphique, genre Euzet (*N. A.*, t. XIII, 1854, p. 114), du problème suivant qui me paraît compliqué :

*Diviser un polygone en parties proportionnelles à des nombres donnés au moyen de droites issues d'un point donné et telles que la somme de leurs longueurs soit minimum.*

G. Lemaire.

**2998.** **[K6a]** Pour passer du système rectangulaire XOY au système rectangulaire X'OY'(XOX' = α), on a les formules

$$x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha,$$
$$y' = y \cos\alpha - x \sin\alpha.$$

Supposant que α représente une correction d'orientation, c'est-à-dire une quantité très petite, je demande quelle est la valeur maximum de α pour laquelle on puisse se permettre de poser

$$x' = x + \alpha y,$$
$$y' = y - \alpha x.$$

G. Lemaire.

**2999.** **[I3b]** On sait que

$$1.2.3.4+1=5^2,\quad 1.2.3.4.5+1=11^2,\quad 1.2.3.4.5.6.7+1=71^2$$

Peut-on déterminer *a priori* les valeurs de $n$ satisfaisant à la condition

$$1.2.3.4\ldots n+1=N^2?$$

NAZAREVSKY (Kharkov).

**3000.** **[I3b]** Peut-on démontrer la proposition suivante analogue au théorème de E. Lucas :

*Si* $(a+\sqrt{b})^x-1$ *est divisible par* $p$, *pour* $x$ *égal à* $p-1$, *et n'est pas divisible par* $p$ *pour* $x$ *égal à une partie aliquote de* $p-1$, *le nombre* $p$ *est premier* ($b$ *n'est pas un carré parfait*). NAZAREVSKY (Kharkov).

**3001.** **[I19b]** Dans ses *Récréations et Problèmes mathématiques* (traduction française, p. 57), W.-W. Rouse Ball dit :

« Kummer débute dans sa démonstration (du dernier théorème de Fermat : $x^n+y^n=z^n$) en établissant que, dans ces conditions ($n$ premier), l'un des nombres $x, y, z$ doit être divisible par $n$. »

Peut-on donner une démonstration simple de cette proposition? NAZAREVSKY (Kharkov).

**3002.** **[J4]** Soient $x=\varphi(a,b)$ et $y=\varphi(b,a)$. Quelle est l'expression la plus générale de la fonction $\varphi$, telle que l'on ait

$$a=\varphi(x,y)\quad \text{et}\quad b=\varphi(y,x)?$$

Par exemple, si

$$x=\frac{a^2-b}{1-ab}\quad \text{et}\quad y=\frac{b^2-a}{1-ab},$$

on a

$$a=\frac{x^2-y}{1-xy}\quad \text{et}\quad b=\frac{y^2-x}{1-xy}.$$

NAZAREVSKY (Kharkov).

3003. **[I3b]** Soient $n$ un nombre impair composé, $a$ et $b$ (où $b$ n'est pas un carré parfait) deux entiers premiers à $n$, ainsi que $a^2 - b$.

I. Si $b$ est un résidu quadratique de tous les diviseurs premiers de $n$, nous avons

$$(a + \sqrt{b})^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

II. Si $n$ a des diviseurs premiers, par exemple $q_1$, $q_2$, $q_3$, ..., dont $b$ est un non-résidu quadratique, nous avons

$$(a + \sqrt{b})^{\varphi(n)(q_1+1)(q_2+1)(q_3+1)\ldots} \equiv 1 \pmod{n}$$

Cette proposition est-elle connue?

NAZAREVSKY (Kharkov).

3004. **[I19c]** Peut-on satisfaire à l'équation indéterminée

$$2(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1)\ldots = p_1 p_2 p_3 \ldots - 1,$$

où $p_1$, $p_2$, $p_3$, ... sont des nombres premiers tous différents?

NAZAREVSKY (Kharkov).

3005. **[I3b]** Soit $p$ un nombre premier de la forme $4n + 1$. Pour trouver le reste $r$ de la division $1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}$ par $p$, il faut résoudre la congruence

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Si $r$ est la solution de cette congruence telle que $0 < r < \frac{p}{2}$, quel signe faut-il attribuer à $r$?

NAZAREVSKY (Kharkov).

3006. **[V9, V10 et U10]** Quelles sont les principales publications du Service géographique de l'Armée et du Service hydrographique de la Marine que pourrait lire un opérateur peu versé en Mathématiques?

G. LEMAIRE.

# RÉPONSES.

3. (**1894**, 1) (*Anonyme*). — *Partager un triangle en quatre parties équivalentes par deux droites rectangulaires* (**1894**, 39, 55, 135; **1899**, 33, 101). — Une réponse à cette question nous a été adressée par M. G. Espanet. Sur notre demande, la Rédaction des *Archiv der Math. und Phys.* a bien voulu la publier (3e série, Vol. VI, p. 345).

La Rédaction.

857. (**1896**, 151) (*Nauticus*). — *Théorèmes analogues à celui de Goldbach sur les nombres premiers.* — Il est possible d'appliquer à la question 857 les méthodes que j'ai indiquées dans ma réponse à 574 (**1905**, 107). Je prends le premier paragraphe de la question 857 à titre d'exemple :

*Tout nombre* $2n+1$ *n'est-il pas la somme d'un nombre premier et du double d'un nombre premier?*

Je m'appuierai sur le Tableau T déjà mentionné dans mes réponses à 574 (**1905**, 107), 968 (**1905**, 110), 2181 (**1905**, 112) :

| Nombres premiers. | Différence Δ avec le précédent. | Nombres premiers. | Différence Δ. |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 15 727 | 44 |
| 5 | 2 | 19 661 | 52 |
| 11 | 4 | 31 469 | 72 |
| 29 | 6 | 156 007 | 86 |
| 97 | 8 | 360 749 | 96 |
| 127 | 14 | 370 373 | 112 |
| 541 | 18 | 492 227 | 114 |
| 907 | 20 | 1 349 651 | 118 |
| 1151 | 22 | 1 357 333 | 132 |
| 1361 | 34 | 2 010 881 | 148 |
| 9587 | 36 | 4 652 507 | 154 |

Ce Tableau est obtenu en rangeant les nombres premiers $\leqq 9.10^6$ par ordre de grandeur croissante, inscrivant vis-à-vis la différence $\Delta$ avec le nombre premier précédent, puis ne conservant que celles de ces différences $\Delta$ supérieures aux précédentes et les nombres premiers correspondants. Ainsi, vis-à-vis du nombre premier 31469, on lit 72 et, au-dessus, 52 : cela veut dire que, pour tout nombre premier $p \leqq 31469 - 72 = 31397$, $\Delta$ est $\leqq 52$.

Ceci posé, soit $p$ un nombre premier quelconque, $p + \Delta_1$ le nombre premier immédiatement supérieur, et $p + \Delta_1 \leqq \dfrac{9.10^6}{2} - 11$. On sait que $\Delta_1 \leqq 148$ (Tableau ci-dessus). Si l'on forme la suite

$$(1) \qquad 2p+1, \quad 2p+3, \quad \ldots, \quad 2p+307$$

en ajoutant à $2p$ tous les nombres premiers impairs $\leqq 307$ (307 est premier), on obtient beaucoup des nombres impairs compris entre $2p$ et $2(p+\Delta_1)+11 \leqq 9.10^6$; la différence entre deux des nombres de la suite (1) ne dépasse pas 14. Ces suites (1), quand $p$ prend toutes les valeurs possibles, empiètent les unes sur les autres, et elles comprennent à $\delta$ ($\delta \leqq 14$) unités près par défaut tous les nombres $2n+1 < 9.10^6$.

Cette différence $\delta$ se réduira, même pour les valeurs de $p$ qui ne sont pas trop grandes; ainsi, quand $p < 30000$, $\Delta_1 \leqq 52$, et la suite (1) peut être remplacée par la suite

$$(1\ bis) \qquad 2p+1, \quad 2p+3, \quad \ldots, \quad 2p+107.$$

Les suites (1 *bis*) comprennent à $\delta_1$ ($\delta_1 \leqq 8$) unités près par défaut tous les nombres $2n+1 < 60000$. Donc :

*Tout nombre impair* $< 60000$ *ou* $9.10^6$ *est, à* 8 *ou* 14 *unités près, respectivement, par défaut, la somme d'un nombre premier et du double d'un nombre premier.*

Si l'on envisage les sommes par défaut ou par excès indifféremment, les nombres 8 et 14 se trouvent remplacés par 4 et 6.

Des méthodes semblables sont applicables aux deux autres paragraphes de la question 857.

Je crois utile de mentionner une conclusion qui se dégage de mes réponses à 574 (**1905**, 107) et 857 : c'est que les théorèmes empiriques de Goldbach, Polignac, *Nauticus* peuvent être vrais pour tous

les nombres inférieurs à une limite N très élevée, un milliard par exemple, ou même $N = 10^{17}$ (*voir* **1905**, 108, § 3°), pour cesser d'être exacts à partir de cette limite.

D'autre part, il est bien évident que l'on aura des théorèmes du même genre que ceux mentionnés dans mes réponses, entre les limites des Tables, quand on cherche à représenter tout nombre N par la forme linéaire

$$A = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des entiers positifs ou négatifs et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres premiers. Si $|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|$ sont petits, tout nombre N est, à un nombre très limité près d'unités, de la forme A.

Peut-être pourrait-on trouver là des énoncés plus faciles à établir en général que ceux de Goldbach, Polignac et *Nauticus*.

E. Maillet.

**1306.** (**1898**, 148) (F. Delastelle). — *Solution de l'équation* $x = N(By - z)$. — Si B et N désignent des nombres donnés quelconques, on aura aisément des valeurs entières de $x$, $y$, $z$ en prenant

$$x = \frac{N}{2} By, \qquad z = \frac{By}{2},$$

et il suffira de se donner $y$. Cette hypothèse particulière exige seulement que B soit pair.

Plus généralement, on pourra poser

$$x = \frac{N}{m} By, \qquad z = \frac{m-1}{m} By.$$

Il faut alors que $m$ divise B, ou, si B est premier, que $m = B$.

Ces valeurs vérifient l'équation donnée et en sont, par conséquent, des solutions entières. H. Brocard.

**1307.** (**1898**, 149) (*Novus*). — *Édition des Œuvres de Descartes* (**1898**, 216). — La publication des *Œuvres de Descartes*, par MM. Adam et P. Tannery, forme actuellement huit Volumes in-4°, comprenant :

I à V. — Correspondance (du 3 avril 1622 au 10 février 1650) (586 pièces).

VI. — Discours de la Méthode et Essais.
VII. — *Meditationes de prima philosophia.*
IX. — Méditations et Principes (Traduction française).

Elle comptera en tout onze Volumes.

Pour achever de réunir tous les documents relatifs à René Descartes, M. Adam, recteur de l'Académie de Nancy, a reçu mission (arrêté ministériel du 19 juillet 1905) de faire des recherches dans les bibliothèques de Hollande et d'Allemagne.

H. Brocard.

**1945.** (**1900**, 333) (G. de Rocquigny). — *Procédés pour déterminer le rayon d'une sphère* (**1901**, 283; **1902**, 133; **1905**, 247). — En mesurant (au compas) les distances de quatre points de la sphère et appelant $a$, $a'$, $b$, $b'$, $c$, $c'$ les arêtes opposées, R le rayon cherché :

$$R^2 = -\frac{1}{576V^2}\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$= -\frac{1}{576V^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2c'^2 & b^2b'^2 \\ 1 & c^2c'^2 & 0 & a^2a'^2 \\ 1 & b^2b'^2 & a^2a'^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{576V^2}\begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa' & 0 & cc' & bb' \\ bb' & cc' & 0 & aa' \\ cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix},$$

$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-c'^2 & c^2+a^2-b'^2 \\ a^2+b^2-c'^2 & 2b^2 & b^2+c^2-a'^2 \\ c^2+a^2-b'^2 & b^2+c^2-a'^2 & 2c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ 1 & b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ 1 & c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix};$$

ou bien, pour éviter les déterminants,

$$R^2 = \frac{P^2(P^2 - aa')(P^2 - bb')(P^2 - cc')}{72V^2},$$

$$2P^2 = aa' + bb' + cc',$$

$$\begin{aligned} 144V^2 = \; & a^2a'^2(b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2) \\ & + b^2b'^2(c^2 + c'^2 + a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2) \\ & + c^2c'^2(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2) \\ & - a^2b^2c^2 - (ab'c')^2 - (bc'a')^2 - (ca'b')^2. \end{aligned}$$

(*Voir* Dostor, *Déterminants.*) V. Aubry.

**2097.** (**1901**, 133) (H. Brocard). — *Points d'inflexion de courbes* (**1901**, 298). — Depuis que j'ai proposé la question et adressé ma réponse (*loc. cit.*), j'ai rencontré encore une indication bibliographique assez intéressante, qui prouve que le même sujet avait fixé depuis longtemps l'attention des mathématiciens.

Voir *Mém. de l'Ac. des Sc.*, t. X :

Le marquis de l'Hopital : Nouvelles Remarques sur les Développées, sur les points d'Inflexion et sur les plus grandes et les plus petites quantités. Le rayon de la Développée au Point d'Inflexion n'est pas toujours infiniment grand, comme l'ont assuré MM. Leibnitz et Bernoulli. H. Brocard.

**2177.** (**1901**, 223) (N.-J. Hatzidakis). — *Généralisation des courbes de Bertrand.* — Je ne puis affirmer si la généralisation indiquée ici a été déjà proposée; mais je crois que l'auteur de la question pourra utilement consulter diverses Communications de M. A. Demoulin, présentées en 1893 à l'Académie des Sciences et à la Société mathématique de France :

*Sur une généralisation des courbes de Bertrand* (*C.R.*, t. CXVI, p. 246-249).

*Sur une classe particulière de courbes* (*S. M.*, t. XXI, p. 8-13).

H. Brocard.

**2285.** (**1902**, 36) (W. Ahrens). — *Au sujet de J. Liouville* (**1902**, 215). — I. Depuis ma réponse (*loc. cit.*) j'ai rencontré de nouvelles indications biographiques, dont une, peu connue, em-

pruntée à un Ouvrage devenu assez rare. Il s'agit de l'*Histoire de la ville et des seigneurs de Commercy*, par C.-E. DUMONT, avocat à Saint-Mihiel. Bar-le-Duc, 1843.

On y trouve (t. III) un témoignage que l'auteur tenait certainement de Liouville, car il n'est pas douteux qu'il l'ait connu personnellement. J. Liouville a dû, en effet, passer quelques-unes de ses premières années à Commercy, où il se trouvait au pays de son oncle, originaire et habitant de Vignot, à 2$^{km}$ de l'autre côté de la Meuse. Son frère Félix, plus âgé de 6 ans, et plus tard avocat de grand talent, faisait alors ses études au collège de Commercy. Joseph n'y suivit point de classes, mais « c'est à Commercy, ajoute Dumont, qu'il a reçu l'instruction primaire, et il ne faut pas oublier que M. Rolin, son maître, lui prédit maintes fois qu'il ne ferait jamais rien, parce qu'il aimait trop le jeu. Il n'avait pas deviné que l'enfant qui jouait imperturbablement aux échecs pendant une journée entière, à l'exclusion des plaisirs de son âge, devait être un Pascal ou un Newton ».

Vraie ou non, cette anecdote est de celles que l'on rencontre dans les biographies, où il se trouve toujours à point nommé et comme par hasard un pédagogue infaillible et à vue longue, qui vient ratiociner au sujet de ses pupilles. Décidément on tombait mal avec J. Liouville : après Rolin, ce fut Gergonne, puis Auguste Comte.

II. Dans sa Notice historique sur P.-L. Cordier (17 décembre 1894), J. Bertrand observe que Sturm, Liouville, etc. n'ont pas encore reçu l'hommage digne de leur célébrité.

III. On peut s'étonner que Bertrand n'ait pas trouvé l'occasion de consacrer une de ses lectures à la biographie et à l'œuvre de J. Liouville, surtout étant donné que le fondateur-directeur du *Journal de Mathématiques* avait des titres tout spéciaux à une Notice historique. Il est vrai que J. Bertrand et M. Chasles ont beaucoup parlé des travaux de Liouville dans les Rapports sur les progrès de l'Analyse mathématique et de la Géométrie.

IV. En attendant un éloge de J. Liouville dans les publications de l'Académie des Sciences, il convient de signaler une courte esquisse biographique, par M. H. Laurent, dans le Livre du Centenaire de l'École Polytechnique, 1794-1894 (t. I, 1895, p. 130-133; Paris,

Gauthier-Villars), et *passim* diverses mentions, notamment celle de M. Mercadier (p. 57) :

« De 1840 à 1850, Liouville fut un véritable professeur, d'une figure agréable, aux yeux pétillants de vivacité. rempli d'ardeur; il avait la parole chaude et vibrante; habile à mettre en relief les points principaux d'une théorie ou d'une démonstration; montrant avec soin la voie suivie, il excitait ses élèves à apprendre et leur apprenait à chercher. »

V. J. Liouville a été (en 1834) professeur de Géométrie et de Mécanique rationnelle à l'École centrale des Arts et Manufactures, aux premiers temps de cette institution.

VI. Liouville a eu pour successeurs, comme professeur d'Analyse à l'École Polytechnique, Duhamel, le 4 mars 1851; au Bureau des Longitudes, Ossian Bonnet; à la Section d'Astronomie de l'Institut, Wolf.

VII. Les éléments d'appréciation de l'œuvre mathématique de Liouville ne manquent pas. Plusieurs sont indiqués dans les Ouvrages susmentionnés. Le lecteur pourra y ajouter : N. SALTYKOW, *Sur le rapport des travaux de S. Lie et de Liouville* (*C. R.*, t. CXXXVII, 1903, p. 403-405). H. BROCARD.

**2309.** (**1902**, 90) (H. BOSMANS). — Au sujet de l'auteur, sinon de l'Ouvrage cité, dont la consultation paraît jusqu'alors impossible, voici quelques données qui pourront présenter un certain intérêt.

Le mathématicien Jean La Faille, d'Anvers, est mentionné dans la Correspondance de Peiresc et de Gassendi.

Voici les extraits qui s'y rapportent :

*Peiresc à Gassendi.* Aix, 15 février 1633.

« Depuis avoir escript la despesche estant demeurée à faulte de commodité, j'ai receu de Paris le livre dont on me faisoit tant de feste lequel j'ay trouvé estre d'un père jésuiste d'Anvers professeur du Collège de Madrid nommé le P. Jean de la Faille, qui a cherché la quadrature du cercle dans les proportions du centre de la gravité, où c'est qu'il y a des choses qui semblent assez bien inventées pour ce peu que j'en ay peu voir. Je m'en vay envoyer ce livre à M. le prieur de la Valette pour l'examiner, en attendant la commodité de

le vous envoyer. Tout ce que j'y trouve de fascheux est que l'on me mande de ne me pas priver facilement de ce livre sans me dire pourquoy. ce qui me faict craindre que l'autheur l'aye possible voulu supprimer et en faire retirer les exemplaires ou bien le rendre plus exquis et plus desirable à la mode d'Espaigne où c'est qu'ilz font imprimer seulement cinquante coppies d'un livre qui ne se vendroit qu'un teston pour le faire vendre dix escus. » (Bib. Nat., fonds fr., vol. 12772, f° 37.)

*Peiresc à Du Puy.* Aix, 21 février 1633.

« J'ay receu le petit fagot de livres que vous aviez faict bailler à M. le sacristain Valbelle où estoient les trois exemplaires du Cunæus dont je vous remercie très humblement comme des aultres, et principalement de cez préparatifz du P. la Faille à la quadrature du cercle, où je passay une aprez disnée bien doucement, l'ayant remis à M. le Prieur de la Valette pour l'examiner et pour l'envoyer par aprez à M. Gassendy afin de vous faire part de leur advis en temps et lieu. » (Bib. Nat., coll. Dupuy, vol. 717, f° 206.)

*Peiresc à Gassendi.* Aix, 22 février 1633.

« J'ay receu de Paris un livre du P. Jean la Faille d'Anvers, professeur des mathematiques au college imperial de Madrid, sur des preparatifs à la quadrature du Cercle, par les proportions du centre de la gravité d'Archimede, où je prins bien du plaisir, l'aultre jour, durant une bonne heure, mais, allant au palais, je l'envoyay à M. le Prieur de la Valette pour l'examiner, lequel ne m'a pas rendu responce depuis; je l'envoyeray semondre de le faire avant le despart de ce porteur, et demeure, etc. » (Bib. Nat., *loc. cit.*, f° 39.)

*Peiresc à Gassendi.* Aix, 25 février 1633.

« ... cependant je ne vous puis rendre aulcune responce concernant le livre du P. La Faille dont je vous avois parlé. » (Bib. Nat., *loc. cit.*, f° 41.)

*Peiresc à Gassendi.* Aix, 26 février 1633.

« M. de la Valette me renvoya le livre du P. La Faylle que je fis incontinent couvrir et courir mon homme aprez le porteur, mais il se trouva desja trop esloigné de la ville. Je n'ay pas encore peu voir M. le Prieur de la Valette pour sçavoir son advis sur ce livre, vous

l'aurez maintenant cy joinct avec un pacquet arrivé au matin de Paris. » (Bib. Nat., *loc. cit.*, f° 43.)

A la Lettre du 21 février, M. Tamizey de Larroque ajoute : *Theoremata de centro gravitatis partium circuli et ellipsis* (Anvers, 1632, in-4°). H. Brocard.

**2311.** (**1903**, 33) (S. de la Campa). — *Problèmes relatifs à la chaînette.* — Comme indication bibliographique me paraissant pouvoir être utile à l'étude proposée, je citerai un Mémoire de M. H. Léauté : *Sur l'établissement des équations données par M. Resal pour représenter le mouvement d'une courbe funiculaire plane* (*J. M.*, 1880, p. 215-234). H. Brocard.

**2322.** (**1903**, 38) (P.-F. Teilhet). — *Carré arithmétique.* — Voici une solution particulière qui convient, quel que soit le nombre des équations.

La première équation se réduit à

$$2x = 1 + y^2$$

ou, en posant $y = 2\mu + 1$,

$$x = 1 + 2\mu(\mu + 1).$$

Supposons que $\mu$ soit un carré parfait $\mu = m^2$; on a alors

$$x - 1 = 2m^2(m^2 + 1) = m^2(m + 1)^2 + (m - 1)^2 m^2;$$

$x - 1$ étant une somme de deux carrés, $(x - 1)^2$ est lui aussi une somme de deux carrés, et un de ces carrés est égal à $[2m^2(m^2 - 1)]^2$. En supposant que l'on ait $m - 1 = n^2$, ce carré devient

$$n^4(n^2 + 1)^2\,[2n^2(n^2 + 1)]^2;$$

au facteur $n^4(n^2 + 1)^2$ près, il est de la même forme que $(x - 1)^2$; il est donc égal à une somme de deux carrés. Si l'on suppose que $n - 1 = p^2$, un des carrés obtenus à un facteur carré près aura encore la même forme que $(x - 1)^2$, et pourra, lui encore, être décomposé en une somme de deux carrés; et l'on peut continuer ainsi indéfiniment. En résumé, soit $a_n^2$ un carré quelconque; consi-

dérons la suite

$$a^2, \quad a_1^2 = a - 1, \quad a_2^2 = a_1 - 1, \quad a_3^2 = a_2 - 1, \quad \ldots, \quad a_n^2 = a_{n-1} - 1.$$

Un nombre quelconque $a_p$ se déduit du suivant $a_{p+1}$. En posant $x = 1 + 2a^2(a^2+1)$, on obtiendra la solution d'un système de $n+1$ équations. H.-B. MATHIEU (Saïgon).

**2549.** (**1903**, 70) (G. PEANO). — *Origine du signe* Ɔ. — A titre de curiosité, je signalerai ici l'indication singulière que m'a fourni un hasard de lecture.

Je l'ai rencontrée dans l'*Histoire des Ouvrages des Savans* (de Baillet), mai 1695.

ART. XII (Analyse de l'Ouvrage) *Thesaurus Antiquitatum Romanorum, etc.*, par Jean George GRAEVIUS (Leyde, 1694, in-folio, p. 2071).

« On dispute si les femmes romaines portoient des noms propres. Castalion a soutenu qu'elles ne prenoient que le nom de la famille. Le seul nom de *Caïa* étoit commun à toutes les femmes. Ce mot signifioit l'entière soumission à l'époux, et une diligente ménagère, et en ce cas même le C étoit retourné ainsi Ɔ, afin qu'on ne le prit point pour le nom de la famille *Caïa.* »

Or, le signe Ɔ a été employé pour indiquer la propriété universelle. Il y a là une analogie frappante avec le retournement du C dans l'épigraphie romaine. Serait-ce là que les écoliers l'auraient pris? Je suis tout à fait porté à le croire. H. BROCARD.

**2575.** (**1903**, 104) (É. MALO). — *Théorème de Faure et son corrélatif* (**1903**, 200). — *Voir* E. DUPORCQ, *Nouvelle démonstration géométrique d'un théorème de M. Faure* (par l'inversion) (*N. A.*, 1891, p. 140-142).

Il s'agit du théorème énoncé à la fin de ma réponse (*loc. cit.*).

H. BROCARD.

**2664.** (**1903**, 256) (*Tellaw*). — *Carrés magiques* (**1904**, 63). — J'ai retrouvé par hasard le carré magique indiqué (*loc. cit.*). Il est dû à Euler et à son sujet Lebesgue a publié une étude intitulée : *Sur un théorème des nombres* (*N. A.*, 1856, p. 403-407).

H. BROCARD.

**2706.** (**1904**, 4) (Th. Lemoyne). — *Corde d'une cubique* (**1904**, 107). — Comme l'article de M. Maleyx cité en la réponse de M. Brocard se rapporte à la strophoïde, et qu'une cubique unicursale peut bien être orthonodale sans être circulaire, il me semble qu'il ne répond pas à la question posée par M. Lemoyne. Sur une cubique de la quatrième classe, les couples de *points conjugués* (*points correspondants, pôles conjugués* de Hesse) sont projetés du point double $\delta$ suivant une involution quadratique de rayons, dont les rayons doubles sont les tangentes au point double; et réciproquement, deux rayons issus du point double et séparés harmoniquement par les tangentes en ce point vont couper à nouveau la cubique en deux points conjugués. Il s'ensuit que, si les tangentes en $\delta$ sont orthogonales, deux rayons issus de $\delta$ également inclinés sur elles coupent la cubique en deux points conjugués : c'est la propriété particulière demandée par M. Lemoyne.

Sur une cubique à point double, une involution est *centrale* (c'est-à-dire, les droites qui unissent deux points d'un couple passent par un même point de la courbe) lorsqu'un de ses couples est formé par les deux points *consécutifs* du point double : donc, si les tangentes en $\delta$ sont orthogonales, l'involution d'angles droits ayant $\delta$ pour sommet marque sur la cubique une involution centrale; autrement dit : les cordes vues du point double sous un angle droit coupent la cubique en un point fixe.

V. Retali (Milan).

**2753.** (**1904**, 71) (Th. Lemoyne). — *Théorème sur les cubiques* (**1904**, 174). — Le théorème : *l'enveloppe des droites qui unissent les couples de points correspondants d'une involution quadratique, non centrale, sur une cubique unicursale, est une conique*, est démontré d'une manière simple et directe, sans recourir à la transformation quadratique, par Em. Weyr [*Curven* 3O *mit einem Doppelpunkte*, p. 103 (Leipzig, Teubner, 1869)] qui a aussi étudié à fond, en des travaux postérieurs, les involutions sur les cubiques planes unicursales (*voir* notamment *S. A. W.*, vol. LXXXI, mars 1879 et janvier 1880). L'enveloppe indiquée (conique d'involution) a triple contact avec la cubique et, réciproquement : les tangentes d'une conique tritangente marquent sur la cubique une involution quadratique. Lorsque l'involution a pour points doubles les points circulaires à l'infini, la conique d'involution, étant tangente aux tan-

gentes en ces points, a l'un de ses foyers au foyer singulier de la cubique et la propriété indiquée par M. Lemoyne revient à dire que la podaire d'une conique centrale par rapport à un foyer est un cercle.

La propriété, relative à la quartique à point triple, énoncée dubitativement en la réponse de M. E. Malo (p. 175, note au bas de page) est exacte. On démontre aisément que : *en toute quartique* $C_4^6$ *unicursale de la sixième classe, la courbe d'involution d'une involution quadratique est une courbe unicursale de la troisième classe tangente à* $C_4^6$ *en six points, et qui a en outre en commun avec* $C_4^6$ *les tangentes en les deux points doubles de l'involution, et quatre autres tangentes.* V. Retali (Milan).

**2765.** (**1904**, 94) (E.-N. Barisien). — *Courbe unicursale du quatrième degré* (**1904**, 225. 294). — La tangente et la normale aux points $\begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ b\sin\varphi \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -a\sin\varphi \\ +b\cos\varphi \end{pmatrix}$ ont pour équations

$$bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab = 0,$$
$$ax\cos\varphi + by\sin\varphi + c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Or, pour trouver le lieu de leur point de rencontre, il suffit d'éliminer $\varphi$ entre ces équations, ce qui revient à éliminer la même variable entre

$$ac^2y\sin^2\varphi + c^2(xy - ab)\sin\varphi - a^2bx = 0,$$
$$(b^2x^2 + a^2y^2)\sin^2\varphi - 2a^2by\sin\varphi + b^2(a^2 - x^2) = 0.$$

Le résultant est

$$a^2[ax(b^2x^2 + a^2y^2) + c^2by(a^2 - x^2)]^2$$
$$+c^2[c^2(a^2 - x^2)(xy - ab) - 2a^4xy][(b^2x^2 + a^2y^2)(xy - ab) + 2a^3by^2] = 0.$$

Développant, on a

$$(b^2x^2 + a^2y^2)\begin{bmatrix} a^4x^2(b^2x^2 + a^2y^2) - 2a^3bc^2x^3y - 2a^4c^2x^2y^2 \\ + 4a^5bc^2xy - c^4x^2(x^2y^2 + a^2b^2) \\ + a^2c^4(x^2y^2 + a^2b^2) - 2abc^4(a^2 - x^2)xy \end{bmatrix}$$
$$+ a^2b^2c^4y^2(a^4 + x^4 - 2a^2x^2) + 2a^5bc^4(xy - ab)y^2$$
$$- 2a^3bc^4(xy - ab)x^2y^2 - 4a^7bc^2xy^3 = 0.$$

---

Réduisant, on trouve

$$\begin{aligned}&- c^4x^2(b^2x^2+a^2y^2)(x^2y^2+a^2b^2)\\&\quad - a^4b^4x^6+a^4(a^2-c^2)^2x^2y^4+a^4b^4c^4x^2\\&\quad + 2a^2b^2x^4y^2(a^4+c^4-a^2c^2)\\&\quad - 2c^2x^3y(a^5by^2+a^3b^3x^2-ab^3c^2x^2+a^3b^3c^2-2a^5b^3)=0.\end{aligned}$$

Supprimant le facteur commun $x^2$, l'équation s'abaisse de deux degrés et devient

$$\begin{aligned}&c^4(b^2x^2+a^2y^2)(x^2y^2+a^2b^2)\\&\quad - a^4b^4(x^4+y^4)-2a^2b^2x^2y^2(a^4+b^4-a^2b^2)\\&\quad + 2abc^2xy[a^4y^2+b^4x^2-a^2b^2(a^2+b^2)]-a^4b^4c^4=0.\end{aligned}$$

C'est une sextique unicursale; M. Ler (**1904**, p. 225) avait trouvé une octique.

Divisant par $a^4b^4$ (à part une faute d'impression qui fait que le terme en $xy$ est négatif au lieu d'être positif), on retrouve l'équation donnée par M. Mathieu

$$\begin{aligned}&c^4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}\frac{y^2}{b^2}+1\right)-(x^4+y^4)\\&\quad -2\frac{x^2y^2}{a^2b^2}(a^4+b^4-a^2b^2)\\&\quad +\frac{2c^2xy}{ab}\left(\frac{a^2y^2}{b^2}+\frac{b^2x^2}{a^2}-(a^2+b^2)\right)-c^4=0.\end{aligned}$$

Il résulte de ces calculs que l'équation donnée par M. Tafelmacher (**1904**, p. 295) est défectueuse, ce dont on peut s'assurer en la développant et en la comparant à l'équation ci-dessus.

Le facteur qui multiplie $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$ dans le second membre doit être modifié; au lieu de

$$[(a^2-b^2)xy+abc^2]^2,$$

il faudrait écrire

$$\begin{aligned}&c^2[c^2(xy+ab)^2+4ab^3xy](b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)\\&\quad = a^2b^2[ab(x^2+y^2)+c^2xy]^2.\end{aligned}$$

H. Lez.

**2766.** (**1904**, 94; **1905**, 81) (*Doubt*). — *Point d'inflexion d'une cubique* (**1905**, 81, 273). — En toute cubique générale sont toujours

réels : trois points d'inflexion qui sont situés en ligne droite (théorème de Plücker), quatre droites de points d'inflexion, un triangle inflexionnel et quatre sommets de triangles inflexionnels. Pour la démonstration, *voir :* Cremona, *Introduzione ad una theoria geom.*, p. 144; Clebsch, t. II, p. 235 de la traduction française; Schörter, *Th. der Ebenen Kurven*, 3.O, p. 239. Plus récemment, la configuration des points d'inflexion de la cubique générale a été étudiée d'une manière approfondie par M. Disteli, qui considère la cubique comme projection d'une courbe gauche du quatrième ordre et première espèce, faite d'un de ses points (*Vierteljahrsschrift d. Naturforschenden G. in Zürich*, Jahrg. XXXV, Heft 2, 1890).

Les deux cubiques indiquées dans la réponse de M. Brocard (**1905**, 81) ne sont pas générales, car la première,

$$y = (x-a)(x-b)(x-c),$$

possède un rebroussement au point à l'infini de l'axe des $y$, dont la droite à l'infini est la tangente; l'autre, du type

$$y = \frac{a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3}{b_0 x + b_1},$$

a un nœud à l'infini, dont les tangentes sont la droite $b_0 x + b_1 = 0$ et la droite à l'infini; les deux courbes appartiennent donc respectivement à la troisième et à la quatrième classe.

V. Retali (Milan).

**2815.** (**1904**, 211) (C. Popovici). — (**1904**, 301; **1905**, 59). — A la note bibliographique (**1904**, 302) ajouter :

J. Vieille. — Solution d'un problème sur le triangle rectiligne (*N. A.*, 1855, p. 162-168).

L'auteur cite Euler et Terquem, mais il ne traite que le cas très particulier où I est sur la droite OGH. H. Brocard.

**2828.** (**1904**, 239) (E.-N. Barisien). — *Enveloppe de cercles* (**1904**, 277; **1905**, 60). — Étant données dans un plan une courbe Γ et une droite fixe $d$, sur l'enveloppe des cercles tangents à $d$, dont le centre est sur Γ, j'ai démontré (*P. M. R.*, vol. XV, 1907, p. 163; p. 74; *Ibid.*, vol. XIII, p. 85, quest. **401**; p. 125, quest. **406**) les théorèmes suivants :

*Si* Γ *est une courbe générale de la classe m, en situation géné-*

*rale par rapport à d et à la droite à l'infini, l'enveloppe est une courbe* $\Gamma_1$ *de la classe* $2m$ *et de l'ordre* $m(m+1)$. *Les points circulaires à l'infini en sont points* $m^{uples}$. *La droite fixe d est une tangente* $m^{uple}$, *dont les points de contact sont ceux où elle coupe les tangentes de* $\Gamma$ *qui lui sont perpendiculaires; les autres points d'intersection de* $\Gamma_1$ *avec d tombent sur* $\Gamma$.

*L'enveloppe* $\Gamma_1$ *est le lieu des foyers des paraboles tangentes à* $\Gamma$ *et qui ont d pour directrice. Il est aussi l'enveloppe des droites symétriques de d par rapport aux tangentes de* $\Gamma$.

On peut ajouter que *les foyers singuliers de* $\Gamma_1$ *sont les foyers simples de* $\Gamma$. Les rebroussements de $\Gamma_1$ sont les foyers des $3m$ paraboles osculatrices à $\Gamma$ qui ont $d$ pour directrice. Les points doubles, au nombre de $m(2m^2-m-5)$, que $\Gamma_1$ possède, outre les $m(m-1)$ qui équivalent aux deux points $m^{uples}$ indiqués, sont les foyers des paraboles qui ont $d$ pour directrice et qui sont bitangentes à $\Gamma$.

Lorsque $\Gamma$ est une conique centrale, l'enveloppe $\Gamma_1$ est donc, en général, une courbe unicursale du sixième ordre, bicirculaire, et de la quatrième classe ; une de ses trois tangentes doubles est la droite $d$, les deux autres sont les droites qui unissent le pôle de $d$ par rapport à la conique $\Gamma$ avec les points où $d$ est coupée par le cercle orthoptique de $\Gamma$.

En appelant $u'$, $v'$ les coordonnées d'une tangente $t_1$ à $\Gamma$, celles de la droite $t$, symétrique à $d$ par rapport à $t_1$, seront

$$u = u', \qquad v = \frac{1}{2v'}(v'^2 - u'^2);$$

si $f(u', v') = 0$ est l'équation tangentielle de $\Gamma$, celle de $\Gamma_1$ sera donc

$$f\left(u, v \pm \sqrt{u^2+v^2}\right) = 0.$$

Par exemple, à la conique centrale

$$\Gamma \equiv a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0$$

correspond l'enveloppe

$$\Gamma_1 \equiv [(a^2+b^2)u^2 + 2b^2v^2 - 1]^2 - 4v^2(u^2+v^2) = 0;$$

c'est le cas particulier visé par M. Barisien. Pour la parabole

$$\Gamma \equiv pv^2 - 2u = 0,$$

on trouve l'enveloppe de la troisième classe

$$\Gamma_1 = u(pv - 2)^2 - 8pv^2 = 0.$$

V. Retali (Milan).

2875. (**1905**, 26) (Th. Lemoyne). — *Cubique acnodale.* — Dans la théorie des cubiques unicursales, est fondamental et bien connu le théorème suivant :

*Les couples de points conjugués (c'est-à-dire qui ont un même tangentiel) sont projetés du point double, suivant une involution quadratique dont les rayons doubles sont les tangentes au point double.*

*Voir*, par exemple, Em. Weyr, *Th. der mehrdeutigen Geom. u. s. w.*, p. 92 du premier Volume).

Si les tangentes au point double sont isotropes, l'involution est donc rectangulaire, ce qui démontre 1°. Quant à 2°, il revient à dire que, si M est le tangentiel des deux points conjugués A, B, la droite | AB | coupe à nouveau la cubique au point conjugué de M.

V. Retali (Milan).

2876. (**1905**, 27) (Th. Lemoyne). — *Folium double.* — Aussi pour le *trifolium*, droit ou oblique, a lieu la propriété analogue :

*Toute corde vue du point triple sous un angle droit est parallèle à deux tangentes doubles.*

Considérant le trifolium et le bifolium comme transformées d'un cercle dans une certaine transformation double du deuxième ordre, les propriétés indiquées constituent la définition même des courbes en question. On peut consulter, outre le Mémoire de M. Brocard (*J. S.*, 1891) qui contient une bibliographie très soignée du *trifolium* et du *bifolium*, une de mes Notes insérée au *P. M.* (1899, p. 128). Probablement le plus ancien Mémoire sur le bifolium est celui de J.-K. Tobisch : *Abhandl. üb. d. Curve deren Natur durch d. Gleichung*

$$y^4 = (4ax - 2x^2)y^2 - x^4$$

*ausgedrückt wird* (Breslau, 1833, in-4°, avec une Planche).

V. Retali (Milan).

**2880.** (**1905**, 28) (E. MAILLET). — *Applications géométriques de la théorie des substitutions.* — M. L.-E. Dickson me signale son Mémoire intitulé : *On the real elements of certain classes of geometrical configurations*, qui a été communiqué à l'*American Mathematical Society* et publié dans les *Annals of Mathematics* (2e série, Vol. VI, n° 4, 1905, p. 141-150). M. L.-E. Dickson y traite certains des sujets que j'avais indiqués dans mon Mémoire des *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, en apportant sur plusieurs points des simplifications et des compléments importants. E. MAILLET.

**2903.** (**1905**, 76) (E.-B. ESCOTT). — *Équations indéterminées* (**1905**, 207). — Voici une autre solution du système proposé

$$\begin{aligned} x &= a(a^4+1), \\ y &= 2a^4-1, \\ r &= a[(a^2+1)^2-2], \\ s &= a[(a^2-1)^2-2]; \end{aligned}$$

$a$ est un nombre entier quelconque.

H.-B. MATHIEU (Saïgon).

**2907.** (**1905**, 103) (LA RÉDACTION). — *Monuments des mathématiciens français* (**1905**, 234). — A Tours, belle statue de Descartes avec l'inscription :

*Cogito, ergo sum,*

ce qui fait que dans le peuple on dit que c'est la statue de M. Cogito.

A Beaumont, dans la vallée d'Auge, près de Trouville, inscription sur la façade d'une maison transformée en Musée :

Ici naquit.... Laplace
Qui de Newton agrandit le compas,
Et s'ouvrant un sillon dans le champ de l'espace
Y fit un nouveau pas.

LUCIEN LÉVY.

Pascal a un monument à Clermont, dans un square qui porte son nom; il est représenté assis; la statue est en airain et repose sur un magnifique bloc de porphyre d'Aberdeen (Écosse).

Une statue en marbre représentant B. Pascal debout et lisant a été donnée par le sculpteur C. Ramey (1824) à la ville de Clermont;

elle se trouve dans la salle de lecture de la Bibliothèque de cette ville. En outre, un buste de Pascal se trouve sur la maison où il est né.

Descartes a une statue en marbre à Tours (Indre-et-Loire) avec ces mots : *Cogito, ergo sum.* A. PELLET.

**2911.** (**1905**, 104) (E. MAILLET). — *Interprétation d'un article du Code civil* (**1905**, 236, 255). — Une étude sur l'article 757, depuis devenu 758, du Code civil français est donnée dans l'Ouvrage de Chéfik Bey : *Application des mathématiques à la jurisprudence* (Gauthier-Villars, 1880). Cette étude est même l'unique objet de l'Ouvrage. CH. RUCHONNET (Lausanne).

Il peut être utile de consulter :

QUILLET, *N. A.*, 1re série, t. IV, 1845, p. 253; GROS, *N. A.*, 1re série, t. X, 1851, p. 27; CATALAN, *N. A.*, 2e série, t. II, 1863, p. 107; Bibl. Nat., cote : 8° V. 1230. G. LEMAIRE.

**2922.** (**1905**, 128) (E. MALO). — Les projetantes obliques, menées des sommets A, B, C d'un triangle et faisant avec les hauteurs ou avec les côtés un même angle ($\delta$ ou $90 - \delta$) ont été indiquées dans les *Exercices de Géométrie* de F. J. (1896, 2475). Elles déterminent les sommets d'un nouveau triangle semblable au premier (*Ibid.*).

Il est dit aussi (*loc. cit.*, p. 1096) que cette question a été étudiée par J. Casey (1877 et 1879), par E. Catalan (*Théorèmes et Problèmes*, 1878, p. 90) et dans le *Journal de Vuibert* (1879, p. 147).

Le cercle des six points, projections des pieds des hauteurs sur les trois côtés, a été déjà étudié. C'est le cercle de Taylor (*P. L. M. S.*, t. XV, 1883. p. 122) mais rencontré précédemment par Catalan (*Théorèmes et Problèmes*) et étudié par M. J. Neuberg dans *Mathesis* (1881, p. 190), etc.

Pour diverses propriétés de ce cercle, voir *A sequel to Euclid*, de J. Casey et Dowling (6e édit., 1892, p. 192-196).

La généralisation de ce cercle ne me paraît pas avoir été expressément indiquée.

Dans la question 1543 (*Mathesis*, 1905, p. 256) M. J. Neuberg observe que la construction d'un cercle de Tucker résulte de la question **2922** de l'*Intermédiaire*. H. BROCARD.

Le cercle signalé par M. E. Malo est un cercle de Tucker du triangle fondamental ABC; pour le cas particulier des projetantes normales, ce cercle porte le nom de *cercle de Taylor.*

Un cercle de Tucker peut être défini de la façon suivante : c'est un cercle passant par les six points d'intersection des côtés du triangle ABC avec ceux d'un triangle homothétique à ABC par rapport au point de Lemoine. Nous allons montrer que la génération indiquée par M. Malo se ramène immédiatement à la précédente au moyen de deux remarques très simples :

1° Le triangle A″B″C″ formé par les droites $B'_C C'_B$, $A'_B B'_A$, $C'_A A'_C$ est semblable à ABC. En effet, un quelconque de ses côtés, $B'_C C'_B$ par exemple, est parallèle au côté correspondant de ABC. Cela résulte de la proportion

$$\frac{AB'_C}{AB} = \frac{AA'_B}{AC},$$

obtenue par la multiplication des deux proportions

$$\frac{AB'_C}{AC'} = \frac{AB'}{AC}, \qquad \frac{AC'}{AB} = \frac{AC'_B}{AB'}$$

exprimant le parallélisme des droites $B'_C B'$ et $C'C$, $C'C'_B$ et $BB'$.

2° Le triangle A″B″C″ est homothétique à ABC par rapport au point K de Lemoine.

En effet : AA″, par exemple, passe par le point de Lemoine comme coupant la diagonale $A'_C A'_B$ du parallélogramme $AA'_C A'' A'_B$ en son point milieu et, d'autre part, $A'_C A'_B$ est antiparallèle à BC en vertu de l'antiparallélisme des droites $A'A'_C$ et BA′, et $A'A'_B$ et A′C.

Émile Weber (Liége).

2937. (1905, 149) (G. Lemaire). — A titre d'indication, voici quelques références bibliographiques :

Partiot. — Mémoire sur les marées fluviales (*C. R.*, t. LXXIII, 1871, p. 91-95).

B. de Saint-Venant. — Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit (*C. R.*, t. LXXIII, 1871, p. 147 et 237).

G. Héraud. — Marées de la basse Cochinchine; détermination des

ondes diurnes et semi-diurnes (*C. R.*, t. LXXIV, 1872, p. 1209-1210).

P. Guieysse. — De la propagation des marées dans les rivières. Traduit et extrait des *Tides and Waves* de M. H. Airy (*J. M.*, 3[e] série, t. I, 1875, p. 399-450).

Bouquet de la Grye. — Rapport sur les vitesses produites par les marées de l'Océan Pacifique et de la mer des Antilles dans un canal établissant une communication libre entre ces deux mers (*C. R.*, t. CIV, 1887, p. 1484-1489).

Partiot. — De la propagation et de la déformation de l'onde marée qui remonte dans les fleuves (*C. R.*, t. CXXVI, 1898, p. 1613-1615).

Maurice Levy. — Théorie des marées (Paris, 1898).

Bourdelles. — Étude sur le régime de la marée dans le canal de Suez (*Annales des Ponts et Chaussées*, 3[e] trimestre 1898, p. 11-30).

Bourdelles. — Étude sur le régime de la marée dans les estuaires et dans les fleuves (*Annales des Ponts et Chaussées*, 3[e] trimestre, 1900, p. 5-120).

On pourra consulter, dans le même Recueil, un Mémoire de Flamant et B. de Saint-Venant (1[er] semestre 1888, p. 732 et suiv.).

H. Brocard.

**2944.** (**1905**, 172) (Fitz-Patrick). — *Sur un journal de M. Labosne.* — Relativement à la question **2944** de M. Fitz-Patrick, je vous transmets un renseignement que je dois à l'obligeance de M. Hermann, libraire.

Le *Journal des Sciences mathématiques* de A. Labosne n'existe plus, il a paru pendant un an seulement et il est difficile de le trouver d'occasion; l'éditeur a disparu depuis longtemps.

H. Lez.

**2954.** (**1905**, 200) (*Rudis*). — *Fractions continues arithmétiques.* — Soient $x'$ et $x''$ les deux racines de l'équation

$$x^2 + ax = t \qquad (1)$$

que l'on peut mettre sous l'une ou l'autre des deux formes

$$x = \frac{t}{a+x}, \qquad -x = a + \frac{t}{-x}.$$

En remplaçant les quantités $x$ et $-x$ du second membre de ces

équations par leurs valeurs données par ce second membre, il vient

$$x = \cfrac{t}{a + \cfrac{t}{a + x}}, \qquad -x = a + \cfrac{t}{a + \cfrac{t}{-x}},$$

et ainsi de suite; en continuant la même opération, on trouve les deux fractions continues périodiques

$$(2) \qquad x' = \cfrac{t}{a + \cfrac{t}{a + \dots}}, \qquad x'' = -a - \cfrac{t}{a + \cfrac{t}{a + \dots}}$$

C'est là la manière la plus simple de développer les deux racines $x'$ et $x''$ d'une équation quadratique en fraction continue. Lorsque ces racines sont réelles, la fraction (2) est toujours convergente, quels que soient $t$ et $a$.

On peut d'ailleurs augmenter la convergence en posant $x = y + h$. D'où

$$y^2 + (a + 2h)y = t - (h^2 + ah),$$

$$x = h + \cfrac{t'}{a' + \cfrac{t'}{a' + \dots}} \qquad [t' = t - (h^2 + ah),\ a' = a + 2h].$$

Si, par exemple, nous considérons l'équation

$$x^2 + 2x = 18,$$

nous aurons, en faisant successivement $h = 1, 2, 3, 4$,

$$x = \cfrac{18}{2 + \cfrac{18}{2 + \dots}} = 1 + \cfrac{15}{4 + \cfrac{15}{4 + \dots}} = 2 + \cfrac{10}{6 + \cfrac{10}{6 + \dots}}$$

$$= 3 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{3}{8 + \dots}} = 4 - \cfrac{6}{10 - \cfrac{6}{10 - \dots}}$$

Plus généralement, toute fraction continue périodique est égale à une racine d'équation quadratique. Pour déterminer cette équation, on peut employer un moyen très simple.

Supposons, par exemple, que les fractions intégrantes aient pour

valeurs successives

$$\frac{2}{1},\quad \frac{2}{2},\quad \left(\frac{2}{3},\frac{2}{5}\right),\quad \left(\frac{2}{3},\frac{2}{5}\right),\quad \ldots.$$

Il suffira de poser

$$x = \cfrac{2}{1+\cfrac{2}{2+y}},\qquad y = \cfrac{2}{3+\cfrac{2}{5+y}}$$

et d'éliminer $y$ entre ces deux équations.

De la première on tire

$$y = \frac{4(1-x)}{x-2};$$

la seconde se ramène à la forme

$$3y^2 + 15y = 10.$$

D'où l'on déduit l'équation cherchée

$$11x^2 - 62x = -56.$$

La fonction continue périodique donnée a donc pour valeur

$$x = \frac{31-\sqrt{345}}{11} = 1,1296.$$

On peut développer la même racine d'une infinité d'autres manières en fraction continue; par exemple en posant $x = \frac{12+z}{11}$, il vient

$$z^2 - 38z = -16,$$

$$z = \cfrac{16}{38-\cfrac{16}{38-\ddots}},\qquad x = \frac{1}{11}\left(12+\cfrac{16}{38-\cfrac{16}{38-\ddots}}\right).$$

H. Kœchlin.

**2956** et **2957**. (**1905**, 221) (G. Lemaire). — (**1905**, 287). — Je réunis ces deux questions parce qu'elles présentent une certaine connexion au point de vue de leur bibliographie.

Cette étude paraît devoir être abordée par hypothèses successives.

Dans la pratique, on doit chercher à n'opérer que sur des triangles bien conformés, c'est-à-dire se rapprochant du triangle équilatéral. De la sorte, les erreurs de mesure, soit des angles, soit des côtés, n'ont qu'une très faible répercussion sur les autres éléments.

Quant à l'écart entre la somme des angles et 180°, la règle suivie est de le répartir uniformément. On adopte donc la compensation égale et non la compensation proportionnelle. D'ailleurs, en Géodésie, on doit rejeter tout triangle dont un angle est plus petit que 30° et dont la somme des angles différerait de 180° de quelques secondes. En topographie, l'erreur pourra être de quelques minutes à un demi-degré, à cause de l'imperfection des instruments (boussole, graphomètre, etc.) et de l'imprécision des lectures.

Voici, à ce sujet, quelques indications bibliographiques :

GAUCHEREL. — Mémoire sur les meilleures conditions à donner aux triangles géodésiques (*C. R.*, t. XXX, 1850, p. 200).

HOSSARD. — Recherches sur les formes les plus avantageuses à donner aux triangles géodésiques (*C. R.*, t. XXX, 1850, p. 446).

G. PIOBERT. — Considérations relatives à la forme la plus avantageuse à donner aux triangles dans les levers (*C. R.*, t. XXXI, 1850, p. 27-28).

G. PIOBERT. — Question de la meilleure forme à donner aux triangles géodésiques (*C. R.*, t. XXXI, 1850, p. 151-159).

G. PIOBERT. — Sur la rectification des angles dans le calcul des triangles géodésiques (*C. R.*, t. XXXI, 1850, p. 409-418).

O. TERQUEM. — De la manière de bien conditionner les triangles dans les levers et Note historique sur Roger Cotes (*N. A.*, 1850, p. 195-206).

G. PIOBERT. — Complément de l'article sur la meilleure forme à donner aux triangles dans les levers (*N. A.*, 1850, p. 234-237).

GAUCHEREL. — Note sur les erreurs relatives et absolues (*N. A.*, 1855, p. 145-150).

GAUCHEREL. — Note sur la forme préférable des triangles géodésiques (*N. A.*, 1855, p. 321-343).

Autres références : Salneuve, Testu, Puissant, Livet, Vieille, Francœur, etc., et, pour mémoire, le théorème de Legendre sur l'excès sphérique des triangles géodésiques (*Cours et Traités de Géodésie*, Francœur, Laussedat, Faye, et *N. A.*, 1856, 1857 et 1862).

*N. A.*, quest. **423**, 1859. p. 277-280. H. BROCARD.

Autre réponse de M. V. AUBRY.

**2959.** (**1905**, 222) (*Carevyge*). — ***Bibliographie des travaux scientifiques de Pascal.*** — Je ne puis donner qu'une bibliographie fort sommaire des travaux scientifiques de Pascal, n'ayant à ma dis-

position que l'*Histoire de la Physique,* par Poggendorff, et les *Pages choisies de savants modernes,* par Rebière.

Blaise Pascal est né le 19 juin 1622, à Clermont, en Auvergne; il est mort à Paris le 19 août 1662. A 14 ans, il écrivit un *Traité des sections coniques,* puis *Expériences nouvelles touchant le vuide* (Paris, 1647). Ensuite, il écrivit un Mémoire : *Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs* (Paris, 1648). Il est encore l'auteur du *Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air,* en 1653, édité en 1663, à Paris. En 1659 Pascal donne sa solution sur la roulette sous le titre : *Lettres de M. Dettonville à M. Carcavi,* et, en octobre 1658, il publia sous son propre nom l'*Histoire de la roulette,* au sujet de laquelle on lui reproche d'être trop partial pour ses compatriotes.

Les Œuvres de Pascal ont paru à la Haye et à Paris en 1779 en cinq Volumes, et plus tard en 1819, à Paris, en six Volumes in-8°.

N. Plakhowo (Tambow, Russie).

Voici quelques indications sommaires sur la bibliographie des travaux scientifiques de Blaise Pascal :

Bossut. — Édition des Œuvres de Pascal, 1779.

Bossut. — B. Pascal. Discours sur sa vie et ses Ouvrages.

Dans ses Mémoires de Mathématiques, Bossut a publié un Essai sur les travaux de Pascal, 1812.

M. Chasles. — Aperçu historique, etc., 1837.

P. Faugère. — Éloge de Pascal (*Institut royal de France. Académie française,* 30 juin 1842; 36 pages in-4°).

Delègue. — Essai sur les travaux de Pascal touchant la Géométrie infinitésimale et la formule du binome (*Mém. de la Soc. dunkerq. pour l'encourag. des Sciences, des Lettres et des Arts,* t. XIV, 1869, et Mémoire lu au Congrès de la Sorbonne en 1869).

J. Bourget. — Note au sujet de l'étude précitée de M. Delègue (*N. A.*, 1869, p. 287-288).

A. Desboves. — Étude sur Pascal et les géomètres contemporains, 1878.

J. Bertrand. — B. Pascal, sa vie et ses œuvres. Paris, 1891.

*Œuvres de V. Cousin* (t. III, 1849, p. 151-196; Paris, Pagnerre). Documents inédits sur Domat (ami de Pascal).

H. Brocard.

# QUESTIONS.

**3007.** [**I3**] Il est bien clair que la congruence

$$\sum_{x=1}^{x=p-1} x^m \equiv 0 \qquad (\bmod p)$$

est vraie pour tout module premier, quel que soit l'exposant inférieur à $p-1$, parce que $p$ entre formellement en facteur dans l'expression de $\sum_1^{p-1} x^m$ et ne comporte pas de réduction avec un des facteurs formels du dénominateur dont le plus grand est $m+1$; mais cette raison n'est plus invocable lorsque le module $p$ cesse d'être premier et il est facile de vérifier qu'habituellement la congruence n'est pas alors satisfaite. Est-il possible d'établir qu'à tout module non premier correspondent des valeurs de l'exposant $m$ pour lesquelles la congruence n'est pas satisfaite? ou bien existe-t-il des cas absolus d'exception comme pour la congruence de Fermat?

E. Malo.

**3008.** [**M¹1, M¹3**] Y a-t-il une relation entre les $(n-1)^2$ pôles d'une droite relativement à une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre et l'unique pôle de la même droite par rapport à la même courbe, si on la considère comme engendrée par ses tangentes? Peut-être au moins pour les cubiques?

H. Wieleitner (Spire).

**3009.** [**K3c** et **V**] Quelqu'un saurait-il qui a le premier démontré le théorème de la somme des deux lunules

sur les cathètes d'un triangle rectangle? Moi-même j'en ai trouvé une démonstration dans les *Act. Erud.* (Lips., 1710) du comte F.-E. de Herbertstein. Et sait-on qui a introduit la fausse dénomination de *Lunulæ Hippocratis,* qui se trouve déjà dans l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla (Paris, 1758, vol. I, p. 152)?

H. WIELEITNER (Spire).

3010. [**K11** et **M'6bα**] Un de mes anciens élèves m'a proposé la construction suivante :

Une circonférence de rayon R étant donnée, on y mène toutes les cordes parallèles à une direction quelconque : soit AA' une de ces cordes. On décrit sur AA' comme diamètre une circonférence Γ, puis des circonférences $\gamma$ et $\gamma'$ de rayon $r$ (constant) avec les centres A et A'. Chercher le lieu des points d'intersection de Γ et $\gamma(\gamma')$, si la corde AA' varie.

La solution m'a livré une courbe du huitième ordre qui se réduit pour $r = R$ au carré de la lemniscate de Bernoulli.

Cette construction de la lemniscate de Bernoulli est-elle connue, ou sait-on la mettre en relation avec les qualités ordinaires de la lemniscate?

H. WIELEITNER (Spire).

3011. [**M'8**] Vers quelle forme tend la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$$

lorsque $n$ tend vers l'infini? E.-N. BARISIEN.

3012. [**K12b**] On considère trois cercles O, O', O'' de rayon R, et dont les distances des centres sont D, D', D''. On désire connaître les rayons des cercles qui coupent les cercles O, O', O'', respectivement sous les angles $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$.

E.-N. BARISIEN.

**3013.** [**M'8**] La courbe représentée par les coordonnées

$$x = a \cos^m \varphi, \qquad y = b \sin^m \varphi,$$

dans lesquelles $\varphi$ est variable, est :

| | | |
|---|---|---|
| Pour | $m = 0$ ....... | un point |
| » | $m = 1$ ....... | une ellipse |
| » | $m = 2$ ....... | une droite |
| » | $m = 3$ ....... | une développée d'ellipse |
| » | $m = 4$ ....... | une parabole |
| » | $m = -1$ ..... | une Kreuzcurve |
| » | $m = -2$ ..... | une hyperbole équilatère |

Existe-t-il d'autres valeurs de $m$ correspondant soit à une courbe connue, soit à une courbe intéressante?

E.-N. Barisien.

**3014.** [**K1c**] Connaît-on les expressions des aires des triangles formés : 1° par les milieux des hauteurs; 2° les milieux des bissectrices d'un triangle donné, en fonction des côtés de ce triangle?

*Crut.*

**3015.** [**L'6**] Je désire connaître les courbes suivantes : Soient C et C' les centres de courbure correspondant à deux points conjugués d'une ellipse M : enveloppe de la droite CC' et lieu de la projection du centre de l'ellipse sur la droite CC'.

*Crut.*

**3016.** [**D3b**] Lorsque, dans l'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long d'un contour donné, on remplace $z$ par $x + iy$, on est conduit aux deux intégrales

$$\int (\mathrm{P}\,dx - \mathrm{Q}\,dy), \quad \int (\mathrm{P}\,dy + \mathrm{Q}\,dx),$$

dans lesquelles $x$ et $y$ doivent être considérées comme de certaines fonctions d'un paramètre $t$ choisies de telle sorte que, par la variation de $t$, le point $(x, y)$ décrive en entier le

contour donné. Je demande si l'on sait ramener ces intégrales aux aires planes enfermées sous deux circuits se déduisant géométriquement d'une façon simple du contour primitivement considéré. *Rudis.*

3017. [**C2**] Le calcul d'un arc de la courbe

$$y = k\frac{\sin x}{x}$$

conduit à l'intégrale suivante :

$$s = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sqrt{x^4 + k^2x^2\cos^2 x + \sin^2 x - x\sin 2x}}{x^2}\,dx.$$

Un correspondant pourrait-il faire connaître le moyen de trouver des solutions au moins approchées de cette intégrale pour $n = 3, 4, 5, 6$ et $7$?

Dans le problème auquel je désire l'appliquer, la valeur du paramètre $k$ est $11,3$. *Ymer.*

3018. [**D6iβ**] Pour $s = \sigma + i$, $\sigma$ étant compris entre $0$ et $1$, la différence entre $\zeta(s)$ et la somme des $n$ premiers termes de la série divergente

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots$$

tend vers $0$ en même temps que $\frac{1}{t}$, lorsque $n$ est un entier supérieur à $t$ et inférieur à $t^{\frac{1}{1-\sigma}}$. Existe-t-il un fait analogue pour le produit

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\cdots}?$$

A. Pellet.

3019. [**Q** et **Q4a**] Lorsqu'on donne cinq points dans un plan, l'on sait que, si l'on prend un sixième point sur la conique déterminée par lesdits cinq points, les trois couples

de côtés opposés de l'hexagone ainsi obtenu se coupent en trois points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ situés en ligne droite, c'est-à-dire de manière que l'aire du triangle $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ est égale à zéro. Or, je me demande, étant donnés cinq points dans un plan, comment on devra prendre sur le plan un sixième point afin que l'aire $\Delta\alpha\beta\gamma$ soit plus grande, égale ou plus petite qu'une quantité donnée? J'ai reçu de M. Neuberg une intéressante Communication où l'on pose une question analogue pour le cas de l'hexagone de Brianchon. Je désire une solution tant pour le cas de la géométrie euclidienne que pour celui de la géométrie non euclidienne. *Trinitario.*

**3020. [D1b]** $\varphi(x)$ étant une fonction positive lorsque $x$ varie de $a$ à $b$, $f$ et $f_1$ deux fonctions de $x$ satisfaisant aux relations

$$\int_a^b f\varphi\,dx = 0, \qquad \int_a^b f_1\varphi\,dx = 0,$$

désignons par M, $M_1$ les plus grandes valeurs positives atteintes par $f$, $f_1$, $-N$, $-N_1$ les valeurs minima de $f$ et $f_1$

$$M > f > -N, \qquad M_1 > f_1 > -N_1.$$

Si $\int_a^b ff_1\varphi\,dx = A$, on a

$$MN_1 I \geqq A, \qquad M_1 N I \geqq A \qquad \text{si } A > 0,$$

et

$$MM_1 I \geqq |A|, \qquad NN_1 I \geqq |A| \qquad \text{si } A < 0,$$

I désignant l'intégrale $\int_a^b \varphi\,dx = I$.

En particulier, faisant $\int_a^b f^2\varphi\,dx = S_2$, il vient

$$MNI \geqq S_2.$$

Appliquant à la fonction de Fourier, supposée uniformément convergente,

$$f(x) = a_1\cos(x+\alpha_1) + \ldots + a_n\cos(nx+\alpha_n) + \ldots,$$

on a, en faisant $f_1 = \cos(nx + \alpha_n)$,

$$M \geqq \frac{|a_n|}{2}, \qquad N \geqq \frac{|a_n|}{2};$$

puis

$$MN \geqq \frac{1}{2}(a_1^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots).$$

Cette dernière inégalité est-elle connue et possède-t-on des limites plus précises pour M et N? A. PELLET.

3021. [**D2b**] Un correspondant pourrait-il indiquer une méthode pour calculer l'expression

$$\frac{1}{\varphi(m+1)\varphi(m-1)} - \frac{1}{\varphi(m+2)\varphi(m-2)} + \ldots$$
$$+ \frac{(-1)^{i-1}}{\varphi(m+i)\varphi(m-i)} + \ldots,$$

qui se présente lorsqu'on applique la transformation de Graff, $y = -x^2$, à l'équation $f(x) = 0$ transcendante, $\varphi(n)$ représentant la fonction $n^{\alpha n}$ par exemple; $m$ et $i$ nombres entiers? A. PELLET.

3022. [**D2a**] Je voudrais connaître une série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

à coefficients réels et positifs, et telle que chaque équation

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0,$$
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0,$$
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

a toutes ses racines réelles.

M. PETROVITCH (Belgrade, Serbie).

# RÉPONSES.

**837.** (**1896**, 107; **1905**, 217) (E. Francken). — Selon Stolz-Gmeiner [*Theoretische Arithmetik*, p. 10 (Leipzig, Teubner, 1902)], la proposition en question est due à F.-C. Hauber (*Scholæ logico mathematicæ*, 1825, p. 291). Je ne sais pas où ce Traité a paru.

H. Wieleitner (Spire).

**853.** (**1896**, 150) (G. Eneström). — *Formule de la théorie des différences.* — D'après le *Formulario mathematico* (t. V, p. 131, prop. 4°, 1), la formule en question se rencontre dans Mercator, *Logarithmo-tecnia* (année 1668, p. 12).

G. Peano (Turin).

[Traduit de l'italien. (La Réd.)]

**1212.** (**1898**, 6) (F. Chomé). — *Collier d'une surface.* — Voir *E. M.*, 1906, p. 32-43. *E. Hicks.*

**1410.** (**1898**, 269) (Gino Loria). — Dans le Livre du Centenaire de Jacobi, publié à l'occasion du Congrès des Mathématiciens à Heidelberg en 1904, M. Léo Kœnigsberger a fait allusion (p. 6, 7, 8 et 519) à des recherches inédites de Jacobi sur la Science mathématique des Grecs. H. Brocard.

**2142.** (**1901**, 190) (E. Duporcq). — L'hyperboloïde, pour lequel la quantité $a^2+b^2-c^2$ (somme des carrés des axes) est nulle, a-t-il reçu un nom spécial? Je l'ignore; mais, si l'on tient à lui en donner un, on pourrait proposer celui de *zéroïdal.*

H. Brocard.

**2357.** (**1902**, 142) (H. Brocard). — *Le Dictionnaire des Ouvrages anonymes et pseudonymes* (4 vol.) de Barbier (Antoine-Alexandre) compte à ce jour trois éditions : 1806-1809, 1822-1827, 1872-1879, et un cinquième Volume (Supplément) a été publié en 1889 par Brunet.

Il est vivement à désirer que cette œuvre soit continuée, car le nombre d'Ouvrages anonymes et pseudonymes est plus grand qu'on ne saurait croire. Rien que pour les anonymes de la Compagnie de Jésus, le P. C. Sommervogel a publié en 1884 un répertoire de 700 pages in-8°; mais, ici ou ailleurs, il reste bien des anonymes et des pseudonymes que l'on ne pourra identifier. H. Brocard.

**2819** et **2820**. (**1904**, 213) (E.-N. Barisien). — *Quadrilatère* (**1904**, 274; **1905**, 48, 59). — Sur les propriétés du quadrangle orthogonal (quadrangle dont chaque sommet est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres) *voir* le Mémoire de M. Chr. Beyel : *LVII Sätze ü. d. Orthogonal Viereck* (35 pages avec Table) (*Z. S.*, vol. XXXIV, 1889). La relation indiquée par MM. Brocard, Hayashi et Weber est le théorème III de Beyel. Un théorème sur le quadrangle orthogonal, qui ne se trouve pas dans le Mémoire de Beyel, est donné dans *J. S.*, année 1890, p. 190.

Sur des quadrilatères particuliers *voir* aussi Möbius, *Die Kreisverwandtschaft* (p. 44, 47) et Laisant, *Th. des équipollences* (p. 86). V. Retali (Milan).

**2827**. (**1904**, 239) (E.-N. Barisien). — *Lieu de centres de cercles* (**1904**, 302; **1905**, 60, 228). — On peut déterminer le lieu des centres des cercles tangents à une courbe quelconque Γ et passant par un point fixe O. Si P est le point de contact avec Γ d'un cercle mené par O, son point diamétralement opposé Q appartient à la première podaire négative de Γ par rapport à O, car il est le point de contact de la droite PQ avec son enveloppe. Il s'ensuit que *le lieu du centre* C *du cercle et la première podaire négative indiquée sont deux courbes homothétiques,* O *étant le centre et* $\frac{1}{2}$ *le rapport d'homothétie*. En particulier, si Γ est une conique qui ne passe pas par O, le lieu demandé est la polaire réciproque de l'inverse d'une conique, savoir : *une courbe rationnelle du sixième ordre et de la quatrième classe, ayant quatre points doubles ordinaires, six rebroussements et trois tangentes doubles, qui sont : la droite à l'infini et les deux droites isotropes issues du point* O. Il est maintenant facile de voir les modifications qui sont nécessaires lorsque la conique n'est pas en situation générale par rapport au triangle isotrope OIJ; par exemple, si la conique est une parabole, le lieu se réduit à une cubique bien connue; si O est un foyer de Γ,

on obtient une courbe de quatrième ordre ayant les droites isotropes OI, OJ comme tangentes d'inflexion; si Γ est un cercle, le lieu de C se réduit à la conique dont O est un foyer et Γ le cercle directeur, etc.

Dans sa réponse M. Malo (**1904**, 304) assigne le degré *six* au lieu; dans la réponse de M. Mathieu (**1905**, 228) sont données les équations paramétriques de la sextique : d'après ce qui précède si, en prenant O pour origine des coordonnées rectangulaires, l'équation de la podaire négative est $f(x, y) = 0$, celle du lieu cherché sera $f(2x, 2y) = 0$, et nous pouvons écrire l'équation de la sextique sous forme explicite. Appelant $\Delta$ le discriminant de la conique dont l'équation peut se prendre sous la forme

$$(\Gamma) \qquad ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx = 0$$

et posant, pour abréger,

$$bx^2 + ay^2 - 2gx - 2fy - c = L,$$
$$2bgx + 2afy + (bc - f^2) + (ca - g^2) = M,$$
$$27\Delta^2(x^2 + y^2) - g\Delta LM - 2M^3 = U,$$
$$M^2 + 3\Delta L = V,$$

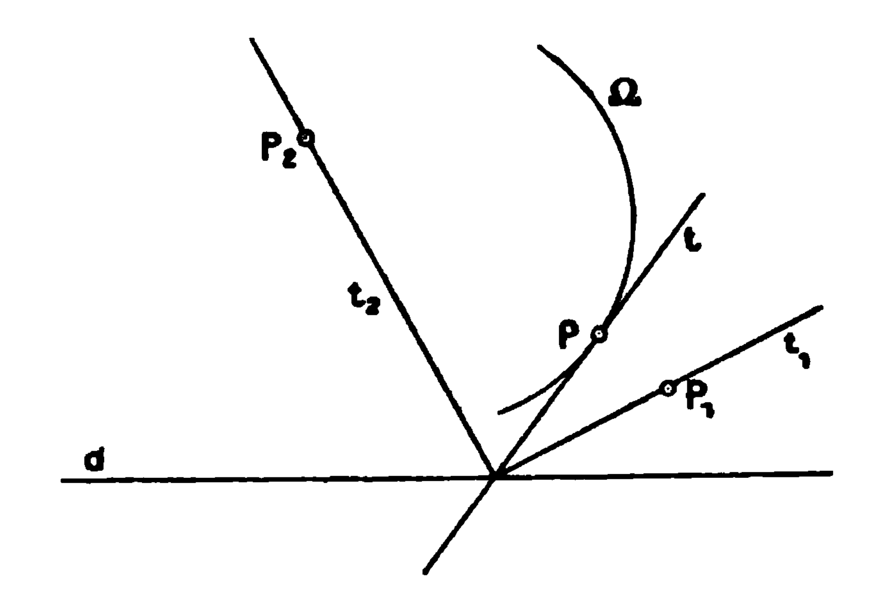
l'équation de la sextique est

$$U^2 - 4V^3 = 0.$$

Elle montre que les six rebroussements tombent sur la conique $V = 0$, théorème connu.

Passons maintenant à l'autre lieu (des centres des cercles tangents à une conique et à une droite données) qui n'est pas déterminé dans les réponses publiées de MM. Brocard, Schiappa-Monteiro et Mathieu et auquel M. Malo (*loc. cit.*) assigne le degré 6 qui, comme nous verrons, n'est pas exact. Cherchons en général le lieu des centres des cercles qui sont tangents à une courbe quelconque Ω et à une droite $d$ : soient $P_1$, $P_2$ les centres des cercles tangents à la droite fixe $d$ et qui touchent la courbe Ω en P; appelons $t$ la tangente en P et $t_1$, $t_2$ les bissectrices des angles $(d, t)$, qui passent respectivement par $P_1$ et $P_2$. On voit sans peine que le lieu des couples de points $P_1 P_2$ est en même temps l'enveloppe des droites $t_1$, $t_2$ et aussi l'enveloppe des paraboles dont les foyers tombent sur Ω et qui

ont $d$ pour directrice : il s'agit donc d'une transformation double tangentielle du deuxième ordre que j'ai considérée autrefois (*P. M. R.*, vol. XV, 1899, p. 163). A une droite $t$ du plan double correspondent les bissectrices $t_1$, $t_2$ des angles $(d, t)$; à une droite $t_1$ du plan simple (et à sa conjointe $t_2$) correspond la droite $t$ symétrique de $d$ par rapport à $t_1$ (et à $t_2$). La conique *double* et celle *limite* (faisceaux de




la deuxième classe) dégénèrent toutes les deux en les points circulaires à l'infini.

Prenant pour axes la droite $d$ et une perpendiculaire à celle-ci, les formules de la transformation sont

$$u : v : 1 = 2u'v' : v'^2 - u'^2 : 2v',$$

et les inverses [*voir* ma réponse à **2828** (**1906**, 22)]

$$u' : v' : 1 = u : v = \sqrt{u^2 + v^2} : 1.$$

Aux points (faisceaux de la première classe)

$$lu + mv + 1 = 0$$

du plan double, correspond le réseau tangentiel

$$2lu'v' + m(v'^2 - u'^2) + 2v' = 0,$$

formé par les paraboles ayant leurs foyers en ces points et $d$ pour directrice. Aux points

$$\lambda u' + \mu v' + 1 = 0$$

correspond le système

$$(\lambda u + \mu v + 1)^2 = \mu^2(u^2 + v^2)$$

formé par les cercles ayant leurs centres en ces points, et qui sont tangents à $d$.

Si $f(u, v) = 0$ est l'équation tangentielle de la courbe $\Omega$, celle du lieu $\Omega'$ des centres des cercles tangents à $d$ et à $\Omega$ sera donc, en supprimant les accents,

$$f\left(u, \frac{v^2 - u^2}{2v}\right) = 0.$$

Si, par exemple, $\Omega$ est une ellipse $a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0$, on trouve pour $\Omega'$

$$b^2(u^4 + v^4) + 2(a^2 + c^2)u^2 v^2 - 4v^2 = 0,$$

qui, dans le cas du cercle, se décompose en les deux paraboles

$$a(u^2 + v^2) \pm 2v = 0,$$

égales, avec le foyer au centre du cercle, etc.

Cherchons maintenant la classe du lieu des centres $P_1$, $P_2$ : si $\Omega$ est de l'ordre $n$ et de la classe $m$, elle a $2m$ tangentes communes avec un cercle $A^2$ tangent à $d$ et avec le centre A ; les droites qui unissent A' avec les points où ces tangentes vont couper $d$ sont les tangentes issues de A de la courbe $\Omega'$, qui est donc *de la classe* $2m$.

Pour déterminer l'ordre, cherchons les points de $\Omega'$ situés sur une droite arbitraire $s_1$. En appelant $s$ la droite symétrique à $d$ par rapport à $s_1$, il y a $4m + 4n$ cercles tangents à $\Omega$ et aux droites $d$, $s$, et, comme les centres de ces cercles tombent sur $s_1$ et sur sa droite conjointe $s_2$ [perpendiculaire au point $(s, d)$ à $s_1$], *le degré de* $\Omega$ *est* $2(n + m)$.

On voit aisément que les $n$ points où $\Omega$ coupe $d$ sont, en général, des points doubles sur $\Omega'$, et que les tangentes en ces points sont rectangulaires. A chaque contact simple de $\Omega$ avec la droite $d$ la classe de $\Omega'$ s'abaisse d'une unité, car de l'enveloppe $\Omega'$ se détache le point à l'infini de la perpendiculaire à $d$.

La courbe $\Omega'$ est tangente audit point à la droite à l'infini avec $m$ branches. Elle possède, outre ceux placés sur $d$, d'autres points doubles qui sont les centres des cercles tangents à $d$ et ayant double contact avec $\Omega$. Les rebroussements de $\Omega'$ sont les centres des cercles tangents à $d$ et osculateurs à $\Omega$.

En général, une courbe réelle de la classe $m$ a, comme on sait, $m$ et seulement $m$ foyers réels : ces points, considérés comme cercles

infiniment petits, marquent sur la droite fixe $d$, $m$ couples de points imaginaires conjugués qui sont les autres intersections de $\Omega$ avec $d$. Evidemment, si des foyers réels de $\Omega$ tombent sur $d$, ils sont pour $\Omega'$ des points doubles additionnels.

Lorsque $\Omega$ est une conique centrale qui ne touche pas $d$, le lieu demandé est donc *une courbe de la quatrième classe, de huitième ordre et de genre* UN. *Elle a deux points doubles sur la droite* $d$, *un tacnode, au point à l'infini d'une normale à* $d$, *avec la droite à l'infini pour tangente; quatre autres points doubles et douze rebroussements.* En d'autres termes, $\Omega'$ *est la polaire réciproque d'une quartique ayant un tacnode.* Elle n'a donc pas de points d'inflexion ni des tangentes doubles proprement dites. C'est l'existence de la singularité à l'infini qui fait tomber en défaut le procédé suivi par M. Malo, dans la détermination du degré de $\Omega'$; car il cherche les points du lieu sur les droites issues du tacnode.

V. Retali (Milan).

**2867.** (**1905**, 9) (V. Aubry). — (**1905**, 142). — Le planimètre Prytz ou *Stangplanimeter* (planimètre hachette) a été décrit dans la *Revue du Génie militaire* (t. IX, p. 366, 1<sup>er</sup> sem. 1895; t. X, p. 446, 2<sup>e</sup> sem. 1895; t. XI, p. 353, 1<sup>er</sup> sem. 1896).

H. Brocard.

**2905.** (**1905**, 76) (*Crut*). — Réponse affirmative. — *Voir* les questions et réponses **1217** (**1898**, 27; **1899**, 40); **1724** (**1900**, 7, 263, 371); **2115** (**1901**, 158; **1902**, 29); **2702** (**1904**, 2, 105).

Le problème ne peut d'ailleurs se résoudre par la règle et le compas.

H. Brocard.

**2912.** (**1905**, 105) (E. Remy). — Peut-être conviendra-t-il de signaler un Mémoire antérieur à celui de M. Densy, et intitulé : *Études sur les mouvements généraux de l'atmosphère,* par M. Sorel (*A. E. N.*, t. IV, 1868).

H. Brocard.

**2930.** (**1905**, 145) (J.-E. Estienne). — *Tétraèdres symétriques.* — La difficulté signalée dans cette question n'est qu'apparente, et tient à un dénombrement incomplet des conditions simples qu'impose aux éléments de la figure la condition globale d'égalité des triangles.

Désignons, en général, par (MN) le plan perpendiculaire au segment qui joint deux points M et N, et en son milieu.

De simples considérations cinématiques montrent que, si deux triangles ABC et A′B′C′ de l'espace sont égaux, ou bien : *a*, les trois plans (AA′), (BB′), (CC′) passeront par une même droite; ou bien : *b*, les trois plans de chacun des six systèmes

$$[(AA'), (BB'), (CC'_1)], \quad [(AA'), (BB'), (C_1C')], \quad \ldots$$

passeront par une même droite, différente en général pour chaque système; la notation $C_1$ désignant le point symétrique du point C par rapport au plan OAB, O étant le point d'intersection des trois plans (AA′), (BB′), (CC′). Dans le premier cas, les deux tétraèdres considérés sont égaux; dans le second, ils sont symétriques. Il semble donc qu'en général ils soient *égaux*, auquel cas une seule condition leur est imposée, et *non symétriques*, ce qui paraît exiger six conditions.

En réalité, cette conclusion serait tout aussi inexacte que celle formulée dans la question envisagée; car l'on peut aisément établir que la réalisation de l'une quelconque des conditions (*b*) entraîne celle des cinq autres. Il reste à démontrer l'équivalence des ordres des conditions (*a*) et (*b*).

Supposons que les trois plans (AA′), (BB′) et (CC′) se coupent à distance finie en un point O que nous prendrons pour origine d'un système trirectangulaire de coordonnées (le cas où O serait à l'infini s'étudierait directement sans difficulté).

Soient $(x_1y_1z_1)$, ..., $(x'_1y'_1z'_1)$, ... les coordonnées des points A, ..., A′, .... Posons, pour abréger l'écriture,

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2 = R_1, \qquad (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2 = D_1,$$

$$x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3 = S_1,$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \Delta.$$

Les seules conditions imposées aux coordonnées qui déterminent les points A, B, C, A′, B′, C′ se traduisent par les trois équations

$$D_1 = D'_1, \qquad D_2 = D'_2, \qquad D_3 = D'_3,$$

équivalentes, en raison du choix de l'origine O, aux six équations

$$(\alpha) \qquad R_1 = R'_1, \qquad R_2 = R'_2, \qquad R_3 = R'_3,$$

$$(\beta) \qquad S_1 = S'_1, \qquad S_2 = S'_2, \qquad S_3 = S'_3.$$

L'une quelconque des équations ($\alpha$) peut être remplacée par la suivante :

$$(\gamma) \qquad R_1 R_2 R_3 = R'_1 R'_2 R'_3$$

(sauf si les deux triangles avaient deux sommets correspondants en coïncidence, auquel cas les tétraèdres n'existeraient plus).

Or, on a identiquement, avec les définitions adoptées,

$$(\delta) \qquad R_1 R_2 R_3 = R_1 S_1^2 + R_2 S_2^2 + R_3 S_3^2 - 2 S_1 S_2 S_3 + \Delta^2.$$

Donc l'équation ($\gamma$) peut, en vertu des conditions ($\alpha$) et ($\beta$), être remplacée par la suivante :

$$\Delta^2 = \Delta'^2,$$

qui se décompose en $\Delta = \Delta'$ et en $\Delta = -\Delta'$, équations qui traduisent respectivement les propriétés ($a$) et ($b$) énumérées plus haut.

La démonstration de l'équivalence des conditions $\Delta = \Delta'$ et ($a$) d'une part et $\Delta = -\Delta'$ et ($b$) d'autre part résulte de l'interprétation géométrique des équations. Analytiquement, elle paraît exiger des transformations assez laborieuses, même en employant les formules d'Euler ou d'Olinde Rodrigues. Nous ajouterons qu'elle ne présente aucune difficulté si l'on utilise l'algorithme des quaternions qui nous a fourni l'identité ($\delta$). J. Raibaud.

Autre réponse de M. Wanda Guglielma Bruschi (Rome).

**2943.** (**1905**, 171) (Fitz-Patrick). — *Sur les Œuvres de Viète* (**1905**, 286). — Aux écrits de M. Ritter mentionnés (*loc. cit.*) on pourra ajouter :

B. Fillon et F. Ritter. — Notice sur la vie et les Ouvrages de François Viète. Nantes, 1850.

F. Ritter. — Sur quelques inventions mathématiques de F. Viète (*A. F.*, Montpellier, 1879, p. 143-149). H. Brocard.

Si je ne me trompe, la collection complète de tous les Mémoires, tant manuscrits que déjà imprimés, de M. Ritter sur Viète a été donnée par M. Ritter ou par sa famille à l'Académie des Sciences de Paris, il y a, me semble-t-il, moins de dix ans. M. Fitz-Patrick pourra s'adresser au Bibliothécaire de l'Académie pour en avoir Communication. *Belga.*

**2945.** (**1905**, 172) (FITZ-PATRICK). — *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (**1905**, 287). — Cet Ouvrage n'a pas été mis dans le commerce et ne se trouve indiqué sur aucun catalogue de librairie, mais il est inscrit au Catalogue des imprimés de la Bibliothèque Nationale, 8°Q 3097. H. BROCARD.

Autre réponse de M. N. PLAKHOWO.

**2947.** (**1905**, 172) (T. HAYASHI). — *Bibliographie des courbes de poursuite.* — Une partie de la réponse **2205** (**1904**, 217) peut déjà s'appliquer à la question **2947**.

Pour d'autres courbes de poursuite, *voir* aussi questions **65** (**1894**, 24 et 111-112) et **845** (**1896**, 128; **1897**, 22).

Le Chapitre II des *Études cinématiques* de M. E.-J. Habich (1879, p. 31-56) est consacré à la *Courbe de poursuite* (avec indications bibliographiques). H. BROCARD.

**2948.** (**1905**, 172) (A. GRÉVY). — *Vie de Gaspard Monge.* — Pour la biographie et l'œuvre scientifique de Gaspard Monge, il conviendra de grouper et de fusionner les indications puisées à différentes sources parmi lesquelles les suivantes, où l'on trouvera de très intéressantes informations :

*Dictionnaire chronologique et raisonné des découvertes, etc. en France, de* 1789 *à la fin de* 1820 (Paris, L. Colas, éditeur, 16 Volumes).

*Voir* les articles :

Aiguille aimantée (t. I, p. 217); Air (t. I, p. 220); Courbes du second degré (t. IV, p. 153); Feutrage (t. VII, p. 97); Fontaine de Moïse (t. VII, p. 277); Frimas (t. VII, p. 496); Géométrie (t. VIII, p. 258); Géométrie descriptive (t. VIII, p. 251); Grêle (t. VIII, p. 447); Météorologie (t. XI, p. 363); Mirage (t. XI, p. 444); Neige (t. XII, p. 134); Pluie (t. XIII, p. 522); Tonnerre (t. XVI, p. 166); Trombes (t. XVI, p. 239); Vents (t. XVI, p. 461).

G. MONGE. — Leçons aux Écoles normales (*voir* aussi HACHETTE : Correspondance sur l'École Polytechnique).

M. CHASLES. — Aperçu historique, etc., 1837.

DUPIN AÎNÉ. — Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Monge. Paris, 1819.

BRISSON (neveu de Monge). — Notice. Paris, 1819.

J. Pautet. — Éloge de Monge. Beaune, 1838. Résumé dans le *Dictionn. de la Conversation,* de Belin-Mandar, 1837, p. 359-367.

A. Fourcy. — Histoire de l'École Polytechnique. Paris, 1828.

F. Arago. — Notices biographiques (t. II).

Ch. Dupin. — Éloge de Monge. Paris, 1849.

*Biographie* Didot et Hœfer. — Article de Pongerville, de l'Académie française.

M. Chasles. — Rapport sur les progrès de la Géométrie (en particulier p. 2, 10, 19, 29, 37, 66, 70, 90, 154, 161, 179, 210). Paris, 1870.

Th. Olivier. — Monge et l'École Polytechnique (*Revue scient. et industr. du D^r^ Quesneville,* février 1850, 5 pages).

P. Tannery. — Article dans la *Grande Encyclopédie.*

A. Rebière. — Pages choisies des savants modernes.

G. Darboux. — Conférence de Saint-Louis, 1904.

*Magasin pittoresque* (où a été récemment publiée une description de la maison natale de Monge, à Beaune). Les Volumes antérieurs de la collection renferment son portrait, sa biographie et diverses Notes scientifiques (t. I, 1833; t. III, 1835; t. XI, 1843; t. XLVI, 1878).

*Œuvres de V. Cousin* (Paris, Pagnerre, 1849, t. III, p. 1-101). Éloge et biographie de Fourier (qui fut l'associé de Monge à l'Institut d'Égypte).

Le Livre du *Centenaire de l'École Polytechnique* (1794-1894). Paris, Gauthier-Villars, 1894, 3 vol. grand in-8°.

Pour l'action politique de Monge, on consultera avec utilité la *Réimpression de l'ancien Moniteur* (Paris, Plon, 1860), notamment les Volumes XIII à XVI, XIX, XX, XXII, XXVIII et XXIX.

H. Brocard.

On trouve des renseignements sur la vie de Gaspard Monge dans l'*Histoire des Mathématiques* de M. Boyer et dans les *Savants modernes* de M. Rebière, ainsi que dans les *Pages choisies des Savants modernes,* du même; dans le premier Livre il y a quelques renseignements sur sa carrière politique, dans le second sur ses travaux scientifiques et, dans le troisième, des fragments de sa Géométrie descriptive, des applications de l'Analyse à la Géométrie et de sa Météorologie de l'Égypte.

N. Plakhowo (Tambow, Russie).

2958. (1905, 222) (G. LEMAIRE). — Je crois devoir donner les indications suivantes :

HATT. — Des coordonnées rectangulaires (*C. R.*, t. CXIV, 1892, p. 1248-1250).

HATT. — Application d'un système conventionnel de coordonnées rectangulaires à la triangulation des côtes de Corse (*C. R.*, t. CXV, 1892, p. 459-461).

HATT. — Des coordonnées rectangulaires et de leur emploi dans les calculs de triangulation. Paris, 1893 (n° 746 du *Service hydrographique de la Marine*).

H. BROCARD.

Autre réponse de M. PH. HATT transmise à M. G. Lemaire.

2961. (1905, 242) (MATHIEU). — *Coniques bitangentes à deux cercles fixes, de façon que chacun des axes passe par un des centres des deux cercles.* — Il y a deux groupes de coniques répondant à la question. C'est dans un même groupe que toutes les coniques sont semblables entre elles et que les cordes de contact sont concourantes.

Pour la démonstration, *voir* l'ancien *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps, année 1897 (p. 169).

A. TISSOT.

On sait démontrer géométriquement que le point de rencontre des cordes de contact a même polaire par rapport à chacun des cercles, *c'est alors un point fixe de la ligne des centres des cercles.*

Le rapport des distances de ce point aux centres des cercles est donc constant, et, comme il est égal au rapport des segments déterminés par les axes de la conique sur une normale de cette courbe, celui-ci est constant.

Par suite aussi le rapport des axes de la conique, quelle que soit cette courbe : donc *les coniques sont semblables.*

*Canon.*

En général les coniques bitangentes à deux coniques données $A^2$, $B^2$ forment trois systèmes, que nous dénoterons par (X), (Y), (Z), correspondant aux trois sommets X, Y, Z du triangle polaire commun de $A^2$, $B^2$. Si R, S, T, U sont les quatre points communs et $a \equiv RS$, $a' \equiv UT$ les cordes communes qui se coupent en X, les

cordes de contact avec $A^2$ et $B^2$ des coniques du système (X) passent par X et sont conjuguées harmoniques par rapport à $a$, $a'$. Réciproquement, si l'on mène par X deux droites arbitraires $g$, $h$, conjuguées harmoniques par rapport à $a$, $a'$, qui coupent respectivement $A^2$, $B^2$, aux points $PP_1$, $QQ_1$, et $B^2$, $A^2$, aux points $Q'Q'_1$, $P'P'_1$, il y a dans le système (X) une conique qui touche $A^2$ en $PP_1$ et $B^2$ en $QQ_1$, et une autre qui touche $A^2$ et $B^2$ respectivement en $P'P'_1$ et $Q'Q'_1$. Pour chacun des deux autres systèmes, la propriété analogue a naturellement lieu. Cela posé, si $A^2$ et $B^2$ sont des cercles et, par exemple, U, T sont les points circulaires à l'infini, par l'un des trois systèmes de coniques bitangentes, savoir pour (X), les cordes de contact sont parallèles à l'axe radical, etc.; mais, pour chacun des deux autres, les cordes de contact, étant séparées harmoniquement par UT, sont perpendiculaires entre elles. Par exemple, dans le système (Y), les deux cordes de contact de chaque conique passent par Y et sont conjuguées harmoniques à YU, YT. Réciproquement, deux droites perpendiculaires, menées par Y, sont des cordes de contact de deux coniques bitangentes aux deux cercles, même chose advient pour le système (Z). Il s'ensuit que, lorsqu'une conique variable est bitangente à deux cercles de façon que chacun de ses axes passe par un des centres des deux cercles, les cordes de contact passent *par l'un ou l'autre de deux points fixes,* c'est-à-dire par les deux points Y, Z de la ligne des centres, conjugués par rapport aux deux cercles. On obtient ainsi ensemble les deux systèmes (Y) et (Z); pour les coniques d'un même système, par exemple de (Y), les cordes de contact passent par Y, etc.

Aussi l'autre énoncé : *la conique reste semblable à elle-même,* doit être un peu modifié, car *seulement les coniques d'un même système* (Y) *ou* (Z) *sont semblables entre elles.* Le théorème appartient à Steiner qui l'a énoncé, sans démonstration, avec beaucoup d'autres concernant les coniques bitangentes à deux cercles, dans son Mémoire : *Ueber einige neue Bestimmungs-Arten der Curven* 2. O. *u, s, w* (*Crell's Journal,* t. 45, mars 1852). On peut le démontrer de la façon suivante :

Considérons une conique quelconque $K^2$ du système (Y) ayant double contact avec les cercles $A^2$ et $B^2$ respectivement sur les cordes $PP_1$ et $QQ_1$, perpendiculaires entre elles et menées par Y; évidemment les axes de $K^2$ passent respectivement par les centres A et B des cercles; appelons $\alpha$ et $\beta$ les longueurs des axes de $K^2$ qui

passent respectivement par A et B, et soient $r$, $r'$ les rayons de $A^2$, $B^2$; nous avons

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{YQ.YQ_1}{YP.YP_1} = \frac{\overline{BY}^2 - r'^2}{\overline{AY}^2 - r^2},$$

et, comme les points YZ sont réciproques par rapport aux deux cercles,

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\overline{BY}^2 - BY.BZ}{\overline{AY}^2 - AY.AZ} = \frac{BY}{AY}.$$

Donc, pour chaque conique du système (Y),

$$\alpha^2 : \beta^2 = BY : AY,$$

et de même les coniques du système (Z) sont semblables entre elles, mais pour elles

$$\alpha_1^2 : \beta_1^2 = BZ : AZ.$$

V. Retali (Milan).

Le point P d'intersection des cordes de contact a même polaire par rapport à la conique variable et à chacun des deux cercles.

C'est donc l'un des deux points de Poncelet des deux cercles; il est fixe sur la ligne des centres.

Soient O le centre du cercle situé sur l'axe non focal, O′ le centre de l'autre cercle, sur l'axe focal.

Soit T l'un des points de contact avec le cercle O. La corde des contacts avec ce cercle est PT parallèle à l'axe focal.

La normale OT rencontre l'axe focal en N.

Soit $e$ l'excentricité de la conique

$$e^2 = \frac{ON}{OT} = \frac{OO'}{OP} = \text{const}.$$

Donc $e$ = const. et la conique reste semblable à elle-même.

C. Q. F. D.

On peut ajouter que chacune des droites liées à la conique passe par un point fixe ou enveloppe un cercle fixe; chacun des points liés à la conique décrit un cercle ou une conchoïde de cercle.

Il est possible d'établir également la proposition en considérant la conique variable comme la projection du contour apparent d'une quadrique variable passant par deux coniques fixes. Cette solution est plus pénible que la précédente. L. Bickart.

Voici la démonstration géométrique demandée, divisée en trois parties :

I. *Les deux cordes de contact se coupent toujours sur la droite des centres.* — Soient OX, OY (*fig.* 1) les axes de symétrie d'une

Fig. 1.

quelconque $\varepsilon$ des coniques. Soient $AP_1$ et $AP_2$ les normales à $\varepsilon$ aux points quelconques $P_1$, $P_2$, dont la première coupe OX en $M_1$, la seconde OY en $M_2$ : alors $M_1$ et $M_2$ désigneront les centres et $M_1P_1$ et $M_2P_2$ les rayons $\rho_1$ et $\rho_2$ des cercles donnés.

Considérons l'hexagone $X^\infty O Y^\infty P_1 A P_2$, où $X^\infty$, $Y^\infty$ représentent les points à l'infini des axes. Cet hexagone étant inscrit dans l'hyperbole d'Apollonius de $\varepsilon$ par rapport au point A, les trois points d'intersection $M_1$, $M_2$, P des couples de côtés opposés sont en ligne droite.

Le point P étant le point d'intersection des deux cordes de contact, la première partie est démontrée.

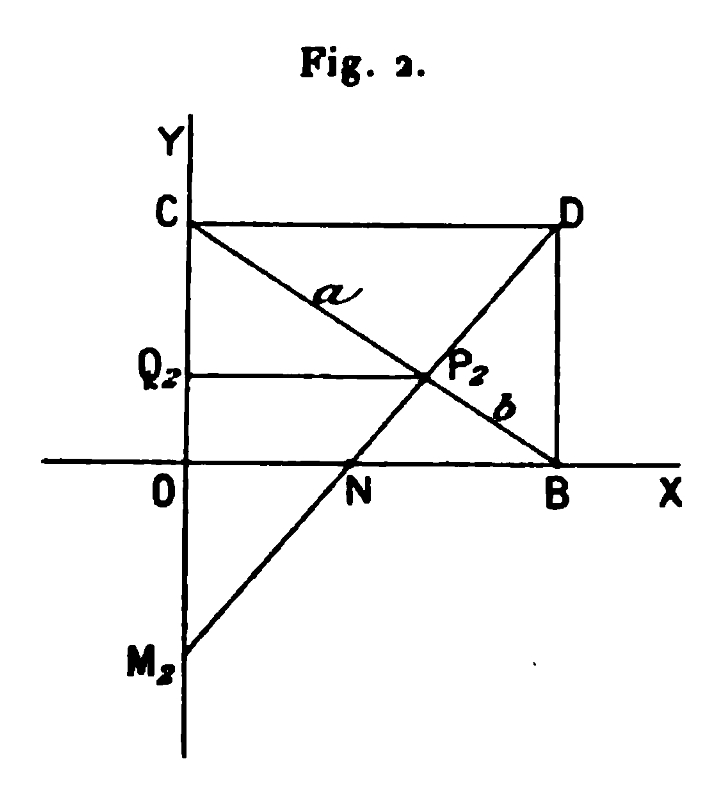
II. *Le point d'intersection des cordes de contact divise la distance des centres dans la raison des carrés des axes de la conique.* — Si $a$ et $b$ sont les axes de la conique on trouve

$$\frac{PM_1}{PM_2} = \pm \frac{b^2}{a^2},$$

où le signe + s'applique à l'ellipse, le signe — à l'hyperbole. Nous considérons ces deux cas l'un après l'autre.

*Ellipse.* — Considérons l'ellipse comme le lieu d'un point déterminé $P_2$ (*fig.* 2) d'un segment de droite BC de longueur donnée

Fig. 2.




dont les extrémités glissent le long des axes OX, OY. Alors on a pour la normale $DP_2$ en $P_2$

$$\frac{P_2N}{P_2M_2} = \frac{Q_2P_2 - ON}{Q_2P_2}.$$

Mais

$$\frac{Q_2P_2}{OB} = \frac{a}{a+b},$$

$$\frac{ON}{OB} = 1 - \frac{NB}{CD} = 1 - \frac{b}{a}.$$

Donc

$$\frac{P_2N}{P_2M_2} = \frac{\frac{a}{a+b} - \frac{a-b}{a}}{\frac{a}{a+b}} = \frac{b^2}{a^2},$$

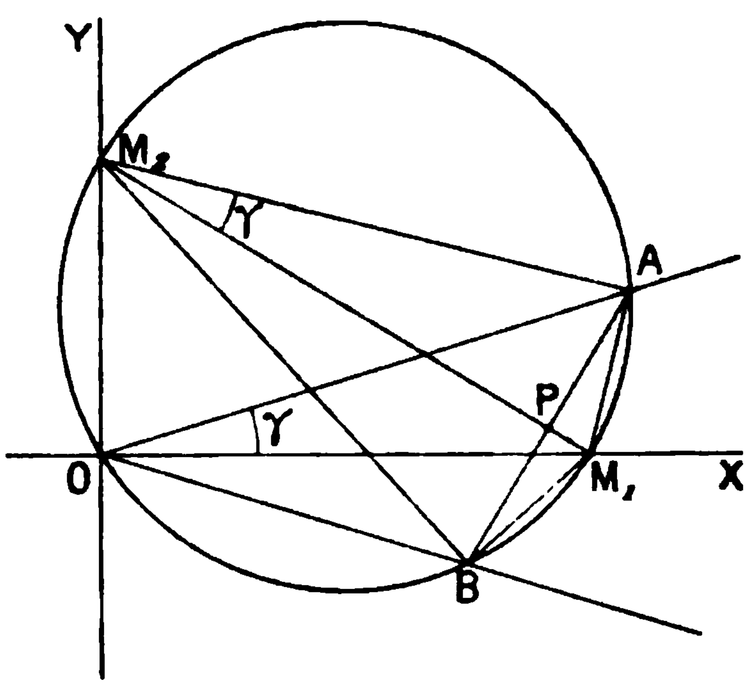
et enfin (*fig.* 1)

$$\frac{P_2N}{P_2M_2} = \frac{PM_1}{PM_2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

*Hyperbole.* — Considérons l'hyperbole (*fig.* 3) comme le lieu du milieu du segment de droite AB compris entre les asymptotes et formant avec O un triangle OAB d'aire constante. Alors le cercle cir-

conscrit à OAB marque sur les axes OX, OY les points $M_1$, $M_2$

Fig. 3.




correspondants. Donc on a dans le triangle rectangulaire $AM_1M_2$

$$-\frac{PM_1}{PM_2}=\frac{\overline{AM}_1^2}{\overline{AM}_2^2}=\operatorname{tang}^2\gamma=\frac{b^2}{a^2}.$$

III. *Le quotient des axes s'exprime dans les trois données linéaires du problème, les rayons des cercles et la distance de leurs centres.* — Si $P_1P'_1$ et $P_2P'_2$ sont les cordes de contact, on a d'après une propriété connue, en faisant attention aux signes,

$$\frac{P_1P.PP'_1}{P_2P.PP'_2}=\pm\frac{b^2}{a^2},$$

où le signe + se rapporte à l'ellipse, le signe — à l'hyperbole.

D'un autre côté les cercles donnent

$$P_1P.PP'_1=\rho_1^2-\overline{M_1P}^2,\qquad P_2P.PP'_2=\rho_2^2-\overline{M_2P}^2.$$

Donc

$$\frac{\rho_1^2-\overline{M_1P}^2}{\rho_2^2-\overline{M_2P}^2}=\pm\frac{b^2}{a^2}.$$

Exprimons $M_1P$, $M_2P$ en $M_2M_1=d$ à l'aide des relations

$$\pm\frac{M_1P}{b^2}=\frac{M_2P}{a^2}=\frac{M_2M_1}{c^2},$$

où $c^2=a^2-b^2$ pour l'ellipse et $c^2=a^2+b^2$ pour l'hyperbole.

Alors on trouve

$$\frac{c^4\rho_1^2 - b^4 d^2}{c^4\rho_2^2 - a^4 d^2} = \pm \frac{b^2}{a^2};$$

donc pour l'ellipse et l'hyperbole

$$(a^2 \mp b^2)(a^2\rho_1^2 \mp b^2\rho_2^2) = \mp a^2 b^2 d^2,$$

les signes supérieurs se rapportant à l'ellipse, les signes inférieurs à l'hyperbole. Comme il faut, ces deux équations se confondent en

$$(a^2 - b^2)(a^2\rho_1^2 - b^2\rho_2^2) = - a^2 b^2 d^2,$$

en considérant $a^2$ et $-b^2$ comme les carrés des demi-axes de l'hyperbole. Cette équation quadratique en $\frac{b^2}{a^2} = \lambda$ donne

$$\lambda = \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2 - d^2 \pm \sqrt{(\rho_1^2 + \rho_2^2 - d^2)^2 - 4\rho_1^2\rho_2^2}}{2\rho_2^2}.$$

Donc il y a *deux* séries de coniques semblables; chacune desquelles satisfait aux conditions du problème. Ainsi pour

$$\rho_1 = 1, \qquad \rho_2 = b, \qquad d = 2\sqrt{b},$$

où le cercle à centre $M_1$ se trouve à l'intérieur du cercle à centre $M_2$, on trouve deux séries d'ellipses pour lesquelles

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{9}.$$

Dans ce sens, l'énoncé du problème exige une petite rectification. Il y a deux séries de coniques semblables, chacune desquelles exige son point d'intersection propre des cordes de contact. Ces séries sont des ellipses, si l'un des cercles est à l'intérieur de l'autre, et des hyperboles, si chacun des cercles est à l'extérieur de l'autre. Si les cercles se coupent, les séries sont imaginaires, comme il faut. En représentant, dans le triangle aux trois côtés $\rho_1$, $\rho_2$, $d$, l'angle opposé à $d$ par $\varphi$, on trouve

$$\lambda = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos\varphi \pm i \sin\varphi).$$

P.-H. SCHOUTE (Groningue).

Autre réponse de M. *E.-A. Majol* transmise à M. Mathieu.

**2962.** (**1905**, 242) (G. Lemaire). — Des relations simples et symétriques, du genre de celles de la question, ont été certainement rencontrées par des chercheurs isolés, ne connaissant pas ou ne pouvant connaître tous les travaux publiés. M. G. Dostor, par exemple, a indiqué la première formule (*N. A.*, 1879), mais Ed. Lucas en avait exposé l'invention dès 1873 et peut-être même antérieurement.

Voici, d'après M. C. Henry, une esquisse bibliographique du sujet (avec différentes additions) :

C.-G.-J. Jacobi. — *Briefw. zw. C.-F. Gauss und H.-C. Schumacher*, p. 299. Altona, 1863.

E. Lucas. — Note sur les sommes des puissances semblables des *n* premiers nombres entiers (*N. A.*, 1870, p. 49-53).

E. Amigues. — Note sur les sommes des puissances semblables des *n* premiers nombres entiers (*N. A.*, 1871, p. 79-82).

E. Amigues. — Note sur un procédé nouveau pour trouver les cubes de certaines sommes (*N. A.*, 1871, p. 117-122).

E. Lucas. — *Recherches sur l'Analyse indéterminée et l'Arithmétique de Diophante*, p. 79-88. Moulins, 1873.

G. Dostor. — Méthode directe pour calculer la somme des puissances $\alpha$ des *n* premiers nombres entiers (*N. A.*, 1879, p. 459-454, 513-518).

C. Henry. — Remarque sur un article des *Nouvelles Annales* (il s'agit de la Note de M. Dostor) (*N. A.*, 1880, p. 454-455).

Dans le même ordre d'idées, on remarque d'autres propriétés importantes, signalées par Stern (*N. C.*, 1879, question **488**), Radicke (*N. C.*, 1880, question **558**), Cesàro (*N. C.*, 1880, question **578**).

*Voir* aussi *Mathesis*, 1894, question **908**.

Des recherches tout à fait analogues ont été exposées ici en réponse à la question **28** (**1894**, 8). *Voir* **1894**, 29, 121, 136, 159 et 239.

*Voir* aussi *Mathesis*, 1894 : E. Barbette (p. 105-110 et 142-144) et E. Gelin (p. 220-222).

La formule $s_5 + s_7 = 2s_3^2$ a été indiquée par Ed. Lucas (*Théorie des nombres*).

H. Brocard.

# QUESTIONS.

**854. [V7]** (**1896**, 150) On sait que la formule donnant l'aire d'un triangle sphérique

$$\frac{\pi r^2}{180^\circ}(A + B + C - 180^\circ)$$

(où A, B, C sont les angles du triangle et $r$ le rayon de la sphère) a été signalée pour la première fois par Girard et Cavalieri. On demande si quelque géomètre antérieur a essayé de déterminer l'aire dont il vient d'être parlé, et, en cas d'affirmation, quel a été le résultat de ces tentatives?

G. Eneström (Stockholm).

**855. [V5b]** (**1896**, 150) Le manuscrit Cod. Reg. Succ., n° **1452** de la « Biblioteca Vaticana », à Rome, contient une *Tabula magistri Petri Philomene de Dacia ad inveniendum propositionem cujusvis numeri,* où tous les produits depuis 1.1 jusqu'à 49.49 sont calculés et exprimés en nombres du système sexagésimal.

On demande s'il existe des Tables de produits encore plus étendues, calculées au moyen âge.

G. Eneström (Stockholm).

**856. [D]** (**1896**, 151) Dans une Note « sur le calcul fonctionnel », insérée à la suite de sa « Monographie de la fonction gamma », M. Brunel indique qu'il espère avoir l'occasion de montrer dans un travail ultérieur l'importance du calcul fonctionnel en Géométrie, en Physique mathématique et en Physique moléculaire. Le travail annoncé par M. Brunel a-t-il été publié?

A défaut de cette publication, où pourrait-on trouver des renseignements bibliographiques suffisamment complets sur les applications du calcul fonctionnel? E. LERY.

---

3023. [Q1d] (1) Des expressions

$$f(z) = u + iv, \qquad z = x + iy, \qquad a = \alpha + i\beta$$

on peut déduire l'identité

$$\int_C \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_C (\mathfrak{u}\, dx - \mathfrak{v}\, dy) + i \int_C (\mathfrak{v}\, dx + \mathfrak{u}\, dy),$$

dans laquelle $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}$ désignent (tout comme $u$ et $v$) des fonctions réelles de $x$ et $y$.

Cela étant, introduisons les deux *pseudo-surfaces* réelles

$$d\zeta_1 = \mathfrak{u}\, dx - \mathfrak{v}\, dy,$$
$$d\zeta_2 = \mathfrak{v}\, dx + \mathfrak{u}\, dy.$$

---

(1) Je crois utile de rappeler la définition suivante des pseudo-surfaces : on sait qu'une surface peut être délinie par les équations différentielles

(1) $dx = P\, du + Q\, du', \quad dy = P'\, du + Q'\, du', \quad dz = P''\, du + Q''\, du',$

où P, Q, P', Q', P'', Q'' sont deux à deux les dérivées partielles de fonctions $f$, $f_1$, $f_2$ de $u$ et $u'$, en faisant

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{pour} \quad u = u_0, \quad u' = u'_0.$$

Dans le cas où P, Q, P', Q', P'', Q'' sont des fonctions quelconques de $u$ et $u'$, M. l'abbé Issaly dit que les équations (1) définissent une *pseudo-surface;* on obtient une *néosurface* quand P, Q, P', Q', P'', Q'' satisfont à une certaine équation aux dérivées partielles (*comp.* ISSALY, *La Géométrie non euclidienne et l'insuffisance de ses principes,* Paris, Hermann, 1902).

C'est l'étude de l'extension des propriétés des surfaces définies par (1) qui fait l'objet d'une partie des travaux de M. Issaly.

Quand on pose $u' = \varphi(u)$, où $\varphi$ est une fonction donnée, on obtient par les équations (1) une courbe dépendant de $\varphi$ : l'ensemble de ces courbes constitue la pseudo-surface.

On pourra encore consulter à ce sujet (Paris, Hermann) : *Principes fondamentaux de la Théorie des pseudo-surfaces,* 1902; *La Cinématique dans ses rapports absolus avec les pseudo-surfaces et conditionnels avec les surfaces,* 1905; *Les pseudo-surfaces appliquées à la généralisation ou à l'amendement de diverses théories classiques issues du Calcul infinitésimal,* 1906. E. MAILLET.

Il viendra, d'après une formule connue, due à Cauchy,

$$f(a) = A + Bi = \frac{1}{2\pi i}\int_C (d\zeta_1 + i\,d\zeta_2);$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_C d\zeta_2, \qquad B = -\frac{1}{2\pi}\int_C d\zeta_1,$$

résultat fort simple assurément et dont nous proposons l'interprétation (si possible) en dehors de toute considération de pseudo-surface. ISSALY.

**3024.** [**Q1d**] A l'intégrale $\int_C \varphi(x,y)\,dx$, associée au contour arbitraire d'équation $y = f(x)$, ne serait-il pas plus naturel et plus rigoureux surtout de substituer simplement la pseudo-surface

$$dz = \varphi(x,y)\,dx,$$

cas particulier de la suivante :

$$dz = \varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy,$$

dont les propriétés principales ont déjà été signalées dans ce Recueil (**1904**, 36)? ISSALY.

**3025.** [**R2cα**] La droite, dans le plan d'un triangle, telle que la somme des carrés des distances aux trois sommets soit minimum, est évidemment le grand axe de l'ellipse centrale d'inertie (dans le plan du triangle) du système formé par les trois sommets, supposés de même masse. Elle passe donc par le centre de gravité.

A-t-on déjà étudié cette droite remarquable?

En connaît-on une définition géométrique permettant de la trouver?

Passe-t-elle, par exemple, par quelque point remarquable connu?

Il est clair que la droite perpendiculaire, passant par le centre de gravité, est, de toutes celles passant par ce point, celle pour laquelle la somme des carrés des distances aux trois sommets est maximum. *Alauda.*

3026. **[V9]** Quelque Correspondant pourrait-il donner des renseignements sur la vie et les Ouvrages de Labatie, dont les recherches sur l'élimination ont eu l'honneur d'être mentionnées par J.-A. Serret dans son *Algèbre supérieure?*

GINO LORIA (Gènes).

3027. **[V6]** La quadrature du cercle du célèbre Joseph Scaliger fut réfutée dans un petit écrit intitulé :

« Réfutation de quelques propositions du Livre de Monsieur de l'Escale, de la Quadrature du cercle, par luy intitulé : *Cyclometrica Elementa*. Au Roy. Par J. Errard de Bar-le-Duc, Ingénieur de Sa Majesté. Paris, Guillaume Auray, rue S[t]-Jean-de-Beauvais, au Bellérophon couronné, 1594. »

Ce Volume, devenu très rare, n'est jamais cité que par les extraits qu'Adrien Romain en reproduit, dans son *Archimède*. (Wurzbourg, 1597.)

Peut-on me faire connaître l'une ou l'autre Bibliothèque possédant l'Ouvrage d'Errard de Bar-le-Duc?

H. BOSMANS (Bruxelles).

3028. **[V6]** Des renseignements un peu diffus et manquant de précision me font croire que la vie et les travaux d'Errard de Bar-le-Duc ont donné lieu à une monographie éditée dans les publications d'une société locale. Je désirerais une indication exacte à ce sujet. Je voudrais savoir notamment si la monographie dont il s'agit a été tirée à part et existe dans le commerce.

H. BOSMANS (Bruxelles).

3029. **[D2b]** Démontrer par des considérations de *géométrie élémentaire* la formule bien connue

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^p}{2p+1} + \ldots$$

T. LEMOYNE.

**3030.** **[$M^{1}5c\beta$]** On sait que l'aire comprise entre la cissoïde de Dioclès et son asymptote est égale à trois fois celle du cercle générateur. On en demande une démonstration *géométrique*. T. LEMOYNE.

**3031.** **[A1]** 1° Peut-on mettre sous une forme simple l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
S_n(A, N) = {} & (n-1)(2n-1)(3n-1)\ldots(kn-1)A^k \\
& + k(2n-1)(3n-1)\ldots(kn-1)(kn+1)A^{k-1}N \\
& + \frac{k(k-1)}{1.2}(3n-1)(4n-1)\ldots \\
& \quad \times (kn-1)(kn+1)[(k-1)n+1]A^{k-2}N^2 \\
& + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}(4n-1)\ldots \\
& \quad \times (kn-1)(kn+1)[(k-1)n+1][(k-2)n+1]A^{k-3}N^3 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + k(kn-1)(kn+1)[(k-1)n+1]\ldots(2n+1)AN^{k-1} \\
& + (kn+1)[(k-1)n+1]\ldots(2n+1)(n+1)N^k.
\end{aligned}$$

2° Prouver que la somme des coefficients est égale à

$$\frac{(2k)!}{k!}n^k.$$

3° Prouver que, quand $n = 2$,

$$\begin{aligned}
{}_2(A, N) = {} & 1.3.5\ldots(2k-1) \\
& \times \Big[A^k + \frac{(2k+1)2k}{1.2}A^{k-1}N \\
& \quad + \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)}{1.2.3.4}A^{k-2}N^2 + \ldots + (2k+1)N^k\Big] \\
= {} & \frac{(2k)!}{k!\,2^k}\,\frac{\left(A^{\frac{1}{2}} + N^{\frac{1}{2}}\right)^{2k+1} + \left(A^{\frac{1}{2}} - N^{\frac{1}{2}}\right)^{2k+1}}{\left(A^{\frac{1}{2}} + N^{\frac{1}{2}}\right) + \left(A^{\frac{1}{2}} - N^{\frac{1}{2}}\right)}.
\end{aligned}$$

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

**3032.** **[A3g]** Dans la dernière question, soit $a = N^{\frac{1}{n}}$ approximativement, et $A = a^n$. Montrer que $N^{\frac{1}{n}} = \frac{S(A, N)}{S(N, A)}a$ approximativement.

*Note.* — Si $k=1$, on a la formule d'approximation de Hutton pour la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre. [*Voir* la question **2677** (**1903**, 275); quand $k=2$, on a l'approximation donnée dans la question **2939** (**1905**, 150).]

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Quest. **3031** et **3032** trad. de l'anglais. (La Réd.)]

**3033.** **[L¹5]** Je désire connaître les lieux géométriques suivants :

D'un point M variable d'une ellipse on abaisse les trois autres normales dont les pieds sont P, Q, R :

1° Lieu du point de rencontre des droites MP et QR;

2° Enveloppe des côtés du triangle PQR.

E.-N. Barisien.

**3034.** **[I19c]** Quelles sont les solutions en nombres entiers de l'équation

$$z^2 = (x^2+y^2)^2 + 8x^2y^2 - 4xy(x^2-y^2)?$$

H.-B. Mathieu (Saïgon).

**3035.** **[I19c]** L'identité

$$\begin{aligned}&[\lambda^2(x^2+y^2)^2 - 8\lambda^2x^2y^2 + 4\lambda^2xy(x^2-y^2)]^2\\&+[\lambda^2(x^2+y^2)^2 - 8\lambda^2x^2y^2 - 4xy\lambda^2(x^2-y^2)]^2 = 2[\lambda(x^2+y^2)]^4\end{aligned}$$

qui résout complètement en nombres entiers l'égalité

$$A^2 + B^2 = 2C^4$$

est-elle connue? H.-B. Mathieu (Saïgon).

**3036.** **[D4]** Existe-t-il des fonctions entières tendant vers chacune des $n$ limites finies et déterminées $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lorsque $|z|$ augmente indéfiniment, l'argument de $z$ restant compris dans un angle fini du plan des $z$, différent pour chacune des $n$ limites? Existe-t-il une relation entre $n$ et le genre de la fonction? M. Petrovich (Belgrade).

# RÉPONSES.

**2022.** (**1901**, 36) (G. Vacca). — I. La fonction $y = x^{\sqrt{2}}$ est représentée par une série de courbes algébriques $\left(y = x^{\frac{m}{n}}\right.$ ou paraboles d'ordre supérieur$\left.\right)$, correspondant à la série des fractions rationnelles qui expriment approximativement $\sqrt{2}$. Le degré de ces courbes croît constamment, et ces lignes s'approchent de plus en plus de la courbe cherchée, sans arriver à la représenter exactement tant que le degré est fini.

Ces courbes limites sont de la classe des intertranscendantes de Leibniz.

*Voir* G. Salmon, *Courbes planes* (traduct. Chemin, 1884, p. 385).

II. En l'absence de formules donnant un corps à ce symbole, il est impossible de se rendre compte de sa nature et de décider s'il est transcendant ou simplement irrationnel. M. D. Hilbert (*Probl. math.*, § VII) a posé la question pour $2^{\sqrt{2}}$ et plus généralement pour $\alpha^{\beta}$, $\alpha$ étant une base algébrique et $\beta$ un exposant algébrique irrationnel. Il regarde cette investigation comme très difficile.

III. Une question tout à fait analogue a également fixé l'attention de Cauchy. Le paragraphe VII de ses *Résumés analytiques* (*Œuvres*, 2ᵉ série, t. X, 1895, p. 62-66) se rapporte en effet au *Développement des exponentielles $e^x$ et* $A^x$. A étant une quantité positive et $a$ le logarithme népérien de A, Cauchy donne (*loc. cit.* et p. 133-134) la formule

$$A^x = 1 + xa + \frac{x^2 a^2}{1.2} + \frac{x^3 a^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$A^x = 1 + x l A + \frac{x^2 l A^2}{1.2} + \frac{x^3 l A^3}{1.2.3} + \ldots.$$

IV. La fonction $y = x^{\sqrt{2}}$ est dans son genre la plus simple que l'on puisse former. Cependant elle ne se présente pas fréquemment

dans les applications. Je n'en connais qu'un exemple, c'est une question proposée dans *Mathesis*, par M. Rose :

« Chercher une courbe (axes rectangulaires), telle que, si MP est l'ordonnée d'un de ses points M, T le pied de la tangente en M sur $Ox$ et N′ la rencontre de la normale en M sur $Oy$, on ait

$$\overline{TP}^2 + \overline{ON'}^2 = \overline{OM}^2. »$$

(Quest. **1504**, 1905, p. 29).

Cette courbe a pour équation différentielle (*loc. cit.*, p. 164) :

$$x^2y'^2 - 2xyy' - x^2 - y^2 - 0,$$

qui admet pour intégrale générale

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}}\left(ax^{\sqrt{2}} - \frac{1}{ax^{\sqrt{2}}}\right),$$

$a$ désignant une constante arbitraire. H. BROCARD.

**2134.** (**1901**, 188) (*Epsilon*). — *Système d'équations* (**1902**, 80). — La réponse est : *oui*, les résultats seront différents.

Voici un exemple de quatre équations :

(1) $$x = a,$$

(2) $$y = b,$$

(3) $$x + y = c,$$

(4) $$x - y = d.$$

La méthode des moindres carrés donne

$$x - a + x + y - c + x - y - d = 0 \qquad \left(x = \frac{a}{3} + \frac{c+d}{3}\right),$$

$$y - b + x + y - c - x + y + d = 0 \qquad \left(y = \frac{b}{3} + \frac{c-d}{3}\right).$$

Or, par l'autre méthode, nous obtenons

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $x = a,$ | $y = b$ | (1, 2), |
| (2) | $x = a,$ | $y = c - a$ | (1, 3), |
| (3) | $x = a,$ | $y = a - d$ | (1, 4), |
| (4) | $x = c - b,$ | $y = b$ | (2, 3), |
| (5) | $x = d + b,$ | $y = b$ | (2, 4), |
| (6) | $x = \frac{c+d}{2},$ | $y = \frac{c-d}{2}$ | (3, 4), |

et enfin

$$x = \frac{a}{2} + \frac{c+d}{4}, \qquad y = \frac{b}{2} + \frac{c-d}{4}.$$

Voici un exemple de trois équations :

(1) $$x + y = a,$$

(2) $$x - y = b,$$

(3) $$x + 2y = c.$$

La méthode des moindres carrés donne les équations suivantes :

$$x + y - a + x - y - b + x + 2y - c = 0,$$
$$x + y - a - x + y + b + 2x + 4y + 2c = 0$$

ou

$$3x + 2y = a + b + c,$$
$$2x + 6y = a - b + 2c,$$

d'où l'on obtient

$$x = \frac{2a + 4b + c}{7},$$
$$y = \frac{a - 5b + 4c}{14}.$$

Or, par l'autre méthode, nous obtenons

(1) $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$ (1, 2),

(2) $x = 2a - c$, $y = c - a$ (1, 3),

(3) $x = \frac{2b+c}{3}$, $y = \frac{c-b}{3}$ (2, 3)

et ensuite

$$x = \frac{15a + 7b - 4c}{18}, \qquad y = \frac{-3a - 5b + 8c}{18}.$$

A. Markoff (Saint-Pétersbourg).

**2175.** (**1901**, 223) (E.-B. Escott). — *Nombres à la fois triangulaires, carrés et hexagonaux* (**1905**, 16, 152). — Réponse de M. Escott analogue à la dernière réponse de M. Jolivald (**1905**, 152).

La Rédaction.

**2855.** (**1904**, 285) (E. Maillet). — *Erreurs des mathématiciens* (**1905**, 275). — Voici une liste de diverses erreurs, classées à peu

près dans l'ordre chronologique, mais dont plusieurs n'ont été relevées que bien plus tard.

DESCARTES. — Géométrie. Fin du Livre II. Un problème concernant les trois dimensions. Solution erronée, observe P. Tannery (t. VI, 1902, p. 441) et il est singulier, ajoute-t-il, qu'aucun de ses contemporains ne l'ait remarqué.

DESCARTES. — Lettre du 13 novembre 1629 au P. Mersenne. Erreur de raisonnement et de désignation.

FERMAT. — Lettre du 29 août 1654 à Pascal, où il affirme que les puissances de 2 augmentées de l'unité sont toujours des nombres premiers.

*Voir* aussi Lettre d'août 1649 à Frenicle. — Assertion erronée, relevée par Euler qui a reconnu que $2^{32}+1=4294967297$ est divisible par 641 (*Anc. Mém. de l'Ac. de Pétersb.*, t. VI, 1732-1733, p. 104).

MONTMORT. — Essai d'analyse sur les jeux de hasard. Erreur dans l'étude du brelan, relevée par H. Delannoy (*S. M.*, t. XXIII, 1895).

Une erreur du P. Jacquet relevée par le P. Bernard Lamy (*Journal des Savans*, 23 mai 1701, et 23 janvier 1702, p. 59-62, 1 figure). *Voir* aussi *Mém. pour l'Hist. des Sc. et des Beaux-Arts* (p. 1448-1470). Trévoux, 1738.

Une assertion d'Euler, relative à la possibilité de la résolution de l'équation indéterminée

$$A = p^2 - Bq^2$$

a été reconnue inexacte par Lagrange (*Œuvres*, t. II, p. 657. Méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers. *Mém. de Berlin*, t. XXIV, 1770).

LAGRANGE (*Œuvres*, t. II). — Sur la figure des colonnes [p. 125-169, 40 paragraphes (1770-1773)]. L'éditeur, J.-A. Serret, y a relevé de nombreuses fautes de calcul, notamment aux paragraphes 34, 35, 36.

LAGRANGE. — Erreurs ou idées inexactes et défaut de rigueur, relevés ou signalés par E. Picard (Conférences sur le développement de l'Analyse mathématique).

Une erreur de formule de Trigonométrie, de la part de La Caille, rectifiée par de La Lande dans son *Astronomie* (voir *Journal des Savans*, décembre 1771, p. 792).

D'ALEMBERT. — Erreurs graves en calcul des probabilités, signalées par J. Bertrand (*Calcul des probabilités*, Préface, p. x, et p. 2) et par H. Delannoy (*S. M.*, t. XXIII, 1895).

Sur de prétendues inadvertances dans lesquelles Lagrange serait tombé, suivant Poinsot, relativement à deux points fondamentaux de la Mécanique analytique (*J. M.*, 1875, Breton de Champ, p. 81-98; J. Bertrand, p. 181-182; Breton de Champ, p. 263-264).

Une erreur de Lagrange au sujet des conditions de stabilité de l'équilibre (*voir* E. Picard, *Sur le développ. de l'Analyse mathématique*, 1905, p. 69).

Une erreur de Poinsot, rectifiée par Andrade (*C. R.*, t. CXX, 1895, p. 1257-1259).

Erreur et illusion sur la validité du Calcul des probabilités de Laplace en matière de probabilité des jugements, partagée par F. Arago, dénoncée par Stuart Mill (1).

Quelques inadvertances d'Augustin Fresnel, relevées par Verdet [*Œuvres de Fresnel* (*passim*)].

Une erreur de Fresnel, relevée par Poisson (voir *Œuvres de Fresnel*, t. II, p. 247). Même erreur commise par Young.

La théorie mathématique de la diffraction de Fresnel n'est qu'approchée. Elle ne s'applique pas aux ondes hertziennes, ni à certains phénomènes d'optique.

Un théorème de Plücker sur les coniques passant par les points de contact des doubles tangentes d'une quartique, signalé inexact par Jacobi (*Cr.*, t. 40, 1850, p. 237 sq.; *N. A.*, 1853, p. 159).

Une démonstration d'Euler, jugée insuffisante par A. Genocchi (*N. A.*, question 434, au sujet d'un critère de racines imaginaires).

Un manque de rigueur dans une démonstration de Legendre et une imperfection dans une démonstration de Gauss, relevés par A. Tissot (*N. A.*, 1862, p. 7).

Erreurs de Montucla et de Monge dans l'application de la méthode de Roberval pour le tracé de la tangente à certaines courbes; signalées par C. Duhamel (*voir* Chasles, *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, 1870, p. 70-72).

Erreurs dans la réimpression des *Œuvres de Laplace* (*C. R.*, 1849, 2e sem., p. 22, et Terquem, *N. A.*, 1853, p. 126).

Une erreur de Lagrange, rectifiée par Puiseux qui a prouvé que les axes de l'ellipse mobile parcourue à chaque oscillation du pendule sphérique se déplacent toujours dans le sens même de la rota-

---

(1) *Adhuc sub judice lis est.* E. M.

tion (J. **Bertrand**, *Rapport sur les progrès de l'Analyse mathématique*, 1867, p. 33).

*Œuvres de Laplace* (t. XIII). — Une erreur relevée par Pontécoulant.

O. **Hesse**. — Sur le problème des trois corps. Erreur relevée par J.-A. Serret (*Œuvres de Lagrange*, t. VI).

Une erreur de Cayley (*Quaterly J. of Math.*) citant un théorème inexact sur la Géométrie de la surface des ondes, énoncé par un mathématicien allemand. Rectification signalée par J. Bertrand (*C. R.*, t. XLVII, 1858, p. 817-819), puis par Combescure (*A. D. M.*, t. II, 1859, p. 278-285).

Une erreur de M. Vieille, signalée par E. Gaucherel (*N. A.*, 1855; p. 343).

Une erreur de démonstration de Puissant, relevée par E. Gaucherel (*N. A.*, 1855, p. 324).

L. **Painvin**. — Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements (*N. A.*, 1870, p. 260). La dernière partie du théorème VII est fausse.

Une assertion erronée de Housel (*N. A.*, 1869, p. 500), relevée par H. J. S. Smith (*N. A.*, 1870, p. 73).

Une erreur de P. Serret (*Des méthodes en Géométrie*, p. 40) relevée par E. Rouché (*N. A.*, 1856, p. 354-356). *Voir* aussi réplique de P. Serret (*Ibid.*, 1857, p. 53-54).

Une erreur de Sylvester, relevée par Baker (voir *Mathesis*, 1904, p. 227).

Une erreur de C. Duhamel, relevée par A. Pringsheim et J. Molk dans l'*Encyclopédie mathématique* (édition française).

Plusieurs erreurs de J. Bertrand, relevées par E. Catalan (*Nouvelles Notes d'Algèbre et d'Analyse*, 1889, et *Bullettino*, t. IV, 1871).

H. **Brocard**.

Permettez-moi de rectifier une erreur d'erreur, si je puis m'exprimer ainsi :

M. le D[r] Prompt met sur le compte de Legendre une erreur qu'il n'a pas commise : Legendre dit que

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}$$

est incommensurable et il *le prouve* dans une Note qui lui sert à

établir que $\pi$ est incommensurable; il démontre en effet que, si $a_1$, $a_2$, ... sont des nombres entiers ainsi que $b_1$, $b_2$, ... et si $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, ..., la fraction continue

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

représente un nombre incommensurable.

J'ignore si le théorème est de Legendre, mais il le cite et en fait usage.

Legendre et Euclide ont fait de bien plus grosses erreurs que M. le D[r] Prompt ne signale pas. Ils se sont figuré que le mot *distance* avait un sens et ils ont cru que les démonstrations par superposition avaient une valeur *logique*. D'ailleurs peu de géomètres aujourd'hui s'aperçoivent que Legendre et Euclide ont divagué.

Et c'est là, à mon avis, un des phénomènes psychologiques les plus curieux que, depuis plus de deux mille ans, on fait de la Géométrie sans s'apercevoir que ses propositions fondamentales *n'ont aucun sens* au point de vue *logique*.

M. Escott cite comme une grosse faute de la part de Leibnitz d'avoir cru à la formule

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots.$$

Hé! hé! ..., il semble que l'on revient un peu aux idées de Leibnitz, et cette formule convenablement interprétée ne serait pas si fausse. Si la place ne me manquait pas, je me chargerais bien de montrer que Leibnitz n'était pas aussi naïf qu'on a l'air de le croire.... H. LAURENT.

POISSON (*J. E. P.*, 1832) dit : « Il existe des surfaces où le plan tangent est unique et où il y a un nombre pair supérieur à 2 de maxima et minima du rayon de courbure des sections normales, le nombre total étant égal au nombre des lignes de courbure. »

Les points où se présentent les faits indiqués par Poisson sont des points multiples. Poisson n'avait pas reconnu la multiplicité sur les équations des surfaces en coordonnées semi-polaires. (Comp. *S. M.*, t. XIV, 1885, p. 13 et suiv.)

Halphen (*S. M.*, t. V, 1877, p. 134) dit que la classe des asymptotiques des surfaces gauches ayant deux directrices rectilignes est six fois l'excès de leur degré sur le degré de la surface. Ce nombre est *toujours* trop élevé. (Comp. *S. M.*, t. XIX, 1891, p. 40.)

Dupin (*Développements de Géométrie*) dit que par les ombilics isolés il ne passe qu'une ligne de courbure réelle.

Amiot (*J. M.*, t. XII) dit que par un ombilic il peut ne passer aucune ligne de courbure réelle. [Erreurs relevées et expliquées dans mon Mémoire (*S. M.*, t. XVIII, 1890, p. 95-106).]

L'erreur de Dupin tient à ce qu'il dit qu'une équation $M^2 + N^2 = 0$ équivaut à un système $M = 0$, $N = 0$, ce qui n'est vrai que si l'on ne considère que les solutions réelles. Or, dans le cas considéré par Dupin, il s'agit de solutions imaginaires.

Celle d'Amiot tient à ce que l'équation donnant les directions des lignes de courbure n'est pas l'équation *générale* du degré correspondant. Ch. Bioche.

**2874.** (**1905**, 26) (L. Dujardin). — *Solution graphique des équations linéaires* (**1905**, 184). — *Voir* une description sommaire de la méthode simple de M. Van der Berg dans un Article bibliographique de M. J. Tannery (*B. D.*, déc. 1905, 2e série, t. XXIX, p. 329); cette méthode est décrite dans les *Vorlesungen über Math. Näherungsmethoden* de M. O. Biermann, Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1905. E. Maillet.

**2907.** (**1905**, 103) (La Rédaction). — *Monuments des mathématiciens français* (**1905**, 234; **1906**, 25). — I. Une statue a été érigée à Poisson, par les soins de la municipalité de Pithiviers, sa ville natale (voir *N. A.*, 1850, p. 218-219).

II. Je dois rappeler que, lorsque la ville de Dax résolut d'élever une statue à la mémoire de Borda, l'on chercha inutilement à se procurer un portrait de ce savant.

III. En mars 1902, un Comité parisien fit appel à une souscription publique pour élever un monument à Gavarni (pseudonyme de Guillaume-Sulpice Chevallier) [*voir* quest. **2366** (**1902**, 144)].

L'inauguration a eu lieu le 3 décembre 1904 à Paris, place Saint-Georges (*voir* la *Revue Bleue* et les journaux de cette date).

Nous pouvons, au moins pour ordre, ajouter ce monument à la liste de la question **2907**, parce que Gavarni a aussi quelques tra-

vaux mathématiques à son actif [*voir*, par exemple, rép. **150** (**1895**, 215)].

IV. Je crois bien que la ville de Beaune a élevé un monument à Gaspard Monge. H. Brocard.

**2913.** (**1905**, 105) (Paulmier). — *Points de rencontre d'une droite et d'un cône circonscrit à une sphère* (**1905**, 213). — Autre réponse de M. A. Schiappa Monteiro : elle sera transmise à M. Paulmier dès qu'il aura bien voulu nous faire connaître son adresse actuelle. La Rédaction.

**2921.** (**1905**, 127) (E.-N. Barisien). — *Lieu des sommets des coniques bitangentes à deux cercles donnés* (**1905**, 236). — Autre réponse de M. H.-B. Mathieu (Saïgon) communiquée à M. Barisien. La Rédaction.

**2935.** (**1905**, 220) (Remoundos). — *Fonctions entières.* — $a_n$ étant le $n^{\text{ième}}$ zéro de la fonction entière, d'ordre $\rho$ fini, $f(x)$, on a, pour les valeurs de $x$ dont le module est compris entre ceux de $a_n$ et de $a_{n+1}$ :

$$f(x) = (-1)^n \frac{x^n}{a_1 a_2 \ldots a_n} e^{P(x)+G(x)+H\left(\frac{1}{x}\right)},$$

$P(x)$ polynome entier en $x$, indépendant de $n$, G et H fonctions holomorphes, dont les coefficients dépendent de $n$.

Faisant $x = re^{\varphi i}$, on en déduit

$$|f(x)| = \frac{r^n}{|a_1 a_2 \ldots a_n|} e^{n B(\varphi)},$$

$n\, B(\varphi)$ représentant la partie réelle de

$$P(x) + G(x) + H\left(\frac{1}{x}\right);$$

$B(\varphi)$ est une série de Fourier uniformément convergente (*C. R.*, 1904; 1[er] semestre, p. 261).

Posons $\dfrac{r^n}{|a_1 a_2 \ldots a_n|} = e^{An}$, A est indépendant de $\varphi$, positif et fini lorsque $n$ croît indéfiniment.

1° Les coefficients de $B(\varphi)$ restent finis lorsque $n$ tend vers l'in-

fini; pour les valeurs de $\varphi$ telles que $B(\varphi)$ est négatif et inférieur à $-A$, le module de $f(x)$ est infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, et de l'ordre de $e^{-r^{\rho-1}}$.

2° Les coefficients de $B(\varphi)$ deviennent infinis en même temps que $n$. Cela peut provenir de ce que le polynome $P(x)$ a un degré supérieur à l'ordre $\rho$ de $n$, ou bien de ce que $\rho$ est entier et le coefficient de $x^\rho$ dans $G(x)$ infini comme $n l n$. Alors la démonstration de M. Remoundos dans sa thèse s'applique et $\frac{S}{s}$ tend vers l'unité lorsque $r$ croît indéfiniment.

Dans le premier cas (1°), le rapport $\frac{S}{s}$ tend vers une limite supérieure à l'unité. A. Pellet.

**2956** et **2957**. (**1905**, 221) (G. Lemaire). — (**1905**, 287; **1906**, 30). — Réponse de M. Ph. Hatt transmise à M. G. Lemaire.

La Rédaction.

**2960**. (**1905**, 222) (G. Lemaire). — L'accord est loin d'être fait au sujet de l'explication des 64 *koua* et de leur signification arithmétique, d'ailleurs contestée. Je citerai seulement quelques références.

I. Les Tomes VIII (1885) et XXIII (1893) des *Annales du Musée Guimet* (2 vol. grand in-4°) sont consacrés à une étude des *koua*. Leur titre est : *Le Yi-King, ou Livre des changements de la dynastie des Tsheou,* traduit pour la première fois du chinois en français par P.-L.-F. Philastre (Paris, E. Leroux).

L'auteur, ancien Chargé d'affaires à Hué, avait résidé plusieurs années en Cochinchine (décédé le 11 septembre 1902).

Selon lui, *Fou : Hi* serait un mythe, personnification masculine des phases de la Lune.

II. Du même, au Tome I des *Annales* susmentionnées, un article sur l'Exégèse chinoise.

III. Mariage. — Numération par huit, anciennement en usage par toute la Terre, prouvée par les *koua* des Chinois, etc., 1857.

IV. Ed. Lucas, *Récréations mathématiques,* t. I, 2ᵉ édit., p. 149-151 (où il cite Leibniz et le P. Bouvet).

V. *The Monist* (janvier 1896). — Chinese philosophy, par le Dr P. Carus.

VI. Hatamen. — Oracles japonais (*Revue de Paris*, 1er déc. 1905, p. 589-604).

A son avis, le *Yi-King* est un Livre sibyllin, rempli d'obscurités.

L'auteur énumère les 8 trigrammes de *Fou-Hsi*, et les oracles que les devins en déduisent.

La conclusion de ces études est que là où les commentateurs orientaux, connaissant à fond les nuances de la langue chinoise, ont énormément de peine à tirer quelque chose du *Yi-King*, la mentalité européenne demeure absolument impuissante.

H. Brocard.

**2962.** (**1905**, 242) (G. Lemaire). — *Somme des puissances des n premiers nombres* (**1906**, 56). — Les identités indiquées par M. Lemaire peuvent se déduire des relations suivantes (*American math. Monthly*, 1894, p. 78) :

$$(m)_1 S_{2m-1} + (m)_3 S_{2m-3} + (m)_5 S_{2m-5} + \ldots + \left\{ \begin{matrix} (m)_m & S_m & (m \text{ impair}) \\ (m)_{m-1} & S_{m+1} & (m \text{ pair}) \end{matrix} \right\} = 2^{m-1} S_1^m.$$

Par d'autres méthodes, on peut aisément obtenir une infinité d'identités renfermant soit des puissances paires, soit des puissances impaires, soit toutes deux.

L.-E. Pratt (Tecumseh, Nebraska, U. S. A.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

**2967.** (**1905**, 244) (V. Williot). — *Nombres de Bernoulli.* — Soit $B_1 = 1$, $B_2 = \frac{1}{2}$ :

$$B(1 - B)^{2m-1} = 0$$

est une expression symbolique pour déterminer les nombres de Bernoulli, si

$$B_{2m} = 0 \qquad (m > 1).$$

C'est l'expression

$$1 - (2m-1)_1 B_2 + (2m-1)_2 B_3 + (2m-1)_4 B_5 + \ldots + (2m-1)_{2m-2} B_{2m-1} = 0.$$

Voici pour quelles raisons je préfère cette notation :

1° $B_{2m-1}$ se rencontre dans le $(2m-1)^{\text{ième}}$ terme de la somme des puissances de la suite naturelle des nombres;

2° Quand $2m-1$ est premier, c'est le facteur le plus grand du dénominateur de $B_{2m-1}$;

3° Le dénominateur de $B_{2m-1}$ divise $n^{2m-1} n$.

L.-E. Pratt (Tecumseh, Nebraska, U. S. A.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

**2971.** (**1905**, 265) (E.-N. Barisien). — *Distance de deux points en coordonnées normales.* — Dans son Cours de l'Université de Liége, M. J. Neuberg donne la formule suivante pour la distance de deux points $(xyz)$, $(x'y'z')$ en coordonnées normales absolues :

$$\delta^2 = M(x'-x)^2 + N(y'-y)^2 + P(z'-z)^2,$$

dans laquelle

$$M = \frac{b^2+c^2-a^2}{2h_a^2}, \qquad N = \frac{c^2+a^2-b^2}{2h_b^2}, \qquad P = \frac{a^2+b^2-c^2}{2h_c^2}.$$

On y trouve également l'autre formule que voici :

$$\delta^2 = -\frac{R}{S}\Sigma a(y'-y)(z'-z),$$

R et S désignant le rayon du cercle circonscrit et la surface du triangle fondamental.

Dans le cas du barycentre et du point de Lemoine, on a

$$x = \frac{h_a}{3}, \qquad y = \frac{h_b}{3}, \qquad z = \frac{h_c}{3},$$

$$x' = \frac{2aS}{a^2+b^2+c^2}, \qquad y' = \frac{2bS}{a^2+b^2+c^2}, \qquad z' = \frac{2cS}{a^2+b^2+c^2},$$

et en remplaçant $h_a$ par $\frac{2S}{a}$, S disparaît de la formule correspondante et l'on trouve

$$\delta^2 = \left\{ \begin{aligned} &(b^2+c^2-a)(2a^2-b^2-c^2)^2 \\ &+(c^2+a^2-b^2)(2b^2-a^2-c^2)^2 \\ &+(a^2+b^2-c^2)(2c^2-a^2-b^2)^2 \end{aligned} \right\} \frac{1}{18(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

J. Rose.

Le carré de la distance de deux points, définis par leurs coordonnées $x$, $y$, $z$, et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, proportionnelles aux distances de ces points aux côtés du triangle de référence ABC, dont le cercle circonscrit a pour rayon R, est

$$\rho^2 = (2R \sin A \sin B \sin C)^2 \times \frac{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos A - 2nl\cos B - 2lm\cos C}{(x\sin A + y\sin B + z\sin C)^2(\alpha\sin A + \beta\sin B + \gamma\sin C)^2},$$

en posant pour abréger

$$l = \gamma y - \beta z, \qquad m = \alpha z - \gamma x, \qquad n = \beta x - \alpha y.$$

Si l'on applique cette formule au cas du barycentre et de son inverse le point de Lemoine, dont les coordonnées sont respectivement $bc$, $ca$, $ab$, et $a$, $b$, $c$, on parvient à l'égalité

$$\begin{aligned} 9\rho^2(a^2+b^2+c^2)^2 = a^2(b^2-c^2)^2 + b^2(c^2-a^2)^2 + c^2(a^2-b^2)^2 \\ -2(c^2-a^2)(a^2-b^2)(b^2+c^2-a^2) \\ -2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2) \\ -2(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2), \end{aligned}$$

à laquelle je n'aperçois pas de simplification. E. MALO.

Posant, pour abréger, $(xy') = xy' - x'y$, ..., la distance $\delta$ des deux points est donnée par la formule

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{R^2}\delta^2 = (yz')^2 + (zx')^2 + (xy')^2 - 2(zx')(xy')\cos A \\ - 2(xy')(yz')\cos B - 2(yz')(zx')\cos C, \end{aligned}$$

où S est l'aire du triangle fondamental ABC et R le rayon du cercle circonscrit. En particulier, on trouve la distance du barycentre au point de Lemoine plus simplement comme il suit : appelant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les distances d'un point arbitraire P aux sommets, on trouve aisément que la distance $\delta$ de ce point au barycentre est donnée par

$$\delta^2 = \frac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2),$$

mais pour le point de Lemoine, en posant $a^2+b^2+c^2 = m^2$, nous avons

$$\alpha^2 = \frac{2}{m^2}b^2c^2 - \frac{3}{m^4}a^2b^2c^2, \qquad \ldots,$$

donc

$$\delta^2 = \frac{6(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - (a^2 + b^2 + c^2)^2}{9(a^2 + b^2 + c^2)} - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

V. Retali (Milan).

M. C. Thiry a donné (*Applic. remarq. du th. de Stewart*, Gand, 1891) une formule très simple de la distance d'un point quelconque P du plan au point d'intersection $K_n$ des droites qui, partant des sommets du triangle, divisent les côtés opposés dans le rapport des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des côtés adjacents

$$\overline{PK_n}^2 = \frac{\Sigma a^2 \overline{PA}^2}{m^2} - \left(\frac{abc}{m^2}\right)^2 \Sigma a^{n-2} b^{n-2}.$$

Si le point P est le barycentre G, on a

$$GA = \frac{2}{3} AA',$$

AA′ étant la médiane, pour laquelle

$$4\overline{AA'}^2 = 2m^2 - 3a^2.$$

Donc

$$\Sigma a^2 \overline{GA}^2 = \frac{4}{9} \Sigma a^2 \overline{AA'}^2 = \frac{2m^4 - 3q^4}{9}.$$

Mais

$$\overline{GK}^2 = \frac{\Sigma a^2 \overline{GA}^2}{m^2} - \frac{3a^2b^2c^2}{m^4}.$$

Donc, en définitive,

$$\overline{GK}^2 = \frac{(2m^4 - 3q^4)m^2 - 27a^2b^2c^2}{9m^4},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$m^2 = \Sigma a^2, \qquad q^4 = \Sigma a^4.$$

H. Brocard.

Autre réponse de M. Plakhowo qui renvoie à M. Weill (*B. M. E.*, 1892) et aux *Principes de la nouvelle géométrie du triangle*, de M. Aug. Poulain.

**2977.** (**1905**, 267) (G. Lemaire). — *Systèmes d'équations* (*problème de la Carte*). — J'estime que c'est indirectement qu'on doit aborder la résolution des équations

$$\begin{aligned} v^2 + w^2 - 2vw\cos\alpha &= a^2, \\ w^2 + u^2 - 2uw\cos\beta &= b^2, \\ u^2 + v^2 - 2uv\cos\gamma &= c^2, \end{aligned}$$

résolution qui est une des manières, mais non pas vraisemblablement la plus avantageuse, d'envisager le problème de la Carte. En effet, on ne peut pas se contenter d'indiquer des valeurs *proportionnelles* à $u$, $v$, $w$, distances du point cherché aux points donnés A, B, C, parce que chaque détermination $(u:v:w)$ conduirait non pas à *un* point, mais à *deux* points (conjugués par rayons vecteurs réciproques relativement au centre du cercle circonscrit au triangle ABC) et qu'il faudrait examiner encore lequel de ces deux points répond véritablement à la question.

Étant donnés le triangle de référence ABC et les angles de relèvement $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, il est donc plus simple de calculer les *distances* du point cherché M *aux côtés* du triangle (ou plutôt des quantités $x$, $y$, $z$, proportionnelles à ces distances) et pour cela, comme la Géométrie l'indique, il suffit de considérer les segments capables des angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, décrits respectivement sur les côtés $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Les équations de ces segments sont

$$\begin{aligned}\Gamma\sin\alpha - \Delta x\sin(\alpha - A) &= 0,\\ \Gamma\sin\beta - \Delta y\sin(\beta - B) &= 0,\\ \Gamma\sin\gamma - \Delta z\sin(\gamma - C) &= 0,\end{aligned}$$

en posant pour abréger

$$\begin{aligned}\Gamma &= yz\sin A + zx\sin B + xy\sin C,\\ \Delta &= x\sin A \;+ y\sin B \;+ z\sin C,\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\Delta = 0$ étant l'équation de la droite de l'infini et $\Gamma = 0$ celle du cercle circonscrit au triangle ABC. On a donc

$$x:y:z = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - A)} : \frac{\sin\beta}{\sin(\beta - B)} : \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma - C)},$$

et si l'on veut on calculera les véritables distances du point M aux côtés du triangle ABC par les formules

$$p = \frac{2Rx\sin A\sin B\sin C}{x\sin A + y\sin B + z\sin C}, \qquad q = \ldots, \qquad r = \ldots,$$

après quoi l'on aura $u$, $v$, $w$, par les expressions

$$u^2\sin^2 A = q^2 + r^2 + 2qr\cos A, \qquad \ldots.$$

Je ne crois pas à ce propos inutile de rappeler, car elle ne se trouve guère dans les traités de Géométrie analytique, la construction du

point M défini par des quantités $x$, $y$, $z$, proportionnelles aux distances du point aux côtés d'un triangle de référence. Il suffit de mener, du côté qu'indiquent le signe et la convention qui fait positives les coordonnées d'un point de l'intérieur du triangle, des parallèles aux côtés respectivement aux distances $x$, $y$, $z$ : on a ainsi un triangle homothétique au triangle de référence et le centre d'homothétie est le point cherché. E. MALO.

*Voir* DESBOVES (*Exerc. d'Algèbre*, p. 354 et suiv.) et ma solution de la question dans *R. M. S.*, juin 1892. P. BARBARIN.

**2978.** (**1905**, 267) (G. LEMAIRE). — ***Problème de la Carte en coordonnées cartésiennes rectangulaires.*** — La solution de tout problème qui n'en comporte qu'une seule bien déterminée est susceptible d'être présentée soit comme une règle, soit comme une formule, et l'on peut dire (en se gardant toutefois d'énonciations trop absolues) que la formule est plus satisfaisante au point de vue théorique comme mettant en évidence les divers paramètres qui interviennent dans la question, tandis que la règle (ou une suite de formules en dépendance les unes des autres) permet de parvenir plus facilement au résultat cherché lorsqu'il s'agit d'une application numérique.

Le point de vue sous lequel le problème de la Carte est envisagé par l'auteur de la question **2978** étant celui de la détermination effective des coordonnées du point défini par ses angles de relèvement relativement à trois points connus, c'est la marche à suivre qu'il est à propos d'indiquer ici au lieu d'une formule inapplicable pour cause de complication excessive.

On admettra donc que, par une première correction des données, l'origine ait été transportée en l'un des sommets, C, du triangle de référence, et aussi (pour fixer les idées) que les sommets A et B se trouvent à l'intérieur de l'angle droit formé en C par la méridienne $\overline{CY}$ et par la direction perpendiculaire $\overline{CX}$ : sur le cercle ABC supposé parcouru dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, les points A, B, C se suivent précisément dans cet ordre.

Cela étant, on trouve sans difficulté que le cercle capable de l'angle $\beta$, sous lequel le côté $\overline{CA}$ est aperçu du point M, a pour équation

$$x^2+y^2-gx-fy=0,$$

en faisant

$$g=x'-y'\cot\beta,\qquad f=x'\cot\beta+y',$$

et $x'$, $y'$ étant les coordonnées (nouvelles) du sommet A. De même, le cercle $\widehat{CMB}$, capable de l'angle $\alpha$, opposé au côté $\overline{BC}$, a pour équation

$$x^2 + y^2 - hx - ky = 0,$$

en posant

$$h = x'' + y'' \cot\alpha, \qquad k = -x'' \cot\alpha + y''$$

($x''$, $y''$ coordonnées de B).

L'équation de la droite $\overline{CM}$, axe radical des deux cercles, est, par suite,

$$(g-h)x + (f-k)y = 0,$$

et l'azimut $\psi$ se trouvera déterminé par la relation

$$\operatorname{tang}\psi = -\frac{g-h}{f-k}.$$

On en déduit les valeurs de $x$ et de $y$ :

$$x = \frac{(f-k)(fh-gk)}{(g-h)^2+(f-k)^2}, \qquad y = -\frac{(g-h)(fh-gk)}{(g-h)^2+(f-k)^2}.$$

E. Malo.

J'ai rédigé dernièrement et envoyé au Journal de M. Vuibert, avec prière d'insérer s'il y a lieu, une Note sur la théorie du centre des distances proportionnelles appliquée à la solution du problème de la Carte et de diverses questions classiques.

J'en extrais les formules suivantes, qui répondent au vœu exprimé :

Posant

$$m = \frac{1}{\cot A - \cot\alpha}, \qquad n = \frac{1}{\cot B - \cot\beta}, \qquad p = \frac{1}{\cot C - \cot\gamma},$$

on a

$$x = \frac{mx_1 + nx_2 + px_3}{m+n+p},$$

$$y = \frac{my_1 + ny_2 + py_3}{m+n+p}.$$

Je ferai observer que mon procédé, exigeant seulement six recherches tabulaires, est très expéditif. J'ignore s'il est connu.

G. Lemaire.

Réponse manuscrite de M. Ph. Hatt communiquée à l'auteur de la question.

La Rédaction.

**2982.** (**1905**, 269) (*Crut*). — ***Élimination du paramètre φ entre les équations***

$$\sqrt{\frac{ax}{\cos\varphi}} + \sqrt{\frac{by}{\sin\varphi}} = c, \qquad \sqrt{ax\cos\varphi} + \sqrt{by\sin\varphi} = c.$$

— Élevant au carré les équations données et les soustrayant l'une de l'autre, il vient

$$(ax - by)(\cos\varphi - \sin\varphi) = c^2(1 - \sin\varphi\cos\varphi),$$

et par une nouvelle élévation au carré suivie d'une transposition de termes

$$(ax - by)^2 - 2\cos\varphi\sin\varphi[(ax - by)^2 - c^4] - c^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi = 0.$$

D'autre part la multiplication membre à membre des équations proposées conduit à l'équation nouvelle

$$ax + by - c^2 = -\sqrt{\frac{abxy}{\cos\varphi\sin\varphi}},$$

c'est-à-dire à la valeur suivante de $\cos\varphi\sin\varphi$,

$$\cos\varphi\sin\varphi = \frac{abxy}{(ax + by - c^2)^2}.$$

Le résultat cherché est donc

$$0 = (ax - by)^2(ax + by - c^2)^4$$
$$- 2abxy(ax + by - c^2)^2[(ax - by)^2 - c^4] - a^2b^2c^4x^2y^2.$$

*Quilibet.*

Réponses analogues de MM. *Ahesem*, G. Delahaye, Hoffbauer et H.-B. Mathieu communiquées à M. *Crut* : M. Hoffbauer y traite le cas où l'on suppose que les radicaux ont des signes quelconques.

**2984.** (**1905**, 289) (E. Weber). — *Les cycles non réversibles.* — C'est le sujet du Chapitre XII de la *Thermodynamique* de J. Bertrand (Paris, 1887). H. Brocard.

# AVIS.

Nous prions nos lecteurs de vouloir bien excuser le retard dans la publication du journal, retard dû à la grève des typographes non encore complètement terminée. Pour regagner une partie du temps perdu, nous avons réuni en un seul les trois numéros d'avril, mai et juin.

LA RÉDACTION.

# QUESTIONS.

**858. [I11c] (1896, 152)** Soient $f(n)$ et $g(n)$ deux fonctions du nombre entier positif $n$, liées par l'équation

$$\sum_{r=1}^{r=n} f\left[\frac{n}{r}\right] = g(n),$$

où $[x]$ désigne le plus grand nombre entier contenu dans la quantité $x$. On suppose qu'il existe des grandeurs positives $s$ telles que

$$\lim_{n=\infty} \frac{g(n)}{n^s} = 0.$$

Si l'on appelle $\sigma$ la limite inférieure de ces grandeurs $s$, on dira, pour abréger, que $g(n)$ est de l'ordre $\sigma$. Ainsi $\log n$ est de l'ordre 0.

On demande de démontrer que l'ordre de la fonction $f(n)$ est égal à la plus grande des quantités $\frac{1}{2}$ et $\sigma$. La démonstration de cette propriété paraît très difficile, si l'on ne veut pas s'appuyer sur ce résultat, non encore démontré, que la fonction riemannienne $\xi(t)$ a toutes ses racines réelles.

J. Franel (Zurich).

**860.** [**V 7**] (**1896**, 152) Dans une *Arithmetica* publiée à Soræ, en Danemark, en 1643, se trouve, aux pages 132 et 133, le passage suivant :

« Reperitur in nonnulis libellis arithmeticis, plebejis ac vernaculè scriptis, regula, corruptâ voce *Cecis* aut *Virginum* appellata, quam eruditi scriptores contemptim habitam, exsilio è libris suis multarunt. Eam tamen Arabes felicibus suis ingenijs non indignam arbitrati, *Cïntu Sekts* (ou plutôt *Sektsch*), hoc est, adulteram indigetarunt : propterea, ut opinor, quòd uno ac legitimo quæstionis enodatu non contenta, plures plerûq; admittat solutiones. Hoc ergo honori suo restituta, benigne largietur, quod ab alligatione, cæterisq; regulis frustre exposces. »

La description que l'auteur fait ensuite de la règle, et les exemples dont il l'illustre, montrent qu'elle sert à résoudre en nombres entiers les équations indéterminées du premier degré. Le livre de Lauremberg ayant paru vingt-deux ans après l'édition de Diophante par Bachet, il n'est pas improbable qu'il pense à Bachet en parlant d'une *restitution à son honneur* de la règle en question; mais l'auteur, assez érudit, rapporte expressément aux Arabes cette règle pour résoudre une espèce de problèmes inconnus de Diophante (malgré leur nom ordinaire d'*équations de Diophante*), mais connus par les mathématiciens indiens. Existerait-il donc avant la réinvention de Bachet, qu'on suppose ordinairement, une tradition portée à l'Europe par les Arabes sur ces recherches indiennes?

Vu l'importance historique de cette question, il serait

intéressant de savoir si d'autres auteurs, arabes ou européens, mentionnent une règle portant un des noms rapportés par Lauremberg.

La *regula alligationis,* dont il parle aussi dans le passage cité, ne sert à résoudre les mêmes équations que d'une manière très arbitraire et en des nombres ordinairement fractionnaires. H.-G. ZEUTHEN (Copenhague).

**864. [H3c] (1896, 154)** Intégrer

$$\frac{\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\cos\alpha}{q}\right)}{\sin\alpha} = \frac{\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{q\sin\alpha}\,\frac{1+\Delta}{1-\Delta}\right)}{\cos\alpha} - \pi\left(q + \frac{d^2q}{d\alpha^2}\right),$$

$$\Delta^2 = 1 - \left(\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\right)^2,$$

$$\pi,\quad \varphi = \text{const.}$$

On peut remarquer que si, pour une courbe plane C, $q$ et $\alpha$ sont respectivement la distance de l'origine à la tangente et l'angle de la tangente avec l'axe des $x$, $q + \frac{d^2q}{d\alpha^2}$ est le rayon de courbure.

Si $\pi = 0$, la courbe C est une droite. L'équation différentielle se présente dans des recherches relatives à la poussée des terres. LÉON AUTONNE.

**866. [M¹3i] (1896, 154)** La question suivante a-t-elle été traitée? Enveloppe des polaires des coniques osculatrices à une courbe par rapport à un point donné; cas particulier des courbes algébriques. *Karl.*

**867. [H7] (1896, 173)** La téorie [1] des équations aus

---

[1] J'ai adopté depuis assez longtemps l'ortografie modestement simplifiée que propose la Société filologique française (boulevard Saint-Michel, 20, Paris) et je m'en sers *exclusivement* pour ma correspondance et mes publications; je l'emploierai donc, à l'avenir, dans le Journal pour tout ce qui portera ma signature. Il est clair que ceus de nos colaborateurs qui le désireront auront aussi la liberté de se servir de cète même ortografie pour ce qu'ils feront paraître dans l'*Intermédiaire*. E. LEMOINE.

dérivées partièles (qui ne sont pas à une inconue et du premier ordre à la fois) est entièrement à créer; à défaut de métodes régulières pour intégrer un sistème d'équations aus dérivées partièles, il y aurait à dresser un Catalogue des équations formées *a priori* en partant de leurs intégrales; un pareil Catalogue rendrait de grands services à l'analise et à ses aplications; l'*Intermédiaire* pourrait recueillir les éléments de ce Catalogue à la confection duquel contribueraient ses auteurs. Si cète idée était adoptée, on pourait, dans un prochain numéro, publier une liste assez étendue d'équations que l'on sait intégrer. Aujourd'hui je me bornerai à signaler l'exemple suivant qui me paraît nouveau :

Soient

$$(1) \qquad u = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{2m-1}), \qquad v = \psi(v_1, v_2, \ldots, v_{2m-1})$$

des fonctions de $2m$ fonctions conues $u_1, u_2, \ldots, v_1, v_2, \ldots,$ de $x_1, x_2, \ldots, x_m$; si l'on pose $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} = \frac{\partial\psi}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_{2m-1}} = \frac{\partial\psi}{\partial v_{2m-1}}$, et si l'on diférentie les équations (1), si enfin on élimine les fonctions $\varphi$, $\psi$ et leurs dérivées, on obtient deus équations linéaires et homogènes par raport à $u$ et $v$. Réciproquement, si l'on a des intégrales particulières distinctes $u_1, v_1$; $u_2, v_2$; ...; $u_{2m-1}, v_{2m-1}$, de deus équations linéaires et homogènes à deus inconues et $m$ variables, la solution la plus générale sera $u = \varphi(u_1, \ldots, u_{2m-1})$, $v = \psi(v_1, \ldots, v_{2m-1})$, les $u$ et les $v$ étant liés entre eus par les relations $\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} = \frac{\partial\psi}{\partial v_i}$. On a des téorèmes analogues pour des sistèmes à 3, 4, ... inconues.

H. LAURENT.

**876.** [**M'4**] (**1896**, 175) Un correspondant pourrait-il m'indiquer les travaux publiés sur les courbes planes à un seul point double, outre ceux de MM. Brioschi, Cremona et Brill, cités dans les *Courbes planes* de Salmon (page 655 de l'édition française) et le Mémoire de M. Bobek (*Mém. de l'Acad. de Vienne,* t. LIII, 1887)?

V. RETALI (Milan).

**877. [L'2c]** (**1896**, 175) Dans l'Ouvrage posthume du marquis de l'Hospital (*Traité analytique des sections coniques,* Paris, 1720) on trouve la démonstration des théorèmes suivants :

« *a.* Le lieu des pôles des tangentes d'un cercle ayant le centre C et le rayon $r$, par rapport à un autre cercle ayant pour centre A, est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que $r > = <$ CA.

» *b.* L'enveloppe des podaires des points d'une conique centrale, par rapport à un cercle ayant pour centre un foyer, est un cercle, etc. » (Voir *Op. cit.,* p. 273-276.)

Je voudrais savoir si ces théorèmes se trouvent dans d'autres Ouvrages plus anciens. V. Retali (Milan).

**887. [J5]** (**1896**, 177) A quelles sortes de conditions doit satisfaire un ensemble de points pour qu'on puisse démontrer qu'il est nécessairement condensé dans quelque intervalle? J. Hadamard.

**894. [I19c]** (**1896**, 197) Je voudrais bien avoir des solutions du système

$$1 + x^2 = 2^{\delta_1}.p^{m_1}.q^{n_1}, \quad 1 + y^2 = 2^{\delta_2}.p^{m_2}.q^{n_2}, \quad 1 + z^2 = 2^{\delta_3}.p^{m_3}.q^{n_3},$$

$x$, $y$ et $z$ étant des nombres entiers positifs dont le plus petit n'est pas $= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ ou $18$; $\delta_1$, $\delta_2$ et $\delta_3$ étant $= 0$ ou $= 1$ ; $p$ et $q$ étant des nombres premiers de la forme $4h + 1$ et $m_1, n_1, \ldots, m_3, n_3$ étant des exposants entiers positifs tels que

$$\delta_1 \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix} + \delta_2 \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix} + \delta_3 \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

soit impair. En effet, comme je l'ai montré dans un Mémoire qui paraîtra prochainement, on aurait alors une équation

$$\lambda \text{ arc tang} \frac{1}{x} + \mu \text{ arc tang} \frac{1}{y} + \nu \text{ arc tang} \frac{1}{z} = k\frac{\pi}{4},$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ et $k$ étant des entiers. Carl Störmer (Christiania).

**897.** [V] (**1896**, 198) Treutlein mentionne dans les *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, t. I, p. 38 (Leipzig, 1877), que Huswirt, dans l'*Enchiridion novus Algorismi* (1501), a employé, parmi d'autres mots, pour désigner le zéro, le mot « theca ». Il ajoute (p. 39) que Ramus a connu l'usage de ce terme. Probablement, Treutlein a en vue un passage des *Scholarum mathematicarum libri unus et triginta,* de P. Ramus (Bâle, 1569) : « Caput primum primi libri Arithmeticæ ». Maintenant on trouve dans l'*Opusculum de pràxi numerorum* (1503, et *Bibl. Math.*, 1887, p. 70), au f° XLV, la remarque : « Decima vero figura dicitur theta | vel circulus | vel cifra | vel figura nichili ».

Il serait d'intérêt général d'éclairer davantage la notation et l'origine de ce terme. K. HUNRATH (Rendsburg).

**901.** [**M**[1]**3i**γ] (**1896**, 199) Dans une Note récemment parue « Sur la théorie géométrique du virage à bicyclette » (*Génie civil,* 27 juin 1896), M. d'Ocagne montre que, pour assurer la continuité de la courbure de la trajectoire de la roue de devant dans le passage d'un alignement droit $OA_0$ à un autre alignement droit $OA_1$ (le triangle $OA_0A_1$ étant isoscèle), il faut faire décrire à la roue de derrière une courbe ayant en $A_0$ et en $A_1$ avec les droites $OA_0$ et $OA_1$ des contacts du *troisième ordre,* courbe qui devra en outre admettre la bissectrice de l'angle $A_0OA_1$ comme axe de symétrie. Peut-on indiquer un courbe répondant à ce caractère et qui soit d'un tracé facile, ou, du moins, pour laquelle on puisse aisément tracer un Tableau des coordonnées d'un nombre suffisant de points? Il faudrait d'ailleurs que cette courbe fût telle que, lorsque le point O s'éloignerait à l'infini, le sommet de la courbe restât à distance finie, afin de pouvoir servir encore dans le cas du virage à 180°.

*Cycleman.*

**902.** [**L**[2]**5a**] (**1896**, 200) Soit

$$f(x,y,z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + \ldots = 0$$

l'équation d'une quadrique. Les coordonnées $(x, y, z)$ d'un ombilic vérifient, comme on sait, les relations

$$\frac{A(f'_y)^2 + A'(f'_x)^2 - 2B''f'_x f'_y}{(f'_x)^2 + (f'_y)^2} = \frac{A'(f'_z)^2 + A''(f'_y)^2 - 2Bf'_y f'_z}{(f'_y)^2 + (f'_z)^2}$$
$$= \frac{A'(f'_x)^2 + A(f'_z)^2 - 2B'f'_z f'_x}{(f'_z)^2 + (f'_x)^2}.$$

Or, on a mentionné dans les examens oraux récents de l'École Polytechnique les deux questions suivantes :

1° Lieu des ombilics de la surface

$$f(x, y, z) = ayz + bzx + cxy - 1 = 0, \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1;$$

2° Lieu des ombilics de la surface

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - 2yz - 2zx - 2xy - 1 = 0,$$

dans laquelle on suppose $a + b + c = 0$.

On a immédiatement, dans chaque cas, quatre équations renfermant les paramètres $a$, $b$ et $c$. Est-il possible de faire simplement l'élimination, ce que je cherche vainement?

MAUPIN.

---

**2932.** **[I3b]** (1) En supposant que $p^n - 1$ et $n$ aient un diviseur commun $d$, dans quel cas $p^{\frac{n}{\delta}} - 1$ est-il divisible par $d(p^{\frac{n}{d}} - 1)$, $\delta$ étant un diviseur de $d$? Ceci a lieu, en particulier, pour $\delta = 1$.

Pour les applications de cette question, voir mon article : On finite algebras (*Göttinger Nachrichten*, juillet 1905).

L.-E. DICKSON (Etats-Unis).

---

(1) Reproduction de la question 2932 (1905, 146) déformée par une faute d'impression.

3037. [M'5kα] On désire l'équation rapportée au foyer singulier comme origine et à une droite parallèle à l'asymptote, comme axe des ordonnées, des cubiques circulaires suivantes :

1° Lieu des points d'où l'on voit deux segments $A_1A_2$ et $B_1B_2$ de deux droites sous des angles égaux.

2° Lieu des points dont le produit des distances à deux pôles $A_1$, $A_2$ est égal au produit des distances à deux autres $B_1$, $B_2$.

3° Lieu des foyers des coniques tangentes aux quatre côtés du quadrilatère $A_1A_2B_1B_2$.

L'équation de ces lieux a la forme

$$x(x^2+y^2) = m(x^2+y^2) + dx + ey.$$

On désire l'expression, dans ces divers cas, de $m$, $d$ et $e$ en fonction des coordonnées des quatre points $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$.

*Lino.*

3038. [M'8] Les questions 3011 et 3013 ramènent l'attention sur les courbes

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m - 1 = 0$$

que Bour, je crois, avait envisagées le premier sous le nom de *binomiales*. J'ai fait depuis longtemps une étude assez serrée de ces courbes et, avant de la publier, je désirerais connaître la bibliographie, aussi complète que possible, des travaux auxquels elles ont donné lieu. Je remercie d'avance bien vivement les correspondants qui voudront bien me la donner.

P. Barbarin.

3039. [I1] Quels sont les carrés que l'on peut représenter à l'aide des dix chiffres, chacun n'étant écrit qu'une fois.

Exemple :

$$32043^2 = 1026753849. \qquad 99066^2 = 9814072356.$$

[*Voir* question **1002** (**1897**, 31, 168). *Balbus.*
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

**3040.** [**V**] Dans un manuscrit italien du moyen âge, on trouve un procédé pour résoudre approximativement l'équation $x^3 = ax + bx + c$, équivalant à la division par $x$ et résolution de l'équation $x^2 = ax + b + \frac{c}{x}$, sous la forme

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b + \frac{c}{x}};$$

en effet, si $x_1$ est une valeur approchée de $x$ convenablement choisie, une valeur encore plus approchée est

$$x_2 = \frac{2}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b + \frac{c}{x_1}}.$$

Si $a = 0$, c'est-à-dire si l'on réduit l'équation cubique à la forme $x^3 = bx + c$, on a $x_2 = \sqrt{b + \frac{c}{x_1}}$ et, par ce procédé, on obtient successivement des valeurs de plus en plus approchées de l'inconnue.

Évidemment, $x_n$ est une expression qui ressemble à une fraction continue. Est-ce que les propriétés de cette expression ont été étudiées jusqu'ici?

Eneström (Stockholm).

**3041.** [**I 17 a**] Par extension de la question **2994** (**1906**, 5), à laquelle répond l'identité

$$\begin{aligned}12(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (3a - b - c + d)^2 + 2(b + c + 2d)^2 \\ + 3(a + b + c - d)^2 + 6(b - c)^2,\end{aligned}$$

est-il possible de prouver que tout nombre est de la forme

$$p^2 + 2q^2 + 3r^2 + 6s^2,$$

et, d'une façon plus générale, tout nombre est-il de la forme

$$p^2 + Aq^2 + Br^2 + ABs^2,$$

où A et B sont deux entiers significatifs quelconques, et au sujet de laquelle Lagrange a le premier remarqué que le produit de deux nombres qui y rentrent est un nombre qui y rentre aussi? E. MALO.

3042. **[I23a]** Soit $I = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots$ une irrationnelle développée en fraction continue ordinaire : $I^2$ n'étant pas entier, peut-on établir, au moins dans des cas étendus, que les quotients complets ou incomplets de

$$I^2 = b_0 + 1 : b_1 + 1 : b_2 + \ldots$$

sont limités supérieurement en fonction de ceux de I? Ainsi, les $a_n$ étant $\leqq \alpha$, peut-on assigner une limite supérieure de $b_n$ en fonction de $\alpha$? E. MAILLET.

3043. **[I24b]** Connaît-on un développement en fraction continue de $\pi = 3,141\ldots$ ou d'une fraction rationnelle de $\pi$ sous la forme

$$a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots$$

($a_0$, $a_1$, $a_2$, ... entiers positifs)? Pourrait-on en indiquer un? Même question pour $\log \text{nép.}(1 + \sqrt{2})$ (constante de M. Laisant). E. MAILLET.

3044. **[O2a]** Je désire connaître l'aire de la courbe dont l'équation cartésienne est

$$y = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2\sqrt{a}} \sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - x^2}}$$

ou plutôt l'aire des deux courbes fermées dont se compose cette courbe. La première

$$y = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2\sqrt{a}} \sqrt{a + \sqrt{a^2 - x^2}}$$

est une ovale. La seconde

$$y = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2\sqrt{a}} \sqrt{a - \sqrt{a^2 - x^2}}$$

a la forme d'une lemnicaste.

L'ensemble de ces deux courbes forme la sextique

$$a^2(x^2 + 4y^2 - a^2)^2 + (x^2 - a^2)^3 = 0.$$

*Nester.*

**3045.** [**O7b, T3a**] La surface S et le volume V d'une lentille biconvexe d'épaisseur $e$ et de rayons de courbure R et R', ont pour expressions

$$S = \frac{\pi e}{R + R' - e}[4RR' - e(R + R')],$$

$$V = \frac{\pi e^2}{12(R + R' - e)}[e^2 - 4e(R + R') + 12RR'].$$

Or, je me suis posé le problème suivant : *Si l'on donne dans une lentille biconvexe* V, S *et* $e$, *trouver* R *et* R'. Les formules précédentes permettent de calculer R + R' et RR'. On trouve

$$R + R' = e, \qquad RR' = \frac{e^2}{4}$$

ou

$$R = R' = \frac{e}{2},$$

résultat absurde.

Je serais reconnaissant au correspondant qui pourrait me donner une explication de cette sorte de paradoxe.

*Crut.*

**3046.** [**S3b**$\alpha$ et $\Sigma$] Dans son *Traité d'Hydraulique* (Paris, Baudry, 1891), M. Flamant étudie d'après Kleitz (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1877, 2ᵉ sem., p. 133-196) les crues des cours d'eau qui se propagent dans un lit

*imperméable, sans débordements.* Une des bases du raisonnement est ce fait, regardé comme expérimental, que le débit maximum diminue de l'amont à l'aval s'il n'y a pas d'apports extérieurs. On en conclut que l'on doit observer dans chaque section transversale d'abord le maximum de la vitesse moyenne $u$, ensuite le maximum du débit $q$, enfin le maximum de la hauteur (c'est-à-dire le niveau maximum).

Dans un exemple numérique basé sur des constatations faites lors d'une crue de 1856 sur la Loire, Kleitz déduit *par le calcul* que l'intervalle de temps entre les deux derniers maxima a pu être en moyenne, dans la partie du fleuve considérée, de 4 heures 32 minutes. Ce chiffre est négligeable dans un certain nombre de recherches.

M. Flamant trouve pour un exemple analogue, mais sans dire où il s'applique, 21 heures 36 minutes, chiffre qui peut ne plus être négligeable.

Je désirerais savoir s'il a été fait réellement des observations directes, des jaugeages permettant d'affirmer qu'il y a effectivement, *surtout dans les crues à croissance lente,* une différence de temps appréciable entre les trois maxima précités ou entre deux d'entre eux, et avoir quelques renseignements à ce sujet.

*L'influence de la perméabilité du lit et des débordements,* qui conduit à remplacer l'équation de continuité

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$$

de Kleitz et de M. Flamant par l'équation

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = \lambda,$$

où $\lambda$ peut être suivant les cas positif ou négatif, eu égard à la perméabilité du lit et aux débordements, suffit en effet pour expliquer que le débit maximum des crues aille en diminuant dans la propagation vers l'aval, en particulier à

expliquer que cette diminution soit plus considérable sur certains cours d'eau (Marne, Oise) en été et en automne qu'en hiver, circonstance que n'explique pas l'analyse de Kleitz.

Cette influence suffit aussi pour expliquer l'augmentation de l'amont à l'aval du débit minimum entre deux maxima successifs. E. MAILLET.

**3047. [T2]** D'après une communication à l'Académie des Sciences faite par M. G. Cuénot (*Sur les déformations des voies de chemin de fer, C. R.*, 26 mars 1906) il y aurait pour les traverses de chemin de fer une longueur éminemment favorable à la stabilité transversale des rails. Je désirerais savoir si la question a été soumise au calcul, et si les résultats de ce calcul sont d'accord avec les expériences de M. G. Cuénot. *Zed.*

**3048. [B3a]** Je serais reconnaissant envers le correspondant qui voudrait bien me donner le résultat de l'élimination de $\varphi$ entre les deux relations

$$A\sqrt{\cos\varphi} + B\sqrt{\sin\varphi} = C,$$

$$\frac{D}{\sqrt{\cos\varphi}} + \frac{E}{\sqrt{\sin\varphi}} = F.$$

Comp. **2982** (**1905**, 269). *Neisirab.*

**3048. [I19a]** $x$, $y$, $p$ étant entiers, je trouve que l'équation

$$p^2 = \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}$$

est toujours possible si $p$ est le double d'un impair, sauf 2. Y a-t-il d'autres valeurs de $p$, pour lesquelles la même équation soit soluble (en dehors de la solution banale $x = 1$,

$y = 1$). Quand elle est possible, peut-on déterminer, suivant la valeur de $p$, le nombre des solutions? Il est limité.

A. Boutin.

3049. [**J2e** et **U10b**] Pour le calcul de la latitude d'un lieu, l'observation de $n$ passages d'une étoile et l'observation d'un passage de $n$ étoiles seraient-elles équivalentes : 1° au point de vue des erreurs d'expérience; 2° au point de vue de l'application des moindres carrés?

G. Lemaire (Saïgon).

3050. [**K9**] Ayant souvent à calculer les côtés d'un polygone en fonction des coordonnées de ses sommets, je désirerais connaître les valeurs de $x$ et $y$ qui satisfont à la condition

$$499\sqrt{a^2+b^2} < 500(ax+by) < 501\sqrt{a^2+b^2}.$$

Le résultat seul me serait utile; mais une démonstration élémentaire m'obligerait.

G. Lemaire (Saïgon).

3051. [**V** et **U10b**] Dans quelle Publication et à quelle époque Richard Townley a-t-il demandé la solution du problème de la carte?

Avait-il une solution personnelle, ainsi que le suppose John Collins (*Philosophical Transactions,* 25 mars 1671, p. 2093)?

Si oui, quelle était cette solution?

G. Lemaire (Saïgon).

3052. [**V** et **U10b**] Qui a donné le nom de « chapeaux » aux triangles d'erreur du problème de la carte résolu à la planchette? Ce terme paraît antérieur à 1800.

G. Lemaire (Saïgon).

3053. [**K10c**] Dans l'article intitulé : *The values of* $\pi$ *used by the Japanese mathematicians of the* 17*th* *and*

$18^{th}$ *centuries* (*Bibliotcca mathematica* (3), B. 3, 1902, S. 273) M. le professeur T. Hayashi dit : « Methods by which such exact values were calculated will be seen in prof. *D. Kikuchi's* papers, published in the *Tokyo Sugaku-Butsurigakukwai Kiji*, 7, 1896, p. 24-26, 47-53, 105-110, 114-117 and 8, 1900, p. 179-198 ».

Je ne demande que de brèves indications sur ces méthodes (*Méthodes des mathématiciens japonais des* XVII$^e$ *et* XVIII$^e$ *siècles pour le calcul de* $\pi$).

E. GRIGORIEF (Kazan, Russie).

3054. **[V9]** Cauchy a publié dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* le Mémoire : *Sur les moyens de vérifier ou de simplifier les diverses opérations de l'Arithmétique décimale.*

Quel est le tome, l'année, la page?

Existe-t-il, en français ou en allemand, des Mémoires analogues à celui de Cauchy?

E. GRIGORIEF (Kazan, Russie).

3055. **[K8]** Soient $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ quatre droites situées dans un même plan et dont trois ne passent pas par un même point, c'est-à-dire que $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ forment un quadrilatère complet; $x$, $y$ deux points du plan de ce quadrilatère conjugués isogonaux par rapport à chacun des quatre triangles $a_2a_3a_4$, $a_3a_4a_1$, $a_4a_3a_2$, $a_1a_2a_3$.

A-t-on étudié le lieu géométrique de ces points?

E. GRIGORIEF (Kazan, Russie).

3056. **[I9]** Avec moins de cent mille nombres de trois chiffres *au plus*, je sais construire une Table qui permet de reconnaître si un nombre ne dépassant pas un million est premier; et, si ce nombre n'est pas premier, de trouver ses facteurs premiers.

100 pages in-8°, ou mieux 300 fiches du *Répertoire*

*bibliographique de mathématiques,* suffiraient pour imprimer la Table du premier million.

Pour $n$ millions, la Table serait $n$ fois plus étendue.

Je désirerais savoir dans quelle proportion ma méthode réduit la Table du premier million. G. TARRY.

3057. **[V8]** J'ai acheté les *Éléments d'Algèbre* de Léonard Euler, dont le Tome premier est revu et augmenté de notes par J.-G. Garnier, ex-professeur à l'École Polytechnique et instituteur; édition 1807. Paris, Bachelier, quai des Augustins, n° 55.

Et le Tome second avec des notes et additions, mais par qui, c'est ce qui m'est inconnu. Est-ce par Garnier ou par un autre? Il est dit au commencement des additions que la théorie des fractions continues « doit être peu connue des géomètres; je serai satisfait si je puis contribuer à la leur rendre un peu plus familière;... je détermine les minima qui peuvent avoir lieu dans les formules indéterminées à deux inconnues, surtout dans celles du second ordre ».

On doit connaître toutes les éditions successives de l'*Algèbre* de Euler et je demande à l'amabilité d'un lecteur de l'*I. des M.* de vouloir bien me renseigner sur ce sujet.

N. PLAKHOWO (Russie).

3058. **[M¹3jα]** La podaire d'une courbe de degré $n$ par rapport à un point est en général de degré supérieur à $n$.

Quels sont les cas où cette podaire est, soit de degré $n$, soit de degré inférieur à $n$? E.-N. BARISIEN.

3059. **[A3c]** J'ai acquis la conviction, par des considérations détournées, que l'équation

$$(1)\quad 128(x-a)^6+432a(x-b)(x-a)^4-729a^3(x-b)^3=0$$

avait une racine double.

Lorsque $b=\frac{a}{2}$, l'équation (1) devient

$$(2)\quad 1024(x-a)^6+1728(2x-a)(x-a)^4-729a^2(2x-a)^3=0,$$

ou

$$[32(x-a)^3+27a(2x-a)^2](2x-5a)(4x-a)^2=0.$$

Dans ce cas la racine double est $x=\frac{a}{4}$.

Je désirerais, dans le cas général de l'équation (1), qu'un correspondant démontrât l'existence de la racine double, pour au besoin la calculer. E.-N. Barisien.

**3060.** [**L¹5e** et **M¹6bβ**] Peut-on avoir les coordonnées des points d'intersection réels d'une ellipse et de sa développée? E.-N. Barisien.

**3061.** [**L¹5e** et **M¹6bβ**] En étudiant les développées successives de la parabole, je crois avoir trouvé que le degré de la $n^{\text{ième}}$ développée est $(n+2)$. De même, il me semble que la $n^{\text{ième}}$ développée de l'ellipse est de degré $(4n+2)$.

Un correspondant pourrait-il en donner une démonstration rigoureuse et simple, et passer du degré de la $n^{\text{ième}}$ développée de l'ellipse à celui de la $n^{\text{ième}}$ développée de la parabole, lorsque l'ellipse se transforme en parabole?

E.-N. Barisien.

**3062.** [**M¹3jα**] Je désire connaître la courbe antipodaire d'une développée de parabole par rapport au point de rebroussement de la développée, ou tout au moins savoir le degré de cette antipodaire. *Nester.*

**3063.** [**M¹2d**] Les deux courbes

$$y=(x-1)^3,$$
$$y=(x-2)^5$$

devraient avoir $3\times5=15$ points d'intersection. Or, l'équation

$$(x-1)^3=(x-2)^5$$

ne correspond qu'à 5 points d'intersection. Où sont les 10 autres?

*Onponale.*

3064. [Q1d] Nous avons démontré, en dernier lieu [1], que l'équation

$$(1)\qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

où P, Q, R désignent des fonctions continues arbitraires de $x$, $y$, $z$, est, elle aussi, une des formes sous lesquelles on peut représenter une pseudo-surface. Comme, dans la plupart de nos calculs, des coordonnées obliques pourraient manifestement être substituées aux coordonnées rectangulaires qu'ils impliquent, n'en résulte-t-il pas que l'équation générale

$$(2)\qquad P_1\,ds_1 + P_2\,ds_2 + P_3\,ds_3 + \ldots + P_n\,ds_n = 0,$$

où $P_1, P_2, \ldots, P_n$ désignent des fonctions quelconques des arcs de trajectoires $s_1, s_2, \ldots, s_n$, respectivement tangentes, en son sommet, aux arêtes d'un *trièdre* à $n$ faces, doit nécessairement représenter un certain lieu géométrique contenant les diverses courbes d'intersection des $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ pseudo-surfaces partielles dont les équations respectives, analogues à (1), peuvent être immédiatement déduites de l'équation (2)?

Issaly.

(1) *Voir* les pseudo-surfaces appliquées à la généralisation ou à l'amendement, etc., Hermann, 1906.

# RÉPONSES.

314. (**1894**, 179) (P.-F. Teilhet). — *Démonstration du dernier théorème de Fermat sur l'impossibilité de l'équation*

$$x^n + y^n = z^n,$$

(**1895**, 117, 359; **1905**, 11).

P. Fermat [*Œuvres*, t. I, p. 291 (traduction), t. III, p. 241]; V. Bouniakowsky, *A. P. M.*, 6ᵉ série, t. I, 1831, p. 150-152; L. Calzolari, *A. P. M.*, t. VIII, 1857, p. 339-345; 2ᵉ série, t. VI, 1864, p. 280-186; A. Genocchi, *A. D. M.*, 2ᵉ série, t. VI, 1864, p. 287-288; *C. R.*, t. LXXXII, 1876, p. 910; F. Lucas, *A. Gr.*, t. LVIII, 1876, p. 109-112 (cette démonstration est erronée; voir *J. B.*, t. VII, p. 100); P. Staeckel, *A. M.*, t. XXVII, 1903, p. 125-128).

P.-G. Lejeune-Dirichlet. — *Bemerkungen zu Kummer's Beweis des Fermat'schen Satzes, die Unmöglichkeit von $x^\lambda - y^\lambda = z^\lambda$ für unendliche Anzahl von Primzahlen $\lambda$ betreffend* (*Mo. A. B.*, 1847, p. 139-141; *Werke*, t. II, p. 254-255).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

561 (**1895**, 164; **1903**, 121) (R. Liouville) (**1904**, 287). — Pour une autre propriété géométrique de la surface $xyz = a^3$, voir *N. A.*, 1905, p. 560. (Licence, Caen, novembre 1905.) H. Brocard.

653. (**1895**, 316) (*Milèse*). 685. (**1895**, 401) (W.-W. Beman). — *Origine du mot « prismatoïde »* (**1898**, 151). — Il est bien possible que le mot *prismatoïde* ait été inspiré de celui de *prismate* qui a été employé et probablement imaginé par Adam Fritach. On le trouve, en effet, pages 46 et 47 de son Ouvrage intitulé : *Architecture militaire ou la Fortification nouvelle, etc.*, par Adam Fritach, mathématicien. Paris, 1668. *Voir* le Livre I, Chapitre XIII :

Cubage des terrassements, d'après les Problèmes architectoniques de Pitiscus.

*Prismatoïde* aura ainsi été formé du concours de Fritach et de Bouguer. H. BROCARD.

720. (**1896**, 11; **1905**, 97) (J. REY). — *Solution de l'équation différentielle*

$$ay\frac{d^2y}{dx^2} + bx\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + cy\frac{dy}{dx} + xy^n = 0.$$

Cette équation n'étant pas linéaire (excepté quand $b = 0$, $n = 2$), une solution générale n'en semble pas possible. Mais, à défaut d'une pareille solution, je puis indiquer les solutions suivantes pour des cas particuliers.

1° $b = 0$, $n = 2$. L'équation est linéaire. La substitution

$$y = e^{\int u\,dx}$$

réduit l'équation à la forme

$$a\frac{du}{dx} + x + cu + au^2 = 0;$$

2° $n = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{-(b+c)}}$ est une solution particulière;

3° $n = 2 + \frac{3b}{c}$, $y = \left(-\frac{ac(b+c)}{b^2}\right)^{\frac{c}{3b}} x^{-\frac{c}{b}}$ est une solution particulière.

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

755. (**1896**, 37; **1905**, 100) (H. BOURGET). — *Ouvrages de Legendre.* — Depuis que la question a été proposée en 1896, l'œuvre capitale de Legendre, la *Théorie des Nombres*, a été rééditée par les soins de M. A. Hermann.

Parmi d'autres Ouvrages, non tirés à part, je saisis l'occasion de signaler le discours que Legendre prononça au collège Mazarin, le jour de la soutenance de sa thèse de Mathématique, « en présence de l'Académie royale des Sciences qui en avait agréé la dédicace » (25 juillet 1770, Legendre avait à peine 17 ans).

Ce discours se trouve dans un recueil aujourd'hui assez rare, l'*Année littéraire* de Fréron (t. III, p. 252). Il est suivi de plusieurs strophes d'une ode de circonstance, composée par M. Cosson.

Je crois que ce petit Ouvrage doit prendre un des premiers rangs dans la liste demandée.

Quant aux pièces finales, ce seront vraisemblablement les mémorables correspondances de Legendre et de Jacobi, publiées par J. Bertrand dans les *Annales de l'École normale*, en 1869, puis par Borchardt au *Journal de Crelle*, et rééditées au *Bulletin des Sciences mathématiques*, en 1875, par M. G. Darboux (t. VIII, p. 287-303; t. IX, p. 38-47, 51-95 et 126-142).

H. Brocard.

**788.** (**1896**, 58) (E.-M. Lémeray). — (**1896**, 251; **1898**, 151). — Le théorème relatif au déterminant

$$P = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^p \\ 1 & b & b^2 & \dots & b^p \\ . & . & .. & \dots & .. \\ 1 & l & l^2 & \dots & l^p \end{vmatrix}$$

paraît dû à O. Weber.

*Voir* une Note de Prouhet (*N. A.*, 1856, p. 86-91).

H. Brocard.

**824.** (**1896**, 101; **1905**, 193) (H. Brocard). — *Au sujet de l'équation*

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Voici une bibliographie sommaire qui prouvera que cette question a intéressé à diverses reprises les Mathématiciens.

Goudin. — Usages de l'ellipse dans la trigonométrie sphérique (Paris, 1803). Voir *Mathesis*, 1890, p. 54.

Servois. — *Annales de Gergonne*, t. II, 1811-1812, p. 84. Voir *Mathesis*, 1890, p. 54.

École polytechnique de Paris. — Compositions écrites de 1846 (*N. A.*, 1846, p. 703; Solution, 1847, p. 205).

F. Meyer. — Construction (*J. de Hoffmann*, t. XVIII, 1887, p. 108-109).

Lauvernay. — *Bulletin scientifique*, 1888, p. 60 (voir *J. E.*, 1896, p. 6).

G. de Longchamps. — Construction (*Mathesis*, 1890, p. 127).

Montpellier (Baccalauréat) (*J. E.*, 1895, p. 86).

Rennes (Baccalauréat) (*J. E.*, 1895, p. 87).

A. Droz-Farny. — Construction graphique (*J. E.*, 1895, p. 217-218).

F.-J. Vaes. — Goniometrische Studie (Gorinchem, 1896). Voir *J. E.*, 1897, p. 109-110 et 132.

Lauvernay. — Construction (*J. E.*, 1896, p. 5-6).

E. Lemoine. — Étude géométrographique (*J. E.*, 1896, p. 59-67).

Bernès. — Étude géométrographique (*J. E.*, 1896, p. 84-87).

G. de Longchamps. — Construction (*J. E.*, 1897, p. 132-134).

E. Lemoine. — Étude géométrographique (*M. P. A.*, 1901, p. 49-55).

H. Brocard.

853. (**1896**, 150; **1905**, 241) (G. Eneström). — *Formule de la théorie des différences* (**1906**, 39). — Si je n'ai pas mal entendu les symboles du Formulaire, la réponse de M. Peano se rapporte à une formule équivalant à $u_{a+n} = (1 + A)^n u_a$, tandis que ma question se rapporte à une formule équivalant à

$$\Sigma u_{a+n} = \Sigma(1 + A)^n u_a.$$

G. Eneström (Stockholm),

970. (**1897**, 5) (G. de Rocquigny). — *Le premier mathématicien américain distingué* (**1897**, 162). — Le premier mathématicien américain de distinction est peut-être Nathaniel Bowditch (1773-1838), noté aussi comme astronome. Sa carrière est vraiment remarquable, car il s'est presque entièrement formé lui-même. Il refusa des postes de professeur au Harvard College, à l'Université de Virginie et à l'Académie militaire des États-Unis. Il traduisit la *Mécanique céleste* de Laplace et y ajouta un commentaire soigné. Il fut associé de la Royal Society de Londres et Président de l'Academy of Arts and Sciences (Boston). Il est l'inventeur des courbes connues depuis sous le nom de *courbes de Lissajous*. *Voir* son Mémoire intitulé : *On the motion of a pendulum suspended from two points* [*M. A. Bo.* (1), t. III, 1815, part 2, p. 413-436]. *Voir* encore

Joseph Lovering, *Anticipation of the Lissajous curves* (*P. A. Bo.*, nouvelle série, vol. VIII, 1881, p. 292-298); F. Cajori, *A history of Physics*, 1899, p. 285.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

**1432.** (**1899**, 4) (*Regor*). — Comme Ouvrage élémentaire sur les groupes de transformations, il me paraît utile de signaler :

G. Vivanti (traduct. A. Boulanger), *Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations*, professées à l'Université de Messine (Paris, 1904).

Analyse au *B. D.*, 1905, p. 19-21.

On pourra y ajouter plusieurs écrits de M. E. Pascal analysés dans la *R. T. M.*, 1902, p. 32-34, 174-177; 1904, p. 100 et 101.

H. Brocard.

**2194.** (**1901**, 251) (L. Ripert). — Les constructions demandées sont indiquées dans les deux solutions de la question 18 des *N. A.*, 1855, p. 211-216, 217-221 (Poudra); 1877, p. 142 et 143.

H. Brocard.

**2299.** (**1902**, 66) (*Meglio*). — *Notices scientifiques.* — Les Notices de titres et travaux scientifiques adressées à la Bibliothèque nationale sont uniformément rassemblées à la division Ln²⁷ (Biographies individuelles). On en trouve plusieurs relatives aux mathématiciens, astronomes, etc. dans le catalogue de l'Histoire de France (t. IX, 1865 et t. X, 1870), puis dans le catalogue des Imprimés, dont la publication, commencée en 1897, continue régulièrement. (Lettre A, Tomes I à V; Lettre B, Tomes VI à XXI; Lettre C, Tomes XXII et suiv., sous presse, 1905-1906.) H. Brocard.

**2389.** (**1902**, 175) (*Nester*). — Étant données deux coniques, la courbe lieu des points d'émission de tangentes égales a été indiquée ici. *Voir* nº **2581** (**1903**, 147), réponses (**1903**, 320; **1904**, 199).

Cette courbe est du vingtième degré au plus.

Pour la courbe lieu des points d'émission de deux normales égales, sa recherche paraît plus laborieuse.

Quant au cas particulier où les deux coniques données sont des cercles, le lieu des normales égales ne se réduit pas à une conique,

mais se compose de deux coniques. On voit, d'ailleurs, aisément, qu'il possède quatre sommets et quatre asymptotes.

H. Brocard.

**2724.** (**1904**, 33) (P.-F. Teilhet). — *Décomposition de tout nombre donné de puissances $n^{\text{ièmes}}$* (**1904**, 292). — On trouvera des renseignements bibliographiques dans l'article de M. Albert Fleck : *Ueber die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und als Summen von Biquadraten ganzer Zahlen* (*Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft*, 5e année, 28 juin 1905). L'auteur y montre que tout nombre entier est la somme d'au plus 13 cubes et aussi d'au plus 39 bicarrés de nombres entiers positifs.

E. Maillet.

**2753.** (**1904**, 71) (T. Lemoyne). — *Propriétés des cubiques nodales* (**1904**, 174; **1906**, 19). — M. Retali, dans la réponse qu'il vient de faire à la question 2753 (**1906**, 19) confirme, en terminant, une proposition que j'avais avancée dans ma propre réponse (**1904**, 174, note au bas de la page), mais sous forme dubitative. Je n'avais pas, en effet, poursuivi jusqu'au bout mon calcul, entrepris par une méthode qui n'était pas la plus avantageuse. Depuis lors, je m'étais avisé d'une méthode de calcul plus simple ([1]); mais, comme le résultat d'une part était juste, d'autre part ne se rattachait à la question 2753 que par généralisation, je n'avais pas cru opportun d'y revenir. L'observation de M. Retali m'en fournissant une occasion naturelle, je mentionnerai aujourd'hui que ce nouveau calcul aboutissait à une conclusion beaucoup plus générale, savoir : *Les cordes, joignant les points homologues des deux séries ponctuelles que déterminent sur une courbe d'ordre $m$, possédant un point multiple d'ordre $m-1$, deux faisceaux en involution quadratique issus du point multiple, enveloppent une courbe de classe $n = m - 1$.*

Mais, plus simplement encore que par le calcul, on peut démontrer ce théorème au moyen de la correspondance quadratique birationnelle type, transformant la droite de l'infini dans le cercle

([1]) Indépendamment de tout calcul, le fait, établi pour les involutions rectangulaires, est acquis pour les involutions quelconques, à cause de la projectivité.

circonscrit au triangle exceptionnel ABC, et *vice versa*. En effet, supposant que A soit le point multiple, on aura trois cas, suivant que la courbe contiendra les points B et C, l'un seulement des deux, ou ne passera par aucun. Dans le premier cas, la transformée est d'ordre $m - 1$ avec un point multiple d'ordre $m - 2$ en A, et elle ne contiendra ni B, ni C; dans le deuxième cas, elle sera d'ordre $m$, avec point multiple d'ordre $m - 1$ en A, et elle contiendra celui des points B, C, qui n'appartient pas à la courbe primitive; dans le troisième cas, elle sera d'ordre $m + 1$, avec un point multiple d'ordre $m$ en A et elle contiendra les points B et C. Dans les trois cas, et suivant la nature de la transformation, les faisceaux involutifs déterminant les séries ponctuelles $(\mu)$ et $(\mu')$ se transforment en d'autres faisceaux également involutifs. En somme, les courbes de l'espèce considérée dans l'énoncé ci-dessus forment une chaîne continue de transformées successives.

Supposant donc le seul premier cas, la classe $n'$ de l'enveloppe des cordes $\overline{\lambda\lambda'}$ de la courbe $S_{n-1}$, déduite de $S_n$, est mesurée par le nombre de ces cordes qui passent par exemple par le point B, quelconque par rapport à $S_{n-1}$; mais, par la transformation, toute droite issue de B se change en une autre droite issue aussi de B : par conséquent, il y a $n'$ cordes $\overline{\mu\mu'}$ de la courbe $S_n$ qui passent par B. Seulement B n'est pas quelconque par rapport à $S_n$ et il faut examiner si, par B, ne passeraient pas des cordes qui n'auraient pas de correspondantes proprement dites dans $S_{n-1}$. Or, lorsque $\mu$ vient en B, la direction $\overline{\mu\mu'}$ doit être considérée comme arbitraire, car $\overline{A\mu'}$, conjuguée de $\overline{AB}$, et $\overline{A\mu'_1}$, conjuguée de $\overline{AC}$, peuvent être regardées comme constituant les éléments déterminateurs des faisceaux involutifs de centre A. Il s'ensuit que la transformée $\overline{A\lambda'}$ de $\overline{A\mu'}$ est aussi arbitraire par rapport à $S_{n-1}$, ou du moins peut être regardée comme ne dépendant pas seulement de la transformation, mais encore d'un élément arbitraire. Au contraire, la position limite du point $\lambda$, homologue de $\mu$ venu en coïncidence avec B, ne dépend que de la transformation. Par suite, parmi les cordes $\overline{\mu\mu'}$ passant par B, il y en a une, celle pour laquelle B et $\mu$ coïncident, qui n'a pas de correspondante dans le faisceau des droites $\overline{\lambda\lambda'}$ passant par B : les points $\lambda$ et $\lambda'$ sont bien alors encore déterminés; mais la droite $\overline{\lambda\lambda'}$ n'est pas la transformée de $\overline{\mu\mu'}$ et ne passe pas régulière-

ment par B. On a donc, à partir de B, une corde $\overline{\mu\mu'}$ en surnombre : autrement dit, la classe $n$ de l'enveloppe des cordes $\overline{\mu\mu'}$ de $S_n$ est supérieure d'une unité à la classe $n'$ de l'enveloppe des cordes $\overline{\lambda\lambda'}$ de $S_{n-1}$. Comme on a $n = 1$ pour $m = 2$, $n = 2$ pour $m = 3$, on aura bien d'une façon générale $n = m - 1$.

Quant aux propriétés des enveloppes, ce n'est pas ici le lieu d'y insister. E. MALO.

**2774.** (**1904**, 114) (G. DE ROCQUIGNY). — Cette question est intimement liée à la succession des nombres premiers, dont on ignore la loi, et par suite elle ne paraît pas appelée à donner de résultats décisifs, en dehors de l'essai direct et empirique.

Si $2n$ est le nombre de termes de la série

$$1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + \ldots,$$

on trouve des nombres premiers pour

$$2n = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 14,\ 20,\ 26,\ 30,$$

où il est impossible de formuler de loi, ce qui n'encourage pas à pousser plus loin la recherche. H. BROCARD.

**2778.** (**1904**, 115) (*Carevyge*). — *Le problème de Beeckman.* — Dans les *Œuvres de Descartes* (édition Ch. Adam et P. Tannery), je rencontre une Note de P. Tannery à une Lettre de Descartes au P. Mersenne, du 13 novembre 1629, qui me paraît donner le renseignement désiré.

« Le fragment mathématique contenu dans cette Lettre (13 novembre 1629) doit être d'une rédaction bien antérieure et remonter à l'époque du premier séjour de Descartes en Hollande (de 1617 à juillet 1619) ; c'est, en effet, Beeckman qui lui a posé la question de la loi mathématique de la chute des graves dans le vide. (*Cf.* Lettre à Mersenne du 18 décembre 1629; Clerselier, t. II, p. 483 et les *Cogitationes privatæ;* Foucher de Careil, t. I, p. 16.) A cette époque, Galilée était déjà en possession de cette loi depuis une quinzaine d'années au moins, mais il ne devait la publier que dans les *Massimi Sistemi* de 1632. »

Je ne puis affirmer que ce soit bien là le renseignement demandé. P. Tannery, de regrettée mémoire, l'eût donné avec précision.

En attendant une indication définitive, je me permettrai de rappeler que la sagacité de Descartes fut mise une nouvelle fois à l'épreuve dans une circonstance analogue, lors de sa visite à Ulm, en 1620, au mathématicien Faulhaber, mais j'ignore quel problème celui-ci lui proposa.

La récente découverte, à Middelbourg, du Journal d'Isaac Beeckmann permettra, il faut l'espérer, d'élucider complètement la question.

H. Brocard.

**2797.** (**1904**, 142) (J. Jonesco). — Comme Ouvrage d'enseignement dans lequel on ait distingué les données d'une épure et les lignes de construction ou les lignes remarquables, je mentionnerai, notamment, le Manuel intitulé : *Leitfaden der elementar Mathematik*, de MM. H. Lieber et v. Lühmann, IIIe Partie, Trigonométrie plane et sphérique, etc., réédité par M. C. Müsebeck, Berlin, 1902, in-8°; 180 pages et 124 figures dont plusieurs en traits noirs de grosseur variée, avec lignes de rappel ou de construction et autres en bleu ou en carmin.

Cet artifice typographique facilite beaucoup l'examen des tracés et peut dispenser de la lecture complète du texte.

Dans la *Géométrie de la Règle et de l'Équerre* (1885-1890) M. G. de Longchamps a imaginé aussi une notation des constructions à opérer dans un ordre déterminé pour obtenir certaines courbes.

H. Brocard.

**2803.** (**1904**, 164) (G. de Rocquigny). — $2^{4n+2}$ *est-il somme d'un cube et de deux carrés?* — On a

$$\begin{aligned}
n&=1, & 2^6 &= 64 = 27 + 36 + 1,\\
n&=2, & 2^{10} &= 1024 = 512 + 256 + 256,\\
n&=3, & 2^{14} &= 16384 = 13824 + 2304 + 256,\\
n&=4, & 2^{18} &= 262144 = 250047 + 7056 + 5041.
\end{aligned}$$

La proposition paraît devoir se vérifier pour la suite des valeurs quelconques de $n$.

H. Brocard.

Toute puissance de 2 dont l'exposant est plus grand que 3 est la somme de un cube et de deux carrés différents de zéro.

Cela résulte des formules suivantes

$$
\begin{aligned}
(2^{2n+1})^3 &+ (2^{3n+1})^2 + (2^{3n+1})^2 = 2^{6n+4},\\
(3.2^{2n})^3 &+ (2^{3n+1})^2 + (2^{3n})^2 = 2^{6n+5},\\
(3.2^{2n})^3 &+ (3.2^{3n+1})^2 + (2^{3n})^2 = 2^{6n+6},\\
(3.2^{2n})^3 &+ (5.2^{3n+1})^2 + (2^{3n})^2 = 2^{6n+7},\\
(3.2^{2n})^3 &+ (3.5.2^{3n})^2 + (2^{3n+1})^2 = 2^{6n+8},\\
(3.2^{2n+1})^3 &+ (7.2^{3n+1})^2 + (5.2^{3n+1})^2 = 2^{6n+9}.
\end{aligned}
$$

Toute puissance de 3 excepté la première est la somme de trois carrés

$$
\begin{aligned}
3^{2\alpha+2} &= (2 \times 3^{\alpha})^2 + (2.3^{\alpha})^2 + (3^{\alpha})^2,\\
3^{2\alpha+3} &= (3^{\alpha+1})^2 + (3^{\alpha+1})^2 + (3^{\alpha+1})^2.
\end{aligned}
$$

Toute puissance de 5 et plus généralement d'un nombre N de la forme $x^2+y^2$ est une somme de deux carrés

$$
\begin{aligned}
N^{2\alpha+1} &= (xN^{\alpha})^2 + (yN^{\alpha})^2,\\
N^{2\alpha+2} &= (2xyN^{\alpha})^2 + [(x^2-y^2)N^{\alpha}]^2.
\end{aligned}
$$

Toute puissance de 11 est la somme de trois carrés

$$
\begin{aligned}
(11)^{2\alpha+1} &= (3 \times 11^{\alpha})^2 + (11^{\alpha})^2 + (11^{\alpha})^2,\\
11^{2\alpha+2} &= (3^2 \times 11^{\alpha})^2 + (6 \times 11^{\alpha})^2 + (2 \times 11^{\alpha})^2.
\end{aligned}
$$

Plus généralement, si deux puissances consécutives d'un nombre sont chacune somme de trois carrés, toutes les puissances suivantes sont aussi somme de trois carrés.

Soit

$$
N^m = x^2+y^2+z^2, \qquad N^{m+1} = a^2+b^2+c^2,
$$
$$
\begin{aligned}
N^{2\alpha+m} &= (xN^{\alpha})^2 + (yN^{\alpha})^2 + (zN^{\alpha})^2,\\
N^{2\alpha+m+1} &= (aN^{\alpha})^2 + (bN^{\alpha})^2 + (cN^{\alpha})^2.
\end{aligned}
$$

H.-B. Mathieu (Saïgon).

**2827.** (**1904**, 239) (E.-N. Barisien). — *Lieu de centres de cercles* (**1904**, 303; **1905**, 60, 228; **1906**, 40). — M. Retali a parfaitement raison et j'ai commis dans l'évaluation de l'ordre du second lieu la faute que Pascal, dans son Opuscule sur l'*Esprit géométrique*, appelle *dénombrement incomplet*. Il n'était pourtant pas difficile de

reconnaître que chacune des deux tangentes à la conique, parallèles à la droite, constitue avec la droite de l'infini un cercle dégénéré improprement tangent à la droite, et qu'ainsi sur chaque perpendiculaire à celle-ci il y a deux points fixes (à l'infini) et six points variables, en tout *huit*. Mais qui peut se dire entièrement à l'abri de ce genre de distraction?

Ce qui me surprend bien davantage, c'est qu'ayant fait un calcul de vérification parfaitement exact, et simplement omis, pour faire court, dans ma Réponse (**1904**, 302), j'aie pu le lire tout de travers. Ce calcul, pour être un peu plus compliqué que celui relatif au premier cas de la question **2827**, ne l'est pourtant pas au point qu'il ne puisse trouver place ici. Soient : $x = 0$ l'équation de la droite,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy = 0$$

celle de la conique donnée,

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 = 0$$

celle du cercle variable; les invariants du système sont

$$\Delta = 2fgh - af^2 - bg^2, \qquad \Delta' = -3\beta^2,$$
$$\Theta = (ab - h^2)\alpha^2 - 2(hf - bg)\alpha - 2(gh - af)\beta - f^2 - g^2,$$
$$\Theta' = a(\alpha^2 - \beta^2) + 2h\alpha\beta + 2g\alpha + 2f\beta.$$

On a donc pour $\Theta$, $\Theta'$, $\Delta'$ des fonctions quadratiques de $\alpha$, $\beta$, coordonnées du centre du cercle, et la condition de contact

$$4\Delta\Theta'^3 + 4\Delta'\Theta^3 - 18\Delta\Delta'\Theta\Theta' - \Theta^2\Theta'^2 + 27\Delta^2\Delta'^2 = 0,$$

qui est du quatrième ordre dans son dernier terme, du sixième dans les termes de rang 1 et 3, monte au huitième dans les deux termes de rang pair. Rien n'est plus propre à montrer comment la plus légère idée préconçue peut empêcher d'apercevoir ce qui, véritablement, crève les yeux.

E. Malo.

**2835.** (**1904**, 258) (Hoffbauer). — Si dans une ellipse on se donne

$$c^2 = a^2 - b^2, \qquad d^2 = a^2 + b^2, \qquad e = \frac{c}{a},$$

on a

$$\frac{c}{d} = \frac{e}{\sqrt{2 - e^2}}.$$

Je ne me souviens pas d'avoir rencontré ce rapport dans quelque propriété de l'ellipse. H. **Brocard.**

**2839.** (**1904**, 259) (**Ferber**). — *Systèmes d'équations différentielles* (**1905**, 64). — Cette question se rattache à un récent travail de M. Ferber sur l'Aviation (*Revue d'Artillerie*, octobre, novembre 1905). *Voir* la réponse à **2893** (**1906**, 114). E. **Maillet.**

**2853.** (**1904**, 285) (E. **Maillet**). — *Erreurs des mathématiciens* (**1905**, 275; **1906**, 65). — Legendre, dans l'une des éditions de ses *Éléments de Géométrie* (peut-être l'erreur a-t-elle été supprimée dans des éditions suivantes), donne au Livre III, problème XIX, une construction, d'ailleurs fort élégante, pour trouver, dit-il, la commune mesure, s'il y en a une, entre la diagonale et le côté du carré. Il trouve une série de restes, qui vont toujours en décroissant, et il ajoute : « De là on voit que l'opération ne sera jamais terminée, et « qu'*ainsi* il n'y a pas de commune mesure entre la diagonale et le « côté du carré, etc. »

Il est visible que ce raisonnement revient à dire que la somme d'une série composée d'une infinité de termes ne peut jamais être commensurable, ce qui est absurde.

C'est évidemment un *lapsus calami;* on ne saurait croire qu'un homme tel que Legendre aurait persisté dans une erreur semblable, s'il y avait fait attention.

Il ajoute que sa construction représente la fraction continue

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}},$$

ce qui est exact. Quant à ce que dit M. Laurent sur le lemme de Lambert, Legendre n'en a pas écrit, dans ce passage, une seule syllabe.

En ce qui concerne Euclide, je n'ai jamais cru, ni dit, ni écrit, qu'Euclide ait commis des erreurs de doctrine, ou bien, si je l'ai écrit, c'est que j'ai manqué d'attention et que Zeus m'a enlevé l'esprit dans ce moment-là, comme il l'a enlevé à Legendre :

ἐμοὶ φρένας ἐξέλετο Ζεύς.

Ce que je pense, c'est que le texte d'Euclide a été, dans certains

endroits, massacré par les copistes, et que cet auteur a eu à cet égard la même mauvaise fortune que Sophocle et Virgile, et bien d'autres. D[r] PROMPT (Turin).

D'après le texte de l'édition de 1794 (la première, je crois) de la *Géométrie* de Legendre, il m'a semblé comprendre que l'opération en question est une opération analogue à celle du plus grand commun diviseur et qui, dans l'espèce, d'après ce qui a été dit au problème XVII, Livre II, devrait se terminer s'il y a une commune mesure entre la diagonale et le côté du carré.

De toutes façons, la *Géométrie* de Legendre est assez répandue pour que le lecteur puisse se former lui-même, s'il le désire, un avis sur la question, en adoptant ou non une des opinions émises.

E. MAILLET.

**2861.** (**1905**, 6) (T. LEMOYNE). — *Extensions du théorème de Brianchon* (**1905**, 183). — La question est un peu indéterminée. On ne sait pas si son auteur a en vue des théorèmes tels qu'un certain nombre de diagonales d'un polygone passent par un point ou des théorèmes qui ont pour cas spécial celui de Brianchon, quand la courbe dégénère et qui sont donc vraiment des généralisations du théorème de Brianchon.

Pour ce dernier cas, je vais donner *un exemple* connu :

*Si l'on a un hexagone* 1 2 3 4 5 6 *tel que les côtés* 1-2, 2-3, ..., 5-6, 6-1 *touchent une courbe de la troisième classe et si les diagonales* 1-4, 2-5 *touchent la même courbe* (*qui est donc au moins du quatrième ordre*) *la diagonale* 3-6 *touche aussi la courbe.*

Or une courbe générale de la troisième classe est toujours composée d'un ovale et d'un trait doué de trois rebroussements (*Dreispitz* en allemand = tricorne), et si l'hexagone 1 2 3 4 5 6 est circonscrit à l'ovale, les trois diagonales touchent le Dreispitz.

Alors, si la courbe dégénère, l'ovale devient une conique, tandis que le Dreispitz se réduit à un point et l'on a le théorème de Brianchon.

Le théorème généralisé est le réciproque d'un théorème, généralisation du théorème de Pascal et qui est la conséquence d'un théorème général sur les intersections des courbes, connu sous le nom de *paradoxe de Cramer*.

*Voir*, par exemple, ma *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung* (*Sammlung Schubert*, t. XLIII, p. 184 et 185; G.-J. Göschen, Leipzig, 1905), où l'on trouve une figure exacte illustrant la généralisation du théorème de Pascal.

H. WIELEITNER (Spire).

2873. (**1905**, 26) (LAZZARO FILUS). — *Problème de Bachet* (**1905**, 119, 144). — Ce problème équivaut à un autre problème proposé par Bachet :

*Trouver le plus petit nombre de poids permettant de peser tous les poids de* 1 *à* .... *Si les poids ne peuvent être mis que dans un plateau de la balance ces poids sont* 1, 2, 4, 8, 16, .... *S'ils peuvent être mis dans les deux plateaux ce sont* 1, 3, 9, 27, 81, ....

En correspondance avec ce problème, nous aurons deux suites de cartons : l'une positive, l'autre négative.

| Suite positive. | | | | Suite négative. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **3** | **9** | **27** | **1** | **3** | **9** |
| 1 | 2 | 5 | 14 | 2 | 5 | 14 |
| 4 | 3 | 6 | 15 | 5 | 6 | 15 |
| 7 | 4 | 7 | 16 | 8 | 7 | 16 |
| 10 | 11 | 8 | 17 | 11 | 14 | 17 |
| 13 | 12 | 9 | 18 | 14 | 15 | 18 |
| 16 | 13 | 10 | 19 | 17 | 16 | 19 |
| 19 | 20 | 11 | 20 | 20 | 23 | 20 |
| 22 | 21 | 12 | 21 | 23 | 24 | 21 |
| 25 | 22 | 13 | 22 | 26 | 25 | 22 |
| | | | 23 | | | |
| | | | 24 | | | |
| | | | 25 | | | |
| | | | 26 | | | |
| | | | 27 | | | |

Les nombres de la première ligne ou *clefs* ne doivent pas être inscrits sur les cartons. Le nombre pensé peut être trouvé en ajoutant les nombres clefs de la première ligne des cartons positifs

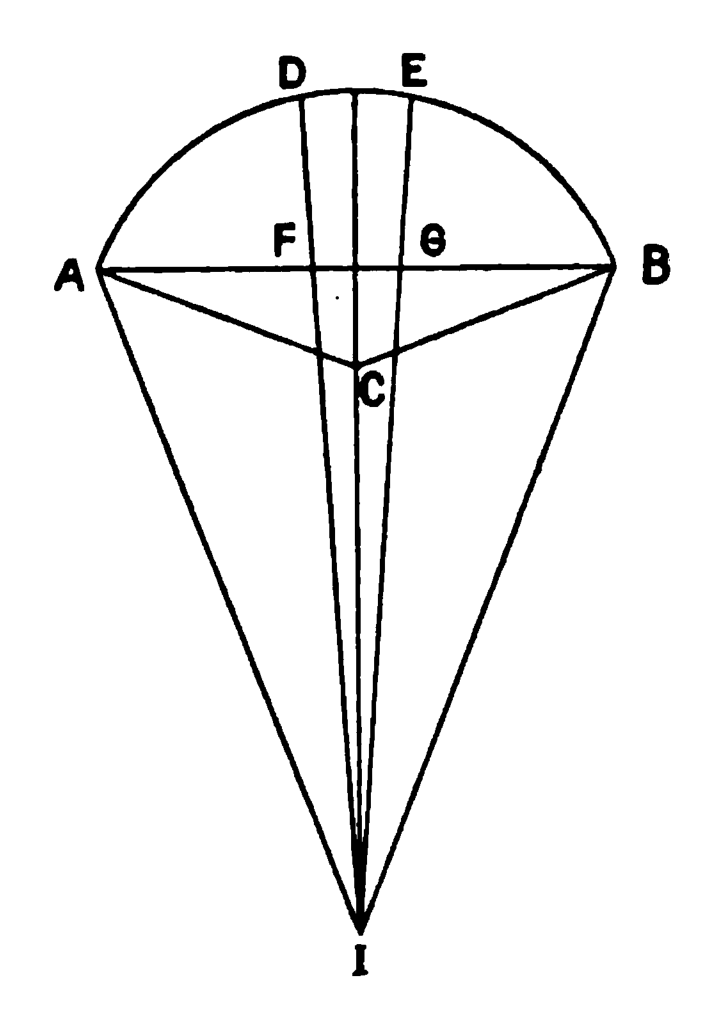
et retranchant de la somme celle des nombres clefs des cartons négatifs. Exemple : si un nombre se trouve dans les colonnes ayant pour nombres clefs 1, 3, 27 pour les cartons positifs, et 9 pour les cartons négatifs, ce nombre est

$$1 + 3 + 27 - 9 = 22.$$

La loi de ces nombres est la suivante : Si $r$ est le nombre clef, il y a dans la colonne marquée $r$ une succession de $r$ nombres consécutifs et une lacune de $2r + 1$ nombres. Les nombres clefs sont des puissances de 3. Les nombres en tête des colonnes, 1, 2, 5, 14, 41, ... ont pour différence deux à deux les nombres de la progression géométrique 1, 3, 9, 27, ....

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

**2879** (**1905**, 27) (*Belga*). — *Division approchée d'un arc en n parties égales* (**1905**, 233, 251). — Cette méthode, appliquée à la




division d'une demi-circonférence en $n$ parties égales, est bien connue. *Voir* E. Catalan, *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6e éd., p. 277-279, où l'on trouve une brève discussion et des références bibliographiques. L'approximation suivante semble plus avantageuse.

On divise la corde de l'arc AB en $n$ parties égales; soient F, G les points de division les plus voisins du centre. L'arc étant aussi divisé, soient D, E les points les plus voisins du centre de l'arc; DF et EG couperont le diamètre perpendiculaire à la corde au point I qui est à la distance $CI = 1,75\ AC$ quand l'arc AB est à peu près égal à une demi-circonférence et que $n$ est $> 4$.

Si l'arc AB est petit, $CI = 2AC$ [*voir* réponse à la question **1489** (**1899**, 212) ou *S. M.*, 1891].

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

**2883.** (**1905**, 28) (E.-N. Barisien). — Je ne connais pas d'étude sur la division de la ligne des centres de deux cercles suivant une puissance des rayons.

Tout ce que je puis en dire, c'est que la corde commune à deux cercles orthogonaux divise la ligne des centres en segments proportionnels aux carrés des rayons.

Je ne crois pas que les centres de similitude de deux cercles doivent être considérés comme cas particulier des points de division en puissances plus élevées. C'est le contraire qui s'est présenté en réalité dans le développement historique et naturel de cette définition. H. Brocard.

**2892.** (**1905**, 52) (*Matito*). — *Concours d'aviation* (**1905**, 96). — *Voir* un article de M. Ferber sur l'aviation (*Revue d'Artillerie*, août 1905) et la réponse à **2893** (**1906**, 114) ci-dessous.

E. Maillet.

**2893.** (**1905**, 52) (*Matito*). — *Écrits récents sur l'aviation* (**1905**, 167). — *Voir* encore :

Ferber, *Les progrès de l'aviation par le vol plané* (suite) (*Revue d'Artillerie,* août, octobre, novembre 1905), où l'on trouve de nombreuses et suggestives gravures.

Dans l'article d'août, M. le capitaine Ferber rend compte des récents essais relatifs aux trois classes de machines volantes, orthoptères, hélicoptères, aéroplanes, et du concours d'aviation de l'Aéro-Club en février 1905 (*Voir* **1905**, 52, 96), ainsi que de nouvelles expériences personnelles.

Dans les articles d'octobre et novembre 1905, M. Ferber développe

une savante théorie du mouvement des aéroplanes et de la stabilité de ces mouvements, théorie à laquelle se rattache la question **2839** (**1904**, 259 ; **1905**, 64). Il trouve, en s'inspirant des idées de M. G.-H. Bryan [*Stability of aerial gliders* (*Proceedings of the Royal Society* de Londres, vol. LXXIII, juin 1903)], une série de résultats qui paraissent importants pour la construction et le fonctionnement des aéroplanes. Il indique en même temps diverses vérifications expérimentales, et annonce un nouvel article sur la question.

On pourra également consulter plusieurs Communications relatives à l'Aviation dans les *C. R.*, 1905 et 1906. E. MAILLET.

**2903.** (**1905**, 76) (E.-B. ESCOTT) (**1905**, 207; **1906**, 25). — On remarquera l'analogie des équations

$$x^2+y^2=r^2+1, \qquad x^2-y^2=s^2-1$$

avec les équations

$$x^2+y^2=r^2+1, \qquad x^2-y^2=s^2+1$$

tirées du *Lilavati* et proposées dans la question **206** (*N. A.*, 1849, p. 107, résolue 1850, p. 116-118; 1851, p. 80-85; 1875, p. 63-66 et p. 178). H. BROCARD.

**2912.** (**1905**, 105) (E. REMY). — (**1906**, 44). — Autres références :

SANNA SOLARO. — Recherches sur les causes et les lois des mouvements de l'atmosphère. Vents rectilignes (Paris, Gauthier-Villars, 1870).

A. ANSART. — Essai sur la mécanique des vents et des courants (Paris, Gauthier-Villars, 1874).

A. ANSART. — Théorie rationnelle des ouragans (*Revue maritime et coloniale*, 1875).

CLEVELAND ABBE. — Short Memoirs of meteorological subjects (traduction de onze mémoires de Hahn, Sohncke, Reye, Ferrel, Colding et Peslin, de 1871 à 1874) (*Smithsonian Report*, 1877, p. 376-478).

CLEVELAND ABBE. — Recent progress in dynamic meteorology (*Smithsonian Report*, 1888, p. 355-424).

C.-L. WEYHER. — Sur les tourbillons, trombes, tempêtes et sphères tournantes, 1889.

H. HILDEBRANDSSON et L. TEISSERENC DE BORT. — Les bases de la

Météorologie dynamique, 2 volumes (Paris, Gauthier-Villars, 1898 à 1903).

H. BROCARD.

**2914.** (**1905**, 106) (PAULMIER). — *Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde* (**1905**, 236, 284). — Autre solution extrêmement simple qui consiste à transformer homographiquement l'ellipsoïde en sphère.

Soient :

$a'b'a'b'$ l'axe vertical ;
$c'd'c'd'$ l'axe debout;
$e'f'e'f'$ l'axe parallèle à LT;
$\Delta\Delta'$ la droite.

Traçons les cercles de diamètres $efe'f'$ qui coupent $cd$ en $c_1$ et $a'b'$ en $b'_1$. Menons parallèlement, à LT, $b'm'$ et $cn$ qui coupent $\Delta'$ en $m'$ et $\Delta$ en $n$, et rappelons ces points en $m'_1$ à la cote de $b'_1$ et en $n_1$ à l'éloignement de $c_1$. En joignant $n_1$ au point $h$ où $\Delta$ coupe $ef$, puis $m'_1$ au point $k'$ où $\Delta'$ coupe $e'f'$, nous avons une droite $(hn_1, k'm'_1)$ qui est la transformée de $\Delta\Delta'$.

Nous construisons à la manière habituelle les points de rencontre de cette transformée avec la sphère $efe'f'$ ; soient $p_1$, $q_1$ les projections horizontales de ces points, leurs lignes de rappel coupent $\Delta\Delta'$ aux points cherchés $pp'$, $qq'$.

Cette méthode permet de construire également avec une exactitude absolue et le minimum de tracés les projections d'une section plane de l'ellipsoïde, dont on a immédiatement deux diamètres conjugués.

On peut l'appliquer à une quadrique quelconque (paraboloïde hyperbolique excepté), en ramenant cette quadrique à être de révolution (Méthode de M. Rouché).

Quant au paraboloïde hyperbolique, le tracé le plus simple consiste à employer un paraboloïde auxiliaire ayant une génératrice et un plan directeur communs avec le paraboloïde donné et passant par la droite $\Delta\Delta'$. Ces deux surfaces se coupent suivant deux droites qu'il n'y a plus qu'à faire rencontrer avec $\Delta$ ; on les a par les rayons doubles de deux faisceaux homographiques.

P. BARBARIN.

**2917.** (**1905**, 124) (M. PETROVITCH). — *Fonctions entières.* — La fonction $G(z) = a + (b - a)e^{-e^z}$ jouit de la propriété demandée : pour $z = \infty$ elle tend vers $a$ ou vers $b$ suivant le signe de $R(z)$.

[Si $z = x + y\,i$, $x = R(z)$]. Mais je crois qu'il y a lieu de se demander s'il existe des fonctions entières tendant vers chacune des $n$ limites finies et déterminées $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ lorsque $z$ augmente indéfiniment avec une infinité d'arguments. Existe-t-il une relation entre $n$ et le genre de la fonction? M. PETROVITCH (Belgrade).

**2925.** (**1905**, 129) (FITZ PATRICK). — *Sur l'affaire Vrain-Lucas* (**1905**, 255). — I. Ce qu'était Vrain-Lucas. *Voir* le *Supplément Larousse*, 1878.

II. Ses condamnations. Février 1870, février 1876 et septembre 1876 (4 années d'emprisonnement).

Sorti de prison le 4 octobre 1880, il fut arrêté, à quelques jours de là, dans un garni de la rue Saint-Honoré, et traduit devant le tribunal correctionnel de la Seine pour rupture de ban (il avait reçu l'ordre de résider à Châteaudun, dans le canton duquel il était né, à Lanneray, en 1818).

III. Les *Comptes rendus* des séances de l'Académie des Sciences, tomes LXV, 2e semestre 1867, à LXIX, 2e semestre 1869, et la *Revue des Cours scientifiques* (même période) contiennent tous les détails de la mystification, avec intervention de nombreux savants : Faugère, Govi, Brewster, Secchi, Le Verrier, Chevreul, Duhamel, Dumas, etc.

IV. Pour différents détails, *voir* plusieurs Ouvrages spéciaux, parmi lesquels :

*Glanes et regains*, par le marquis de Duprat. *Affaire Vrain Lucas*, par Jacques Charavay aîné. *Le truquage, altérations, fraudes, contrefaçons dévoilées*, par Paul Eudel (Paris, Rouveyre, 1903) où l'on trouve (p. 279-291) les billets d'Alexandre, de Cléopâtre, de Lazare le ressuscité, de Marie-Madeleine et de Vercingétorix.

V. A la fin de son article, M. Eudel dit que « sans doute on aura fait disparaître les élucubrations abracadabrantes de Vrain Lucas dans un immense autodafé ». Je me permets de rappeler qu'on en a conservé quelques-uns, car on rencontre la Note suivante au Catalogue des manuscrits de la Bibliothèque nationale (Nouv. acquis. fr. n° 709) : « Specimen des faux autographes fabriqués par Vrain Lucas, ... et vendus à M. Michel Chasles. »

Faux autographes (tous en français) d'Abélard, Alcuin, Ausone,

Boccace, Charles-Martel, Charlemagne, Charles V, Cléopâtre, Christophe Colomb, Dagobert Ier, Dante, Galilée, Jeanne d'Arc, St Jérôme, Fl. Josèphe, Joinville, Jules-César, Lazare le ressuscité, Louis XIV, Ste Marie-Madeleine, St Matthieu, Molière, Pascal, Pétrarque, Platon, Pythagore, Rabelais, Sapho, Socrate, Théophraste, Vercingétorix, etc.

VI. Dans la même classe de manuscrits *B. N.*, n° **4291**, on trouve une prétendue note de Vrain Lucas, au titre d'Henriette Marie de France, ex-reine des Anglois.

VII. Dans le roman d'Alphonse Daudet l'*Immortel*, paru en 1888, on voit un personnage, Astier Réhu père, victime d'un audacieux falsificateur d'autographes, qui lui vend fort cher des lettres authentiques d'Annibal, de Jules-César et de Jésus-Christ. L'allusion à l'affaire Vrain-Lucas est manifeste. H. BROCARD.

**2948.** (**1905**, 172) (A. GRÉVY). — *Vie de Gaspard Monge* (**1906**, 47). — Voici encore quelques indications biographiques très intéressantes à signaler.

I. — On retrouvera à la Bibliothèque nationale, division Ln27 : Biographies individuelles (Catalogue de l'Histoire de France), plusieurs des références indiquées ici, p. 47-48. Je rappellerai, notamment, celles de Barnabé BRISSON, de F. ARAGO (lecture du 11 mai 1846), de Ch. DUPIN, de J.-F. Jules PAUTET, de PONGERVILLE, auxquelles il faut ajouter :

Éloge funèbre de M. Monge comte de Peluze... par un élève de l'École Polytechnique [GUYON] précédé d'une Notice sur la vie et les ouvrages de cet homme célèbre. Paris, 1818.

F. RAVAILHE. — Éloge de Gaspard Monge. Beaune, 1849.

JOMARD. — Souvenirs sur Gaspard Monge et ses rapports avec Napoléon, suivis d'un appendice relatif au monument qui lui a été élevé par sa ville natale, ainsi qu'à l'expédition d'Égypte et à l'École Polytechnique. Paris, 1853.

II. — La bibliographie de l'œuvre scientifique de Monge est donnée très complètement dans la *France littéraire* de QUÉRARD.

III. — Le *Journal de l'École Polytechnique* débute en 1794 par un Mémoire de Monge, *la Stéréotomie* (14 pages).

Pour d'autres travaux de Monge *voir* au 6[e] cahier (1799) : *Des courbes à double courbure* (p. 345-363); au 11[e] cahier (1802) : Mémoires sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes : 1° à la surface d'une même sphère, 2° à une même surface conique à base arbitraire (p. 28 à 86). Application de l'Algèbre à la Géométrie (en collaboration avec Hachette) (p. 142 à 172);

Au 13[e] cahier (1806) : Mémoire sur les surfaces courbes dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable quelconque (p. 1 à 40); De la surface courbe qui enveloppe l'espace parcouru par une sphère variable de rayon, dont le centre parcourt une courbe à double courbure quelconque (p. 41 à 59);

Et au 15[e] Cahier (1809) : Essai d'application de l'Analyse à quelques questions de Géométrie élémentaire (p. 68 à 117) et Construction de l'équation des cordes vibrantes (p. 118 à 145).

IV. — Pour des autographes de Monge, en dehors des Archives nationales, *voir :* Bibliothèque nationale, nouvelles acquisitions, mss. 31, 1306 et 2762; et Bibliothèque d'Aix, ms. 1292.

V. — Pour un exposé très précis de la carrière politique de Monge, voir le *Dictionnaire des Parlementaires français*, de Robert, Bourloton et Cougny. Monge a été comte de Péluse, ministre, député au Conseil des Cinq-Cents et au Conseil des Anciens, membre du Sénat conservateur et pair des Cent-Jours. H. Brocard.

**2954.** (**1905**, 200) (*Rudis*). — *Fractions continues* (**1906**, 28). — Tout en remerciant M. Kœchlin de son obligeance à s'occuper de la question **2954**, je suis dans la nécessité de lui faire remarquer que sa réponse effleure à peine le sujet. Il ne s'agit pas d'établir ni qu'une quantité numérique définie par un développement en fraction continue périodique est racine d'une équation du second degré, ni que, une telle équation étant donnée, on peut assigner immédiatement le développement de ses racines en fraction continue à période d'un seul terme, le numérateur et le dénominateur de chaque fraction intégrante étant les coefficients mêmes de l'équation. Ce que je voudrais savoir, c'est si, fixant *a priori* la valeur $t$ du numérateur commun de toutes les fractions intégrantes, la suite des dénominateurs est périodique, ce qu'on reconnaît facilement être un cas fréquent, mais ce qu'on est moins facilement en mesure de déclarer le cas normal, parce que les deux circonstances essentielles qui inter-

viennent dans la démonstration de la périodicité pour $t = 1$ ne se rencontrent plus dès lors que $t$ a toute autre valeur. Je ne laisse pas d'apercevoir un moyen d'aborder la question, mais celle-ci ne me paraît pas sans difficulté.

Je me permets d'indiquer à M. Kœchlin l'équation

$$7x^2 - 8x - 1 = 0,$$

dont il s'agirait de développer la racine positive en fraction continue de la forme

$$a + \cfrac{5}{a_1 + \cfrac{5}{a_2 + \dots}},$$

ou simplement de fixer le nombre de termes à la période.

*Rudis.*

**2956** et **2957**. (**1905**, 221) (G. Lemaire) (**1905**, 287; **1906**, 30, 72). — *Voir* aussi :

Association géodésique internationale. Congrès de Nice en 1887. Adoption d'une formule proposée par M. Ferrero.

L. Kruger. — Sur la compensation des polygones et des chaînes de triangles géodésiques et sur la formule internationale d'approximation pour l'erreur angulaire moyenne (*Z. S.*, t. XLVII, 1902; p. 157-196).

A. Klingatsch. — La détermination du point le plus favorable pour le recoupement en arrière (*Z. S.*, t. XLVIII, 1903, p. 473-487).

J. Collet. — Compensation des figures géodésiques. Théorie et applications. Extrait des Leçons de Géodésie professées à la Faculté des Sciences de Grenoble. 44 pages grand in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1905. H. Brocard.

**2964**. (**1905**, 242)(G. Lemaire). — Je crois que l'invention de la Stadia par Green, opticien à Londres, date de 1778.

Je ne connais pas de biographie de cet inventeur.

En ce qui concerne Porro (Ignace), les renseignements sont assez nombreux.

D'après Vapereau et Larousse, Porro est né à Pignerol en 1795. Élève de l'École militaire de Turin; officier du Génie piémontais; chargé depuis 1822 de diverses missions géodésiques; quitta Turin

en 1847 pour voyager en Europe et se fixer à Paris où il fonda un Institut technomatique.

A publié : Essai sur les moteurs hydrauliques, 1839. — Traité de Tachéométrie, 1847. — Sur le perfectionnement pratique des appareils optiques pour l'Astronomie et pour la Photographie, 1858. — Étude sur le cadastre des terres, 1860 (avec M. Robinier).

A fait figurer ses inventions à l'Exposition universelle de Paris (1855) : lorgnon longue-vue ou longue-vue Napoléon III, et une lunette astronomique ou grand réfracteur, une des plus grandes construites jusqu'alors.

Ses principaux actes scientifiques peuvent se reconstituer avec précision au moyen de la liste assez longue de ses Communications à l'Académie des Sciences (*C. R.*, t. XXII, 1846, à t. XLVIII, 1859). Pour l'Anallatisme, *voir* t. XXVIII, 1849.

En collaboration avec Amici, il a doté la Stadia d'une lunette à objectif achromatique quadruple (formé de quatre verres, flint et crown). H. Brocard.

**2973.** (**1905**, 266) (E. Maillet). — *Applications de l'Analyse aux travaux publics.* — Je me permets de conseiller de parcourir le compte rendu bibliographique sommaire que j'ai donné des quatre collections suivantes dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* :

*Annales des Mines* (de 1872 à 1900);
*Annales des Ponts et Chaussées* (de 1871 à 1900);
*Mémorial de l'Officier du Génie* (de 1803 à 1885);
*Revue d'Artillerie* (de 1872 à 1900).

Je me suis précisément proposé de relever les applications des Mathématiques à la technique des travaux publics. La statistique désirée sera donc facile à établir. H. Brocard.

J'ai eu la même préoccupation que vous lorsque j'ai rédigé une partie du *Traité d'Analyse* (*Rouché-Lévy*). Ainsi, Tome II, page 350, je donne l'équation de la méridienne provenant de la déformation d'une plaque circulaire encastrée sur le pourtour et chargée au centre :

$$y = -\int \frac{Q}{2} x \log \frac{r}{x} \, dx;$$

page 629, j'intègre l'équation

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = -k\frac{z}{x^m},$$

rencontrée par M. Jean Résal en cherchant l'action de la chaleur sur une console encastrée, etc. etc. L. Lévy.

Dans l'Ouvrage de M. Greenhill : *Fonctions elliptiques et leurs applications* (traduction française de Griess) figurent quelques applications dignes d'intérêt et relatives aux machines. En particulier, il faut citer le mouvement du régulateur de Watt (p. 113 et suiv.).

« Les oscillations du régulateur de Watt entre les limites extrêmes $\alpha$ et $\beta$, lorsque le régulateur tourne avec la vitesse angulaire constante $w$, sont déterminées par les équations

$$\tang\frac{\theta}{2} = \tang\frac{\alpha}{2}\,dn\,(nt, k'), \qquad k' = \frac{\tang\frac{\beta}{2}}{\tang\frac{\alpha}{2}},$$

$\psi$ désignant l'angle que fait l'un des bras du régulateur avec la verticale à l'instant $t$. » J. Rose.

**2974.** (**1905**, 266) (G. Lemaire). — *Problème de la Carte.* — Le problème de la Carte a été résolu, pour la première fois, par Snellius, dans son *Eratosthenes Batavus* qui parut à Leyde, en 1617 (Liv. II, Chap. X, p. 199 et 200). Puisqu'on semble l'avoir oublié, je rappellerai en quelles circonstances. C'était par un rigoureux hiver. Snellius avait mesuré la base de sa triangulation sur les vastes prairies inondées des environs de Leyde, transformées par le froid en un immense champ de glace. Il s'agissait de la raccorder avec son observatoire dont il avait soigneusement déterminé la méridienne. Comme des prairies il n'apercevait pas son observatoire, il fixa d'abord, par des triangles, la position de trois tours : les Halles, Saint-Pierre et Saint-Pancrace; puis, au moyen de ces points de repère, il fixa la position de son observatoire, par la méthode du problème dit *de la Carte*. Snellius se servit du calcul comme nous le ferions encore de nos jours, mais sans faire usage des logarithmes qui venaient d'être inventés par Neper (1614) et dont il ne semble jamais avoir bien apprécié l'importance. H. Bosmans.

**2978.** (**1905**, 266) (G. Lemaire). — *Disposition de l'appareil Bauernfeind.* — Voir *B. D.*, t. IV, 1873, p. 279. Cet appareil consiste en deux alidades d'acier mobiles autour d'une charnière comme les branches d'un compas et munies chacune de pinnules au moyen desquelles on dirige les alidades vers deux objets donnés. En rendant ensuite invariable l'angle des alidades, et les faisant glisser le long de deux aiguilles fixées à la planchette, la pointe que porte la charnière décrit un cercle (*A. Gr.*, t. LIV, 1872). H. Brocard.

**2979.** (**1905**, 268) (G. Lemaire). — *Coordonnées probables d'un point.* — Réponse manuscrite de M. Ph. Hatt communiquée à l'auteur de la question. La Rédaction.

*Voir* la réponse **2507** (**1904**, 100) où est cité un Mémoire de M. d'Ocagne : *Sur la détermination géométrique du point le plus probable donné par un système de droites non convergentes* (*J. E. P.*, 1893, Cahier LXIII, p. 1-26).

*Voir*, du même auteur, une étude antérieure, intitulée : *Formules nouvelles pour résoudre le problème de la Carte au moyen de données particulières* (*Revue maritime et coloniale*, 1889).

H. Brocard.

**2986.** (**1905**, 270) (*Doubt*). — *Corollaire de M. Lindemann.* — La remarque de M. *Doubt* me paraît juste et la démonstration qu'il possède que $e^{\alpha_1}$ n'est pas rationnel si $\alpha_1$ est algébrique $\neq 0$, a par suite un grand intérêt. A. Pellet.

Pour préciser la fin de ma question **2986**, je vois seulement que les démonstrations des *Leçons* de M. F. Klein établissent la transcendance de $e^{\alpha_1}$ (où $\alpha_1$ est algébrique $\neq 0$) lorsqu'il n'existe entre $\alpha_1$ et ses conjuguées $\alpha_2, \ldots, \alpha_q$ aucune relation linéaire homogène à coefficients entiers réels.

Exemple :

$e^{\alpha_1}$ est transcendant quand $\alpha_1$ est racine d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, irréductible, avec $a, b, c \neq 0$. Il est curieux de rapprocher les remarques ci-dessus de la question **117** (**1894**, 66; **1898**, 193) (¹). *Doubt.*

(¹) D'après une lettre qu'il nous écrit, M. Raffy a rencontré cette question **117** à propos des intégrales abéliennes. La Rédaction.

M. G. Remoundos a également adressé une réponse qui sera insérée ultérieurement. LA RÉDACTION.

2987. (1905, 271) (P.-H. SCHOUTE). — *Valeur du produit*

$$\Pi(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}).$$

— Il me semble que la question ait besoin d'être précisée. Soit, par exemple, $n=3$, ce qui ramène au point de vue sous lequel Euler a considéré la résolution de l'équation du quatrième degré, en tenant compte de l'ambiguïté fatale du radical carré, on a huit facteurs, savoir :

$$\begin{array}{cccc} \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}, & \sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}, & -\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}, & -\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}, \\ -\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}, & -\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}, & \sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}, & \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}, \end{array}$$

chacun de ceux écrits sur la seconde ligne étant égal et de signe contraire au facteur écrit au-dessus sur la première ligne; en prenant un facteur dans chaque colonne et à volonté sur la première ou la deuxième ligne, on obtiendra une fonction symétrique des racines, ce qui n'arrivera pas en procédant de toute autre manière. C'est apparemment cette fonction symétrique et ses analogues, dans le cas de $n>3$, dont la valeur est demandée.

Je doute d'ailleurs qu'il soit possible de la présenter sous forme explicite, $n$ étant quelconque; du moins la marche à suivre peut-elle être indiquée. La façon de procéder d'Euler, dans le cas de $n=3$, est encore applicable à celui de $n=4$; mais déjà, pour $n=5$, on a peine à s'y reconnaître. On opérera donc comme il suit :

Soit

$$0 = x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - A_3 x^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1} A_{n-1} x + (-1)^n A_n$$

l'équation qui admet pour racines les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ : les racines $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \sqrt{x_3}, \ldots, \sqrt{x_n}$ appartiendront dès lors à l'équation

$$0 = y^{2n} - A_1 y^{2n-2} + A_2 y^{2n-4} - \ldots + (-1)^{n-1} A_{n-1} y^2 + (-1)^n A_n.$$

Or cette équation peut être considérée comme le produit membre à

membre des équations

$$\begin{aligned} o &= \quad f(y) = y^n - \alpha y^{n-1} + \beta y^{n-2} - \gamma y^{n-3} + \delta y^{n-4} + \ldots, \\ o &= \pm f(-y) = y^n + \alpha y^{n-1} + \beta y^{n-2} + \gamma y^{n-3} + \delta y^{n-4} + \ldots, \end{aligned}$$

ce qui conduit à déterminer les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ... par les relations

$$\alpha^2 - 2\beta = A_1, \quad \beta^2 - 2\alpha\gamma + 2\delta = A_2, \quad \gamma^2 - 2\beta\delta + \ldots = A_3, \quad \ldots.$$

Éliminant entre ces relations tous les coefficients sauf $\alpha$, on arrivera à une équation du degré $2^{n-1}$ en $\alpha$ où le terme indépendant de $\alpha$ constituera le résultat cherché.

Par exemple, pour $n = 3$, on aura

$$\Pi = A_1^2 - 4A_2;$$

pour $n = 4$,

$$\Pi = (A_1^2 - 4A_2 + 8\sqrt{A_4})^2.$$

Ce sont bien les résultats que fournit la méthode d'Euler. Je trouve encore, mais sans moyen de contrôle, pour $n = 5$,

$$\begin{aligned} \Pi = (A_1^2 - 4A_2)^4 - 128A_4(A_1^2 - 4A_2)^2 \\ - 2048A_1A_5(A_1^2 - 4A_2) + 4096(A_4^2 - 4A_3A_5). \end{aligned}$$

*E.-A. Majol.*

**2988.** (**1905**, 271) (P. Hendlé). — *Convergence de séries.* — $f(z)$ étant une fonction holomorphe, il en est de même pour $\log[1 + f(z)]$, pour toutes les valeurs de $z$ qui n'annulent pas $1 + f(z)$; si $1 + f(o)$ n'est pas nul, $\log[1 + f(z)]$ est donc développable suivant les puissances de $z$; le rayon de convergence du développement est égal au module de la racine de plus petit module de l'équation

$$1 + f(z) = o,$$

$e^{f(z)}$ est développable suivant les puissances croissantes de $z$ et le rayon de convergence est égal à celui de $f(z)$ au moins. Lorsque pour les points critiques situés sur le cercle de convergence de $f(z)$, cette fonction peut se mettre sous la forme

$$n \log(x - a) + \varphi(x - a),$$

$\varphi$ étant une fonction holomorphe, et $n$ un nombre entier positif,

ces points ne sont pas critiques pour $e^{f(z)}$ et cette fonction a un rayon de convergence supérieur à $f(z)$. A. PELLET.

**2989.** (**1905**, 272) (E. MAILLET). — *Développement en fraction continue de* $\sqrt{A}+\sqrt{B}$. — Des généralisations de la méthode des fractions continues ont été données par plusieurs auteurs. Voici quelques-unes des plus importantes références :

E. FURSTENAU, *Ueber Kettenbrüche höherer Ordnung* (*Prog. Wiesb.*, 1874). L'auteur développe les racines des équations du troisième et du quatrième degrés en fractions continues d'ordre supérieur et trouve que les développements sont périodiques; mais il ne prouve pas que ce soit le cas en général.

Au sujet de cette méthode, *voir* encore : R.-F. SCOTT, *Determinants,* p. 177; *Jahrbuch über die Fortschritte der Math.,* Band VI, p. 133; S. GUNTHER (*A. Gr.*, t. LVII, 1874).

Autres références :

A. HURWITZ (*M. A.*, t. XXXIX, 1891, p. 279-284; t. XLIV, 1894, p. 417-436). — L. CHARVE (*A. E. N.*, 2e série, t. IX, 1880, Suppl.; 2e série, t. XI, 1882, p. 119-134; *C. R.*, t. XCII, 1881, p. 782-783). — P. BACHMANN, *Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen,* 1892 (10te *Vorlesung,* p. 125-151). — H. MINKOWSKI, *A. E. C.*, 3e série, t. XIII, 1896, p. 41-60; *A. M.*, t. XXVI, 1902, p. 333-352).

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

Ma question vise principalement les fractions continues ordinaires $a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots$. Ce que je désire surtout savoir, c'est si l'on a cherché à trouver quelque rapport entre la fraction continue donnant la somme ou le produit de deux fractions continues (périodiques ou non). E. MAILLET.

**2992.** (**1906**, 3) (H. LAURENT). — *Fonction implicite.* — On peut donner du théorème des fonctions implicites une démonstration basée sur les premières notions de la Théorie des séries et, je crois, plus proche que celle de M. H. Laurent de certaines applications.

Appelons *équation majorante* de degré $n$ de l'équation

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = 0,$$

l'équation

$$\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \ldots + \alpha_{n-1} \xi^{n-1} - \xi^n + \alpha_{n+1} \xi^{n+1} + \ldots = 0,$$

où $\alpha_i$ est un nombre positif au moins égal au module du rapport

$$\frac{a_i}{a_n} \quad \left(\alpha_i \geqq \left|\frac{a_i}{a_n}\right|; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n+1, \ldots\right).$$

Si l'équation majorante du premier degré a une racine positive $\xi_1$, l'équation (1) a une seule racine ($x_1$) de module inférieur à $\xi_1$, et

$$x_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots,$$

$u_0, u_1, u_2, \ldots$ étant les termes successifs auxquels conduit la méthode d'approximation de Newton,

$$u_0 = -\frac{a_0}{a_1}, \ \ldots;$$

le module de l'erreur, quand on arrête la somme au terme $u_k$, étant inférieur à $|u_k|$ ou $2|u_{k+1}|$. Supposons les coefficients $a$ fonctions holomorphes d'une variable $t$, et qu'on ait

$$a_0 = 0, \qquad a_1 \neq 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 0.$$

Prenons pour $\alpha_k$ une fonction majorante de

$$\frac{a_k}{a_1} \qquad (k = 0, 2, 3, \ldots);$$

l'équation majorante

$$\alpha_0 - \xi + \alpha_2 \xi_2 + \alpha^3 \xi^3 + \ldots + \alpha_k \xi^k + \ldots = 0$$

aura une racine positive si son premier membre est négatif pour $2\alpha_0$, ou

$$1 > 4\alpha_2 \alpha_0 + 8\alpha_3 \alpha_0^2 + \ldots + 2^k \alpha_k \alpha_0^{k-1} + \ldots.$$

Pour les valeurs de $t$ dont le module satisfait à cette inégalité, l'équation en $x$ a une seule racine de module inférieur à $2\alpha_0$ et cette racine est développée suivant les puissances croissantes de $t$.

Voir : *Sur la formule d'approximation de Newton* (*Bulletin de la Société mathématique*), 1901. A. PELLET.

**2993.** (**1906**, 5) Plakhowo). — *Sommes de carrés.* — Dans un article intitulé : *Ueber die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln* (*Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1898), j'ai démontré que le produit de deux sommes de $n$ carrés

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)$$

ne peut être la somme de $n$ carrés dont les bases sont des formes bilinéaires des variables $x_1, x_2, \ldots, x^n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ que dans les cas $n = 2, 4, 8$. Les démonstrations de Roberts et Cayley ainsi que les formules de Genocchi sont erronées. A. Hurwitz (Zurich).

Une proposition tout à fait analogue, ou au moins un cas particulier, a fait l'objet de la question **820** (**1895**, 148; **1896**, 24). Il convient de le rappeler, ne serait-ce qu'au point de vue bibliographique.

H. Brocard.

**2994.** (**1906**, 5) (H.-B. Mathieu). — La décomposition est immédiate pour N carré :

$$12a^2 = a^2 + 2a^2 + 3a^2 + 6a^2.$$

Elle est non moins simple pour N somme de deux carrés :

$$12(a^2+b^2) = (a+b)^2 + 2(a+b)^2 + 3(a+b)^2 + 6(a-b)^2.$$

Pour N somme de trois carrés, j'ai trouvé l'identité

$$12(a^2+b^2+c^2) = (3a-b-c)^2 + 2(b+c)^2 + 3(a+b+c)^2 + 6(b-c)^2,$$

et M. Malo l'a immédiatement étendue à quatre carrés :

$$12(a^2+b^2+c^2+d^2) = (3a-b-c+d)^2 + 2(b+c+2d)^2 + 3(a+b+c-d)^2 + 6(b-c)^2.$$

H. Brocard.

**2995.** (**1906**, 5) (H.-B. Mathieu). — *Déplacement d'un solide.* — Le déplacement d'un solide peut toujours être considéré comme le résultat d'une translation et d'une rotation autour d'un axe. Donc

les vecteurs considérés V sont les résultantes : 1° de vecteurs $V_1$ provenant de la translation, tous parallèles et égaux ; 2° de vecteurs $V_2$ provenant de la rotation, tous perpendiculaires à l'axe de rotation

Portons, à partir d'un point M, les vecteurs $V_1$, leur extrémité sera un point N. Les vecteurs $V_2$ portés à partir de N seront dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation mené en N, donc aussi l'extrémité des vecteurs V menés de M. MESNAGER.

*Voir* le Mémoire de Chasles : *Propriétés géométriques du mouvement d'un solide* (*C. R.*, t. XVI, 1843) et *Traité de Cinématique*, de E. Collignon (p. 229-237). P. BARBARIN.

On peut amener un corps solide d'une position à une autre, par un mouvement de translation suivi d'un mouvement de rotation autour d'un axe. Dans ce dernier mouvement tous les corps décrivent des arcs de cercle situés dans les plans parallèles.

Il est bien connu que le déplacement d'un solide invariable, d'une de ses positions à une autre, est toujours réalisable au moyen d'une translation, pour laquelle on prendra le déplacement de celui que l'on voudra des points du solide, suivie d'une rotation effectuée autour d'un axe passant par la position finale du point particulièrement considéré. Cela étant, il est clair que mener à partir d'un point fixe arbitraire des vecteurs égaux et parallèles aux déplacements des points du solide revient à mener, à partir de la même origine et suivant la règle d'addition des vecteurs, d'abord la translation commune, puis, pour chaque point, la corde de l'arc qu'il décrit dans la rotation consécutive à la translation ; or, la translation commune amène à un seul et même point ; d'autre part, les cordes des arcs décrits dans la rotation étant perpendiculaires à l'axe de rotation, elles sont tout entières contenues dans le plan abaissé de ce point perpendiculairement à l'axe.

De ces considérations si simples résultent immédiatement les autres circonstances remarquables du déplacement des figures invariables. Le plan décrit par les extrémités des vecteurs menés à partir de l'origine parallèlement aux déplacements des divers points étant évidemment unique et bien déterminé : 1° l'axe de rotation a une direction fixe, indépendante de la translation d'abord imprimée au solide ; 2° il existe une translation minimum ayant précisément la direction de l'axe de rotation ; 3° au moyen de cette translation

et de la rotation correspondante le solide peut être amené de sa position initiale à sa position finale par un mouvement héliçoïdal.

*E.-A. Majol.*

**2996.** (**1906**, 6) (G. Lemaire). — $\theta$ étant l'angle des axes de coordonnées, le polygone de sommets $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{m+1}, y_{m+1}$ a pour surface

$$S = \frac{1}{2}\sin\theta[\Sigma(x_m y_{m+1}) - \Sigma(x_{m+1} y_m)].$$

D'après Terquem (*N. A.*, 1850, p. 65), Waring a connu cette évaluation, et calculé ainsi la surface d'un polygone inscrit dans une parabole. (*Proprietates algebricarum curvarum.* Voir *N. A.*, 1845, p. 183.)

De Stainville a donné cette expression sous forme symétrique, dans l'Ouvrage intitulé : *Recueil de Problèmes résolus par des considérations purement géométriques,* et il l'a reproduite dans ses *Mélanges d'Analyse,* 1815, p. 668.

*Voir* aussi divers articles de Prouhet, *N. A.*, 1851, p. 181-182, questions 230, 231, 232, et 1856, p. 373-378. H. Brocard.

**2999.** (**1906**, 7) (Nazarevsky). — La résolution en nombres entiers de l'équation

$$1.2.3.4.\ldots n + 1 = N^2$$

est une question que j'ai vainement cherchée depuis longtemps. C'est pourquoi je l'ai proposée successivement dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (n° 166, 1876, p. 287), dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (n° 1532, 1885, p. 391), et dans *Mathesis* (n° 597, 1887, p. 280). A son tour, M. E. Fauquembergue l'a rééditée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* [n° 1264 (**1897**, 146)].

M. A. Gérardin en a fait une étude systématique et sa conclusion est que, s'il existe d'autres solutions que

$$n = 4, 5, 7; \qquad N = 5, 11, 71,$$

elles doivent être extrêmement grandes et inapplicables à une vérification directe.

Le résumé de ce travail paraîtra, si ce n'est fait déjà, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* et dans *Mathesis*.

H. BROCARD.

**3001.** (**1906**, 7) (NAZAREVSKY). — *Dernier théorème de Fermat.* — La plus grande partie du Mémoire de Legendre sur le *Théorème de Fermat* (*M. A. P.*, t. VI, 1823, Paris, 1827, p. 1) est consacrée à la démonstration de cette proposition dans des cas étendus.

A. PELLET.

*Voir* à ce sujet la réponse à **314** (**1905**, 12).

E. MAILLET.

**3005.** (**1906**, 8) (NAZAREVSKY). — *Valeur résiduelle de*

$$1.2.3\ldots\frac{p-1}{2},$$

*où p premier* $\equiv 1 \pmod 4$. — Relativement au module $p$, premier et de la forme $4m+1$, le résidu $r$ du produit des $\frac{p-1}{2}$ premiers nombres, satisfaisant à la condition $r^2 \equiv -1 \pmod p$, est aussi le résidu de la puissance d'exposant $\frac{p-1}{4}$ de l'un quelconque des nombres non-résidus quadratiques de $p$, et par conséquent un résidu ou un non-résidu de $p$ suivant que ce module est de la forme $8n+1$ ou $8n+5$. En entendant essentiellement par $r$ un nombre positif et moindre que $\frac{p}{2}$, $r$ fait partie du produit continu

$$1.2.3\ldots\frac{p-1}{2};$$

mais, si l'on en fait abstraction, aussi bien que de l'unité, il restera $\frac{p-1}{2}-2$ facteurs donnant lieu aux considérations suivantes. Soit $a$ l'un d'eux, il existera un nombre $b$, conjugué à $a$, c'est-à-dire tel que l'on ait

$$ab \equiv 1 \pmod p;$$

mais deux cas sont à distinguer suivant que $b$ sera plus petit que $\frac{p-1}{2}$ ou que le contraire arrivera. Dans le premier cas, le seul à retenir, le nombre $p-b$ sera plus petit que $\frac{p-1}{2}$ et l'on aura

$$a(p-b) \equiv -1 \pmod p.$$

Les facteurs du produit $\dfrac{1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}}{r}$ se grouperont donc par couples congrus à $\pm 1 \pmod{p}$, et il ne s'agira que de compter le nombre des groupes congrus à $-1$, car suivant qu'il sera pair ou impair on en conclura

$$1.2.3\ldots\frac{p-1}{2} \equiv \pm r \pmod{p}.$$

C'est exactement le même genre de considérations qui permet de décider, $p$ étant toujours premier, mais de la forme $4m+3$, si l'on a

$$1.2.3\ldots\frac{p-1}{2} \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

Seulement dans le dernier cas on est immédiatement conduit à une intéressante variante dans l'énoncé de la conclusion. En raison de $p \equiv 3 \pmod 4$ le résidu $-1$ est non quadratique et, dans tout produit de facteurs qui lui est congru $(\bmod\ p)$, les facteurs sont de caractère différent : ils sont au contraire de même caractère dans les produits congrus à $+1$. Soient donc $\mu$ et $\nu$ le nombre des résidus et celui des non-résidus, pris positivement, qui n'excèdent pas $\frac{p-1}{2}$ (l'unité étant mise à part), d'où $\mu+\nu=\frac{p-3}{2}$ : il y aura $2\rho$ des $\mu$ résidus et $2\sigma$ des $\nu$ non-résidus qui donneront des produits $\equiv +1 \pmod{p}$, et un nombre $\mu-2\rho=\nu-2\sigma$ de résidus et de non-résidus qui s'apparieront pour donner des produits $\equiv -1 \pmod{p}$. Le signe résiduel final de $1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}$ sera donc $(-1)^{\mu}=(-1)^{\nu}$.

Au contraire, dans le cas de $p \equiv 1 \pmod 4$, les nombres $\pm 1$ sont à la fois résidus quadratiques du module ; dans les produits de deux facteurs congrus à $\pm 1$ les facteurs seront de même caractère et il n'existera pas de variante dans l'énoncé de la conclusion analogue à celle qui vient d'être remarquée.

A l'égard des nombres premiers $4m+1$ moindres que 100 je trouve (par un calcul fait une seule fois et trop rapidement pour que je ne m'excuse pas à l'avance d'une erreur possible) :

$$\mathbf{5} = 1.2 \equiv 2,\ \mathbf{13} \equiv 5,\ \mathbf{17} \equiv 4,\ \mathbf{29} \equiv 12,\ \mathbf{37} \equiv -6,$$
$$\mathbf{41} \equiv 9,\ \mathbf{53} \equiv 23,\ \mathbf{61} \equiv -11,\ \mathbf{73} \equiv -27,\ \mathbf{89} \equiv 34,\ \mathbf{97} \equiv -22.$$

E. Malo.

3007. (**1906**, 33) (E. Malo). — Parmi les sommes $\sum_{x=1}^{x=p} x^m$, celle des carrés

$$S_2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

est bien divisible par $(p+1)$ lorsque $(p+1)$ est premier; cela tient à ce que $p(2p+1)$ est divisible par 6, tandis que $(p+1)$ ne l'est pas. Mais la division peut se faire par d'autres nombres non premiers. Il est évident, par exemple, qu'elle réussit pour $(p+1)^n$, $(p+1)$ étant premier.

La somme des cubes

$$S_3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$$

est toujours divisible par $(p+1)$, si ce nombre est premier, car alors $\frac{p^2}{4}$ est entier; mais, si $p$ est premier et $(p+1)$ double d'un impair, $S_3$ ne sera plus divisible par $(p+1)$.

Si $p$ est le double d'un carré, $S_3$ sera divisible par $(p+1)$, premier ou composé.

*Note.* — Les formules $S_1, S_2, \ldots, S_n$ pourraient être étudiées de la même façon, car elles sont des deux types

$$S_{2l+3} = \frac{P}{A} p^2(p+1)^2,$$

$$S_{2l} = \frac{P}{A} p(p+1)(2p+1),$$

A étant un nombre entier, et P un polynome irréductible.

H. Brocard.

3009. (**1906**, 33) (H. Wieleitner). — La géométrie des lunules a donné lieu à des recherches, antérieurement à l'étude du comte F.-E. de Herbestein dans les *Actes de Leipzig* de 1710, comme cela a été signalé ici, en réponse à la question 908 de M. G. Eneström (**1896**, 201).

Je me contenterai de refondre les références bibliographiques données à cette occasion (**1898**, 94 et 180) et d'y ajouter quelques détails.

L'astérisque désigne les additions.

**1654.** Artus de Lionne. — *Amœnior circuli contemplatio.*

1654. Le P. VINCENT LÉOTAUD. — *Examen circuli quadraturæ* (de Grégoire de Saint-Vincent).

1675 *ISAAC BARROW. — *Archimedis opera methodo nova illustrata et succincte demonstrata.* — *Voir Journal des Savants*, 9 septembre 1675. *L'arbelon* d'Archimède a-t-il suggéré à Hippocrate de Chio sa découverte des lunules, ou inversement. Ce fut l'opinion de Borelly, mais Barrow croit que Pappus est l'inventeur de ces lignes.

1687. V. TSCHIRNHAUS. — *Acta Erud.*, Leipzic.

1700. PERKS, selon une lettre de Wallis à Sloan, avait été devancé par Artus de Lionne, d'après le P. Abat.

1701. *Le MARQUIS DE L'HOPITAL. — La quadrature absolue d'une infinité de portions moyennes tant de la lunule d'Hippocrate de Chio que d'une autre de nouvelle espèce (*Mém. de l'Ac. des Sc.* pour 1701, p. 17-20). L'auteur cite : Wallis, Sloan, Perks, Tchirnhaus, Gregory et Caruel.

1710. *F.-E. de HERBERSTEIN. *Acta Erud.*, Leipzic.

1763. Le P. BONAVENTURE ABAT. — Il mentionne des résultats analogues publiés antérieurement (peut-être vers 1740?) dans les *Mémoires*, etc. de Marseille.

1766. M. J. WALLENIUS.

1840-1841. T. CLAUSEN (*Cr.*, t. 21, p. 375-376). — Résumé dans un article intitulé : *Théorie des lunules géométriquement carrables* (*N. A.*, 1849, p. 395-397).

1870. C.-A. BRETSCHNEIDER. — *Die Geometrie und die Geometer vor Euclides.*

1878. *P. TANNERY. — Hippocrate de Chio et la quadrature des lunules (*Mém. de la Soc. des Sc. phy. et nat. de Bordeaux*, (2e série, t. II, p. 179-184. 2 pl.).

1882-1883. P. TANNERY. — Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules (*Ibid.*, 2e série, t. V, p. 211-236).

1893-1895. *GINO LORIA. — Le *scienze esatte nell'antica Grecia.* Livro I. — I geometri, precursori di Euclide.

1896. G. DOSTOR. — Question 1732 (*N. A.*, p. 296); *Solution (*N. A.*, 1899, p. 191-193).

1902. *G. ZEUTHEN (traduct. J. MASCART). Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge, p. 58-61.

1902. E. LANDAU. — Ueber quadrierbare Kreisbogenzweiecke. Berliner math. Gesells., 29 octobre 1902, 6 pages.

*Notes.* — I. Au sujet de la dénomination de lunules d'Hippocrate, on devra consulter les ouvrages cités de MM. Bretschneider, Gino Loria et Zeuthen.

II. Il serait intéressant de vérifier si d'autres propositions sur les lunules ne se trouveraient pas dans le recueil **Sylloge epistolarum mathematicarum* etc., Francfort, 1714, 168 pages in-12, 19 planches, où se trouvent 51 lettres du P. Augustin Thomas de Saint-Joseph au comte d'Herberstein (*Journal des Savants*, 22 juillet 1715).

III. J'ignore ce qu'était le mathématicien Artus de Lionne. Ce nom a été aussi celui d'un évêque de Gap, mort en 1664, et d'un évêque de Rosalie, mort en 1713. H. BROCARD.

**3022.** (**1906**, 38). (M. PETROVITCH). — *Série infinie.* — Une application du théorème de Rolle montre que l'on doit avoir

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{(n+1)2^n};$$

c'est donc parmi les séries *très* convergentes qu'il faut chercher la solution de la question ; je suis conduit à considérer (parmi une infinité d'autres) la série

$$1 + q^{-1}x + q^{-4}x^2 + \ldots + q^{-n^2}x^n + \ldots$$

(c'est presque une fonction elliptique intermédiaire); je supposerai $q > 2$ égal à 10 par exemple.

Faisons les substitutions

$$x = q^0 = 1, \quad x = -q^2, \quad x = +q^4, \quad \ldots, \quad \pm x = q^{ia}, \quad \ldots,$$

je dis que les nombres sépareront les racines de toutes les équations

$$1 + q^{-1}x + \ldots + q^{-n^2}x^n = 0;$$

en effet, pour $x = q^{2i}$, on a pour exposants successifs de $q$

$$0, \quad 2i - 1, \quad 4i - 4, \quad \ldots, \quad 2ni - n^2, \quad \ldots,$$

et la série devient

$$1 - q^{2i-1} + q^{4i-4} + \ldots \pm q^{2ni-i^2} \mp \ldots;$$

les exposants commenceront à être négatifs pour $i > 2n$; l'exposant le plus fort correspondra au maximum de $n(2i - n^2)$ qui a lieu pour $i = n$. Or pour $n = i$ le terme $q^i$ est plus grand que la somme des autres; il donne son signe à tout le reste de la série, donc pour $x = 0, -q^2, +q^4, -q^6, \ldots$ les polynomes considérés dans l'énoncé ont les signes $+, -, +, -, \ldots$, et tous les zéros de ces polynomes sont réels. H. LAURENT.

Si l'équation $a_0 + a_1 X + .. + a_{n-1} X^{n-1} = 0$ a ses racines réelles et distinctes, l'équation

$$a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n = 0$$

a la même propriété pour toutes les valeurs assez petites de $a_n$. Donc en prenant les coefficients $a_2, a_3, a_4, \ldots$, successivement d'une manière convenable, on peut déterminer, et cela d'une infinité de manières, une série $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots$ ayant le caractère voulu. A. HURWITZ (Zurich).

Autre réponse de M. BROCARD.

Peut-être y aura-t-il quelque intérêt à rapprocher divers passages des Mémoires suivants :

E. MAILLET, *J. E. P.*, 1903, p. 91 et suiv, ; *J. M.*, 1902, p. 343 et suiv.; *S. M.*, 1903, p. 43; *A. M.*, 1905, p. 329; *C. R.*, 12 février 1906, p. 384.

RUBEN MATSON, *Contributions à la théorie des fonctions entières*, Thèse pour le doctorat soutenue le 6 décembre 1905. Upsal, Almquist et Wiksell, 1905, p. 49 à la fin.

Il en résultera la solution de la question dans des cas très étendus.

E. MAILLET.

*Voir* encore :

M. PETROVITCH, *C. R.*, 23 juillet 1906, *Sur une classe de séries entières*.

Les deux premières réponses ci-dessus sont mentionnées à la couverture du numéro de mars 1906; la troisième était imprimée en placards le 16 juillet. Enfin, une autre réponse de M. Hardy, envoyée à l'impression le 16 juin, paraîtra ultérieurement.

LA RÉDACTION.

# QUESTIONS.

---

**909. [B1]** (**1896**, 201) Je suis arrêté dans des recherches d'un certain intérêt par la question de savoir si l'expression

$$\pm x_1^m \pm x_2^m \pm \ldots \pm x_p^m$$

peut être mise sous forme de déterminant, et en particulier de déterminant à éléments linéaires par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$. R. DE MONTESSUS.

**910. [V7]** (**1896**, 202) Johan Peterson Stengel, né en Suède et mort peu de temps avant 1679, a publié un Traité : *Gnomonica universalis, oder aussführliche Beschreibung der Sonnen Vhren* (Augspurg, 1675, in-8°; nouvelles éditions 1679, 1706, 1710, 1755), dont il a paru aussi une traduction en latin : *Gnomonica universalis, sive praxis amplissima geometrice describendi horologia solaria* (Ulmæ, 1679 [1680], in-8°; nouvelles éditions 1705, 1706, 1721, 1755).

Y a-t-il quelque part une Notice biographique sur cet auteur (1)? G. ENESTRÖM (Stockholm).

**911. [V1a]** (**1896**, 221) Nous avons fondé, en Italie, une Société que j'appelle *Mathesis, Associazione per studi fra gli insegnanti di Matematica delle Scuole medie,* dont le but est de perfectionner, au point de vue scientifique

---

(1) Les questions 897, 908, 909 et 910 ont été publiées dans la *Bibliotheca mathematica* de M. Eneström.

et au point de vue didactique, les écoles de Mathématiques et leurs professeurs.

Nous nous proposons de parvenir à ce but en offrant, particulièrement aux membres de l'Association, des questions d'étude, en nous aidant les uns les autres dans nos recherches, en discutant les méthodes d'enseignement, les programmes, les livres de texte, et tout ce qui se rapporte à l'étude des Mathématiques dans les écoles moyennes. Nous serons très obligés à tout lecteur de l'*Intermédiaire* qui voudra nous procurer les renseignements suivants :

1° S'il y a des institutions semblables à la nôtre hors d'Italie, et lesquelles, en y joignant leurs règlements, si c'est possible;

2° Quels sont les programmes de l'enseignement des Mathématiques dans les écoles moyennes (classiques et techniques) dans les divers pays du monde.

Les réponses pourront être adressées ou à l'*Intermédiaire*, ou directement au soussigné ([1]).

RODOLPHE BETTAZZI (Turin).

**915. [V5b] (1896**, 223) Delambre, dans son *Histoire de l'Astronomie du moyen âge* (t. I, p. 418), dit, à propos du livre de Nonius, *De Crepusculis* : « Il promet (Nonius), en finissant, un Traité de l'astrolabe, un des triangles sphériques et du planisphère géométrique, un globe pour l'usage de la navigation et divers autres Ouvrages. La bibliographie de Lalande ne mentionne que les Ouvrages suivants : un Traité des climats et des éclipses, une édition de Sacrobosco avec des notes, enfin un Livre de comètes (Salamanque, in-4°, 1610). » Un correspondant peut-il me dire si ces Ouvrages promis par Nonius [*reliqua opuscula nostra brevi, ut speramus, in lucem edemus* (*De Crepusculis*, p. 57)] sont en effet parus et, dans le cas affirmatif, s'il sait

([1]) Mon adresse est : Rue Lycée Cavour, Turin (Italie).

s'il en existe encore des exemplaires, et à quel endroit? Je voudrais aussi avoir une indication précise sur l'existence ou la non-existence du Livre de comètes dont parle Lalande, édité en 1610 à Salamanca, quand Nonius n'existait plus, car tous ses biographes le donnent comme décédé en 1575.

R. GUIMARAËS (Lisbonne).

**920.** **[M³1a]** (**1896**, 245) Étant données deux courbes gauches appartenant à des familles bien déterminées de la classification d'Halphen, quel est le nombre maximum de points que ces deux courbes peuvent avoir en commun?

G.-B. GUCCIA (Palerme).

**926.** **[O6rδ]** (**1896**, 246) Que sait-on sur les surfaces parallèles dont les centres de courbure principaux appartiennent à deux surfaces homofocales du second ordre?

MANNHEIM.

**927.** **[A3h]** (**1896**, 246) Une substitution souvent avantageuse, surtout dans la résolution de $n$ équations

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_i) = 0, \qquad \ldots$$

à $n$ équations dont tous les termes sont de même degré, est la suivante $x_2 = \lambda_1 x_1$, $x_3 = \lambda_2 x_1$, ..., $x_n = \lambda_{n-1} x_1$. Je désire connaître dans quels Ouvrages de Mathématiques cette méthode a été employée et quel est, si c'est possible, le premier mathématicien qui en a fourni l'idée?

E. BARBETTE (Liége).

**928.** **[M¹5d]** (**1896**, 247) Une courbe du 3$^{\text{ième}}$ degré est déterminée par les neuf points $A_1, A_2, \ldots, A_9$; par $A_1$ je mène une droite $\Delta$. Je voudrais avoir, *avec la règle et le compas,* une construction des deux autres points de la courbe qui se trouvent sur $\Delta$. *Alauda.*

3065. [V] On lit dans Savérien (*Dict. univ. de Mathémath. et de phys.*, Paris, 1753, p. 98) : « Le sieur Le Maire, Ingenieur du Roi pour les instruments de mathématiques, imagina de faire des aiguilles spirales ou avec des anneaux d'acier enchâssés sur un plan et dont le centre tournât sur un petit pivot, comme dans les boussoles ordinaires. Après avoir aimanté ces anneaux, il remarqua que les pôles se faisaient violence l'un à l'autre et tenaient par ce moyen l'aiguille dans la vraie ligne du nord. »

Je désirerais quelques renseignements sur la vie et les travaux de mon homonyme. G. LEMAIRE.

3066. [V] On lit encore dans Savérien (même Ouvrage, p. 119) à propos du calendrier grégorien : « Scaliger, selon M. Huet, ne s'est fait huguenot que pour n'avoir pas été employé à cette correction. Il ne se contenta pas de préférer la doctrine de Calvin à celle du Saint-Siège, son chagrin fut si grand qu'il voulut en tirer une sorte de vengeance. Il écrivit contre le calendrier et y découvrit des erreurs réelles qu'on sait bien. Sethus Calvisius se joignit à Scaliger. Les réflexions là-dessus de l'un et de l'autre ont été publiées sous ce titre : *Elenchus calendarii gregoriani*, et réfutées par Guldin. »

Pourrait-on m'indiquer, en quelques mots, les erreurs découvertes par Scaliger? G. LEMAIRE.

3067. [V] Savérien (même Ouvrage, p. 277) attribue à Willebrord Snellius la découverte des lois de la réfraction.

Cette assertion est-elle fondée? G. LEMAIRE.

3068. [V et U 10] Quelles études et quelles expériences ont été faites en vue d'annuler la déclinaison de l'aiguille aimantée? Quels résultats ont été obtenus? (La question intéresse les topographes.) G. LEMAIRE.

3069 [X 2] Quels sont les arguments essentiels pour et

contre la division sexagésimale du cercle, pour et contre la division centésimale ?

Quels sont les géomètres illustres qui se sont faits les défenseurs de l'un ou l'autre système ?

G. LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

**3070.** **[I 3]** Trouver $n$ nombres dont les $n(n-1)$ différences soient incongrues ($\bmod\ n^2-n+1$).

A défaut d'une solution générale, donner une solution pour $n=7$.

Exemples :

$n=3:1,\ 3,\ 4,$

$n=4:1,\ 3,\ 6,\ 7,$

$n=5:1,\ 3,\ 13,\ 16,\ 17.$

E. B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

**3071.** **[L 2 c]** On considère trois coniques : A, B, B'; on mène à A une tangente variable $\Delta$ ; si P et P' sont respectivement les pôles de $\Delta$ par rapport à B et B', quelle est l'enveloppe de PP' ? A. BOUTIN.

**3072.** **[K 11 d]** On considère deux cercles tels qu'il existe une infinité de quadrilatères inscrits dans l'un et circonscrits à l'autre.

Je désire connaître le quadrilatère de périmètre maximum et celui d'aire maxima. E.-N. BARISIEN.

Si l'on a entre la distance $d$ des centres de deux cercles et leurs rayons R et $r$ la relation $(d^2-R^2)^2-2r^2(d^2+R^2)=0$ il existe une infinité de quadrilatères inscrits dans l'un et circonscrits à l'autre.

On désire connaître celui de ces quadrilatères qui a la plus grande aire. H.-B. MATHIEU.

**3073.** **[I 23 a]** Peut-on établir, même par des exemples, l'existence d'irrationnelles I, I' dont une infinité de

réduites ont 2 à 2 un même dénominateur, sans que l'on ait $I' = \frac{pI+q}{p'I+q'}$, avec $p$, $q$, $p'$, $q'$ entiers. E. Maillet.

3074. [V] Je serais heureux d'avoir la liste complète des ouvrages (et traductions) de Porro, Salmoiraghi, Jadauza, etc. sur la topographie italienne au dix-neuvième siècle.

G. Lemaire.

3075. [V 9] L'ouvrage de Crelle *Handbuch des Feldmessens und Nivellirens in den gewöhnlichen, Fällen* (Berlin, 1826), présente-t-il des théories ou des procédés qu'on ne rencontre pas dans les ouvrages contemporains ? A-t-il été traduit ou imité en langue française ?

G. Lemaire (Rachgia, Cochinchine).

3076. [I 18] Si $a$, $b$, $c$, $n$ sont des nombres entiers, le nombre

$$\frac{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}{abc}$$

est toujours un nombre entier, à condition que $a+b+c=0$. ($n$ doit être positif et pas nul.)

Je l'ai vérifié par des exemples sans pouvoir le démontrer.

E.-N. Barisien.

3077. [I 18] Ayant remarqué que si $x+y+z=0$ on a

$$x^2+y^2+z^2=-2(xy+xz+yz),$$
$$x^3+y^3+z^3=3xyz,$$
$$x^4+y^4+z^4=2(xy+xz+yz)^2,$$
$$x^5+y^5+z^5=-5xyz(xy+xz+yz),$$
$$x^6+y^6+z^6=-2(xy+xz+yz)^3+3x^2y^2z^2,$$
$$x^7+y^7+z^7=7xyz(xy+xz+yz)^2.$$

Je suis fondé à supposer qu'en général $x^n+y^n+z^n$ ($n$ étant entier) est une fonction de $xyz$ et de $(xy+xz+yz)$.

J'en désirerais une démonstration rigoureuse, avec la formule générale. E.-N. Barisien.

# RÉPONSES.

**569.** (**1895**, 165; **1903**. 145) (G. Friocourt). — *Rectifications du sextant.* (**1902**, 71). — L'indication suivante, dont je ne connais que le nom, me paraît se rapporter au même objet :

Gruey. — Sur les constantes du grand miroir du sextant (*C. R.*, t. C, 1885, p. 898-901).

*Voir* aussi :

A. Schell. — De l'influence des défauts du sextant à réflexion sur la mesure des angles (*Z. S.*, t. XVII, 1872, 11 pages).

H. Brocard.

**1686.** (**1899**, 269) (G. Picou). — *Bibliographie des cumulants.* [*Voir* T. Muir (*P. R. S. E.*, 1903-1905, p. 648-679).] — J'observerai que Sylvester et Ed. Lucas (*Théorie des nombres*) ont proposé d'appeler *cumulant* le résultat de l'opération du symbole généralisé d'Euler pour la théorie des fractions continues. Muir a changé le nom de *cumulant* en celui de *continuant*. H. Brocard.

**1969.** (**1900**, 358) (Werebrusow). — *La double équation*

$$(1)\qquad \begin{cases} ax^2 + 2bx + c = t^2, \\ a'x^2 + 2b'x + c' = u^2 \end{cases}$$

a été traitée par Diophante, Bachet, Viète, Fermat et J. de Billy (voir *Œuvres* de Fermat, t. III, p. 326-328, et l'*Inventum novum*, Ire Partie, § 5 à 13).

A son tour, Lagrange en a parlé dans les *Additions à l'Algèbre d'Euler*, mais simplement pour constater que le problème est biquadratique, et insoluble dans la forme littérale. Cependant, les méthodes des auteurs susmentionnés permettent de résoudre assez

rapidement les équations numériques, surtout lorsque $a$ et $a'$, ou $c$ et $c'$ sont des carrés.

J'ignore si les recherches de Lagrange ont été continuées.

Quant au problème de la *double équation*

$$(2) \qquad \begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 = t^2, \\ a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = u^2, \end{cases}$$

il est implicitement résolu par les mêmes méthodes, par le fait que d'une valeur entière de $x$ vérifiant les équations (1) l'on peut déduire une suite de valeurs rationnelles, de forme $\frac{m}{n}$. $m$ et $n$ sont donc, en définitive, des valeurs entières de $x$ et $y$ vérifiant les équations (2).

*Exemple* (tiré de l'*Inventum novum*) :

Les équations

$$8x^2 + 16x + 4 = t^2,$$
$$2x^2 + 4x + 4 = u^2$$

ont pour solutions

$$x = -2, \quad t = 2, \quad u = 2,$$
$$x = -\frac{24}{7}, \quad t = \frac{46}{7}, \quad u = \frac{26}{7}.$$

Par conséquent, les équations

$$8x^2 + 16xy + 4y^2 = t^2,$$
$$2x^2 + 4xy + 4y^2 = u^2$$

ont pour solutions entières

$$x = -2, \quad y = 1, \quad t = 2, \quad u = 2,$$
$$x = -24, \quad y = 7, \quad t = 46, \quad u = 26.$$

En revanche, il est possible de résoudre le problème, pour ainsi dire inverse, d'obtenir par des essais faciles et rapides un grand nombre de valeurs numériques des coefficients $a$, $b$, ..., $c'$ et de $t$, $u$, quand on s'est donné $x$ et $y$, le discriminant variant chaque fois.

Exemple :

Les équations suivantes sont vérifiées par $x = 4$, $y = 3$ :

$$7x^2 + 8xy + 9y^2 = 17^2,$$
$$10x^2 + 14xy + 8y^2 = 20^2,$$

et

$$13x^2 - 10xy + 9y^2 = 13^2,$$
$$17x^2 - 46xv - y^2 = -17^2,$$
$$19x^2 - 50xy + 40y^2 = 8^2,$$
$$31x^2 - 22xy - 4y^2 = 14^2,$$
$$97x^2 + 6xy + 25y^2 = 43^2,$$
$$79x^2 + 14xy + 55y^2 = 44^2.$$

Il sera intéressant de les grouper par deux et de rechercher d'autres valeurs de $x$ et $y$.

*Note.* — Pour les *équations doubles* ou διπλοισοτητες de Diophante, voir *Œuvres* de Fermat, t III, p. 269, Commentaires sur Diophante (et sur Bachet et Viète). H. Brocard.

**2137.** (**1901**, 189) (C. Alasia). — *Correspondance de G. Bellavitis* (**1902**, 30). — Une réponse très complète vient d'être donnée par M. Alasia dans un article intitulé : Giusto Bellavitis; sa correspondance scientifique (*E. M.*, 1906, p. 97-117). On y trouvera plusieurs lettres inédites, adressées à M. Laisant, et trois autres adressées à M. G. Torelli (7 et 15 juillet et 2 septembre 1867).

M. Alasia ayant rappelé que Bellavitis avait eu l'idée originale de préparer en 1877 sa lettre mortuaire, j'ajouterai que cette anecdote est rapportée par Ed. Lucas dans un Chapitre de son *Arithmétique amusante :* Un mort qui fait part de son décès (p. 211-212, 1895).

Antérieurement, Ed. Lucas avait publié dans la *Nature* (9 octobre 1886) le *fac simile* de cette lettre, qui pourra trouver place dans l'édition projetée de la Correspondance de Bellavitis. Malheureusement, comme le prévoit M. Alasia, la centralisation des éléments de cet Ouvrage rencontrera de sérieuses difficultés.

Le portrait de Bellavitis, donné dans les *N. A.* en mars 1901, a été ajouté à l'article de M. Alasia. H. Brocard.

**2560.** (**1903**, 98) (P. Tannery). — Il suffit d'appliquer la suite d'opérations proposées à l'équation de quelques courbes parmi les plus simples pour vérifier que le procédé est un empirisme tout de hasard et aucunement justifié.

I. *Cercle.*

$$x^2 + y^2 - 2vx = 0.$$

L'équation (4) n'existe plus. Le résultat est donc illusoire.

II. *Développée de parabole.*

$$\nu y^2 = x^3.$$

L'élimination de $s$ devient inutile.

L'équation résultante représente des directions de droites issues de l'origine.

III. *Cappa.*

$$x^4 = y^2(\nu^2 - x^2).$$

On trouve

$$(2x^2 + y^2)y^3 + (\rho + 3y)(\rho - y)^2 x^2 = 0,$$

où

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Mais l'équation réduite ne représente que des directions de droites issues de l'origine.

IV. *Strophoïde.*

$$y^2(\nu + x) = x^2(\nu - x).$$

On trouve

$$x^2 + y^2 = 0,$$

résultat illusoire.

V. *Cissoïde de Dioclès.*

$$y^2(\nu - x) = x^3.$$

On trouve

$$4x^6 + y^6 - 3x^2y^4 = 0,$$

équation qui représente des directions de droites issues de l'origine.

L'auteur de la question s'est chargé de lui donner la meilleure réponse possible, dans le commentaire qu'il en a fait au Congrès de Heidelberg (1904). *Voir* le Volume 1905, p. 502-514 : P. Tannery. Pour l'histoire du problème inverse des tangentes.

H. Brocard.

2732. (**1904**, 41) (Davis). — *Série trigonométrique.* — C'est par hasard que j'ai rencontré la même question citée dans le dernier cahier du journal allemand *Z. H.* de l'année dernière, où cette série a été déduite de $\sin\theta$ très simplement de la manière sui-

vante :

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{4}\right)$$

$$= \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) - 2^3\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{4}\sin\frac{\theta}{8}\cos\frac{\theta}{8}$$

$$= \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) - \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(2\sin\frac{\theta}{4}\right)\left(2\sin\frac{\theta}{8}\right)\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{16}\right) = \ldots;$$

comme toute solution d'une question des journaux étrangers est pourvue d'une croix quand elle est résolue par M. Müsebeck, et qu'il n'y a pas de croix devant cette solution, j'en conclus que la série en question a été considérée ailleurs; mais, par malheur, on n'indique ni l'auteur de la question, ni l'époque où cette question a été posée.

N. Plakhowo (Russie).

**2735.** (**1904**, 41) (V. Aubry). — *Surfaces.* — Si l'on mène par un point quelconque des parallèles à toutes les forces, elles formeront un faisceau de droites qui tournera autour de son sommet sans se déplacer lorsque les forces se déplaceront. Imaginons un système d'axes rectangulaires invariablement lié à ce faisceau, et choisi de façon que l'axe des $z$ coïncide avec la parallèle à la résultante des forces. En appelant $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, $a''$, $b''$, $c''$ les cosinus directeurs des axes mobiles par rapport à un système rectangulaire fixe, A, B, C les cosinus directeurs d'une force quelconque par rapport au système fixe, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus directeurs par rapport au système mobile, nous aurons les formules suivantes :

$$A = a\alpha + a'\beta + a''\gamma,$$
$$B = b\alpha + b'\beta + b''\gamma.$$
$$C = c\alpha + c'\beta + c''\gamma,$$

$$X = \Sigma AF = Ra'', \qquad Y = \Sigma BF = Rb'', \qquad Z = \Sigma CF = Rc'',$$

$$L = \Sigma(yC - zB)F = c\Sigma\alpha yF + c'\Sigma\beta yF + c''\Sigma\gamma yF$$
$$- b\Sigma\alpha zF - b'\Sigma\beta zF - b''\Sigma\gamma Fz,$$

$$M = \Sigma(zA - xC)F = a\Sigma\alpha zF + a'\Sigma\beta zF + a''\Sigma\gamma zF$$
$$- c\Sigma\alpha Fx - c'\Sigma\beta xF - c''\Sigma\gamma Fx,$$

$$N = \Sigma(xB - yA)F = b\Sigma\alpha xF + b'\Sigma\beta xF + b''\Sigma\gamma xF$$
$$- a\Sigma\alpha Fy - a'\Sigma\beta yF - a''\Sigma\gamma Fy.$$

Pour avoir l'axe central des moments, il faut mener une parallèle à la résultante R par un point $x_0$, $y_0$, $z_0$ dont les coordonnées sont données par les relations suivantes :

$$\frac{X_0}{YN - ZM} = \frac{Y_0}{ZL - XN} + \frac{Z_0}{XM - YL} = \frac{1}{R^2}.$$

Remplaçons X, Y, Z, L, M, N par leurs valeurs après avoir posé

$$T = a''\Sigma\alpha x F + b''\Sigma\alpha y F + c''\Sigma\alpha z F,$$
$$U = a''\Sigma\beta x F + b''\Sigma\beta y F + c''\Sigma\beta z F,$$
$$V = a''\Sigma\gamma x F + b''\Sigma\gamma y F + c''\Sigma\gamma z F.$$

Il vient

$$Rx_0 = -aT - a'U - a''V + \Sigma\gamma x F,$$
$$Ry_0 = -bT - b'U - b''V + \Sigma\gamma y F,$$
$$Rz_0 = -cT - c'U - c''V + \Sigma\gamma z F.$$

1° Si l'axe doit rester parallèle à une droite donnée, $a''$, $b''$, $c''$ sont connues; on tire immédiatement des équations qui donnent $x_0, y_0, z_0$,

$$(a_0 R - \Sigma\gamma x F)^2 + (y_0 R - \Sigma\gamma y F)^2 + (z_0 R - \Sigma\gamma z F)^2 = T^2 + U^2 + V^2,$$
$$a'' x_0 + b'' y_0 + c'' z_0 = 0.$$

L'axe central décrit un cylindre droit de révolution dont la section droite est le cercle donné par les deux équations ci-dessus.

2° L'axe passe par un point fixe $x_1$, $y_1$, $z_1$; il a alors pour équations :

$$\frac{x - x_1}{a''} = \frac{y - y_1}{b''} = \frac{z - z_1}{c''};$$

on a de plus les relations

$$x_0 = x_1 - a''(a''x_1 + b''y_1 + c''z_1),$$
$$y_0 = y_1 - b''(a''x_1 + b''y_1 + c''z_1),$$
$$z_0 = z_1 - c''(a''x_1 + b''y_1 + c''z_1).$$

Remplaçant $x_0$, $y_0$, $z_0$ par leurs valeurs, il vient

$$-a\frac{T}{R} - a'\frac{U}{R} - a''\left[\frac{V}{R} - (a''x_1 + b''y_1 + c''z_1)\right] = x_1 - \frac{\Sigma\gamma x F}{R},$$
$$-b\frac{T}{R} - b'\frac{U}{R} - b''\left[\frac{V}{R} = (a''x_1 + b''y_1 + c''z_1)\right] = y_1 - \frac{\Sigma\gamma y F}{R},$$
$$-e\frac{T}{R} - c'\frac{U}{R} - c''\left[\frac{V}{R} - (a''x_1 + b''y_1 + c''z_1)\right] = z_1 - \frac{\Sigma\gamma z F}{R}.$$

Élevons au carré, ajoutons et multiplions le deuxième membre par $a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$ ; on a

$$\left(\frac{T}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left[\frac{V}{R} - (a'x_1 + b'y_1 + c'z_1)\right]^2$$
$$= (a''^2 + b''^2 + c''^2)\left[\left(x_1 - \frac{\Sigma\gamma x F}{R}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{\Sigma\gamma y F}{R}\right)^2 + \left(z_1 - \frac{\Sigma\gamma z F}{B}\right)^2\right].$$

Cette équation est homogène et du deuxième degré en $a''$, $b''$, $c''$; remplaçant ces quantités par les quantités proportionnelles $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, on a pour le lieu de l'axe un cône du deuxième degré.

3° Supposons que le plan des $xy$ soit le plan dans lequel l'axe doit rester.

On a alors les relations

$$c'' = 0, \qquad z_0 = 0, \qquad \frac{x_0}{b''} = \frac{y_0}{-a''},$$

$$(x_0 R - \Sigma\gamma F x)^2 + (y_0 R - \Sigma\gamma F y)^2 + (\Sigma\gamma z F)^2 = T^2 + U^2 + V^2;$$

multiplions le premier membre par $a''^2 + b''^2 = 1$, on aura une équation homogène en $a''$ et $b''$, et, remplaçant ces quantités par leurs valeurs proportionnelles $-y_0$ et $x_0$, on a une équation du quatrième degré qui représente le lieu du point $x_0$, $y_0$. Cette courbe est la podaire d'une conique par rapport à l'origine, l'enveloppe de l'axe

$$\frac{x - x_0}{a''} = \frac{y - y_0}{b''}$$

est donc une conique. MATHIEU (Saïgon).

**2851.** (**1904**, 283) (N. QUINT). — (**1905**, 72, 140). — Après avoir indiqué (*loc. cit.*) l'identité des deux questions **2851** et **1039**, je rappellerai que la démonstration géométrique fort simple de la construction du rayon réfracté est exposée dans le *Cours de Physique* de M. J. Violle, t. II, 1892, p. 402-403, et antérieurement, par J. Moutier, *Sur la diacaustique d'une surface plane* (*N. A.*, p. 128-130). (Deux cas sont étudiés, suivant que le point lumineux est situé dans le milieu le plus réfringent ou dans le milieu le moins réfringent.) H. BROCARD.

**2855.** (**1904**, 285) (E. MAILLET). — *Erreurs des mathématiciens* (**1905**, 275; **1906**, 65, 110). — Selon I. TODHUNTER (*History of the Mathematical Theory of Probability*, p. 75), James Bernoulli dit que la somme de tous les termes impairs de la série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

est dans le rapport de $\sqrt{2}-1$ à 1 avec la somme des termes pairs.

I. TODHUNTER (*loc. cit.*, p. 48) dit :

« Leibnitz fournit un exemple de la facilité de l'erreur qui semble particulièrement caractéristique de notre sujet. Il dit (*Opera Omnia*, ed. Dutens, Vol. 6. part I, p. 217) :

« ... par exemple, avec 2 dés, il est aussi faisable de jeter 12 points, que d'en jeter 11 ; car l'un et l'autre ne se peut faire que d'une seule manière ; mais il est trois fois plus faisable d'en jeter 7, car cela peut se faire en jetant 6 et 1, 5 et 2, 4 et 3, et une combinaison ici est aussi faisable que l'autre. »

Il est exact que 11 ne peut être obtenu que par 6 et 5 ; mais le 6 peut être amené avec l'un quelconque des dés et le 5 avec l'autre; la chance de jeter 11 avec deux dés est le double de la chance pour jeter 12 ; de même la chance de jeter 7 est six fois plus grande que de jeter 12.

J.-R. YOUNG [*On Imaginary Zeros and the Theory of Conjugate Points* (*P. M.*, 3ᵉ série, t. XXVII, 1845, p. 91-97)] attribue à Abel l'erreur suivante : Abel dit au sujet de la série

$$\frac{1}{2}\varphi=\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\sin 3\varphi+\ldots :$$

« lorsque $\varphi=\pi$ ou $-\pi$, la série réduit à zéro, comme on voit aisément. Il suit de là, que la fonction $\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\ldots$ a la propriété remarquable, pour les valeurs $\varphi=\pi$ et $\varphi=-\pi$, d'être discontinue ». (*Œuvres*, t. I, p. 90.)

La conclusion est erronée, car, $\varphi$ approchant de $\pi$, les signes de $\sin 2\varphi$, $\sin 4\varphi$, etc. sont négatifs et, à la limite, on a

$$\frac{1}{2}\pi=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)\cdot 0=\infty\cdot 0.$$

H.-J.-S. SMITH [*Report on the Theory of Numbers*, Part II, § 61, note (*R. B. A.*, 1860, p. 150; *Coll. Math. Papers*, Vol I)], au sujet du dernier théorème de Fermat, cite les erreurs de Lamé et Cauchy mentionnées dans la question 2855.

E.-B. ESCOTT. (Ann Arbor, Mich.)
[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

On trouvera mention dans ma Note *Sur le minimum du potentiel de l'arc*, insérée dans *A. F.*, *Mém. du Congrès de Besançon*, 1893, p. 164, d'une erreur de calcul d'Euler répétée jusqu'à sept fois dans le même article. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

J. Bertrand a écrit, dans le *Journal des Savants*, 1883, p. 241, un article sur « les zodiaques et le calendrier égygtien » où il signalé une erreur de Fourier, deux de Biot et une de Newton.

N. PLAKOWO (Russie).

Voici une erreur due à Francœur :

On lit (*Géodésie*, Paris, Mallet-Bachelier, 1855, p. 9) : « Cette lame, ainsi divisée et mobile le long de cet instrument, est ce qu'on appelle un *vernier* ou un *nonius*, des noms de deux géomètres, dont le premier est l'inventeur de l'appareil, et dont l'autre en a répandu l'usage. »

D'abord, le vernier et le nonius ne sont pas des « appareils », mais des organes d'instruments.

Ensuite, ils sont tout à fait distincts. (*Voir* plutôt : A. LAUSSEDAT, *Recherches sur les instruments*, etc., Paris, Gauthier-Villars, 1898, p. 117 à 120.)

Enfin, Nonius exposait son procédé en 1542, tandis que Vernier exposait le sien en 1631 ! G. LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

**2914.** (**1905**, 172) (FITZ-PATRICK) (**1906**, 28). — Peut-être ne faut-il pas désespérer de retrouver quelque trace du *Journal des Sciences mathématiques* édité en 1872 par A. LABOSNE. M. Blanchard s'étant rendu acquéreur des papiers et de la bibliothèque de ce mathématicien, il serait bien possible d'y rencontrer un exemplaire ou des feuilles du journal ci-dessus désigné.

*Voir* **1904**, p. 241, réponse **1822**. H. BROCARD.

**2956** et **2957**. (**1905**, 221) (G. LEMAIRE). — (**1905**, 287; **1906**, 30, 72, 120). — L'indication bibliographique suivante tendrait à prouver que le sujet de cette question avait déjà fixé l'attention de Roger Cotes : *Estimatio erronum in mixtâ mathesi per variationes partium trianguli,* auctore R. COTES. Leugoviæ, 1768. H. BROCARD.

**2961**. (**1905**, 242) (MATHIEU). — *Coniques bitangentes à deux cercles fixes* (**1906**, 49). — *Voir* mon Mémoire manuscrit présenté en 1887 à l'Académie royale des Sciences de Lisbonne, déposé dans les archives de cette Académie, et dont une partie a paru dans le *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas* de M. G. Teixeras en 1882. A. SCHIAPPA MONTEIRO (Lisbonne).

**2971**. (**1905**, 265) (E.-N. BARISIEN). — *Distance de deux points en coordonnées normales* (**1906**, 74). — Voir notre Note (*J. E.*, 1889, p. 73 et suiv., *Géométrie des triangles, angles et distances*); de la formule donnée (Conséquences, § 1) on déduit par la distance $\delta$ du centre de gravité au point de Lemoine, en fonction des côtés du triangle,

$$\delta^2 = \frac{3\Sigma a^2 b^4 - \Sigma a^6 - 15 a^2 b^2 c^2}{9(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

A. BOUTIN.

La solution de M. E. Malo est inexacte. En effet, dans le cas du triangle isoscèle ($b = c$), on a directement

$$\text{GK} = \frac{(a^2 - b^2)\sqrt{4b^2 - a^2}}{3(a^2 + 2b^2)}.$$

Si l'on fait $b = c$ dans les formules de MM. Rose, Retali et Brocard, on a bien cette valeur de GK, mais la formule de M. Malo donne

$$\text{GK} = \frac{(a^2 - b^2)\sqrt{2(3b^2 - a^2)}}{3(a^2 + 2b^2)},$$

ce qui est faux. E.-N. BARISIEN.

**2977**. (**1905**, 267) (G. LEMAIRE). — *Système d'équations* (*problème de la carte*) (**1906**, 76). — Pour déterminer les valeurs de $x$, $y$ et $z$ nous croyons que le procédé le plus simple est celui de rem-

placer les trois équations données par celle-ci

$$(1)\qquad 2S = yz\sin\alpha + xz\sin\beta + xy\sin\gamma,$$

où S représente l'aire du triangle ABC, en ayant égard aux signes de $\sin\alpha$, $\sin\beta$ et $\sin\gamma$.

Cette équation, combinée avec les relations connues

$$(2)\qquad \frac{ax}{\sin(\alpha - A)} = \frac{bv}{\sin(\beta - B)} = \frac{cz}{\sin(\gamma - C)},$$

donne facilement les valeurs demandées.

Ainsi, on aura

$$(3)\quad x^2 = \frac{2bcS}{a\begin{bmatrix} a\sin(\beta - B)\sin(\gamma - C)\sin\alpha \\ + |b\sin(\gamma - C)\sin\beta + c\sin(\beta - B)\sin\gamma|\sin(\alpha - A) \end{bmatrix}}$$

et analoguement

$$(4)\quad y^2 = \frac{2acS}{b\begin{bmatrix} b\sin(\alpha - A)\sin(\gamma - C)\sin\beta \\ + |a\sin(\gamma - C)\sin\alpha + c\sin(\alpha - A)\sin\gamma|\sin(\gamma - B) \end{bmatrix}},$$

$$(5)\quad z^2 = \frac{2abS}{c\begin{bmatrix} c\sin(\alpha - A)\sin(\beta - B)\sin\gamma \\ + |a\sin(\beta - B)\sin\alpha + b\sin(\alpha - A)\sin\beta|\sin(\gamma - C) \end{bmatrix}}.$$

*Observation.* — Nous présentons cette solution, bien qu'un peu hors de l'indication de M. G. Lemaire, parce que nous la jugeons plus simple que celle qui peut résulter directement des équations données sans recourir aux relations (2).

A. Schiappa Monteiro (Lisbonne).

**2982.** (**1905**, 269) (*Crut*). — *Élimination d'un paramètre* (**1906**, 80). — Le calcul de M. *Quilibet* comporte deux erreurs : l'une dans la multiplication des deux équations données, où il a omis le facteur $\sin\varphi + \cos\varphi$ du deuxième membre ; l'autre dans la deuxième élévation au carré où il manque au second membre le terme $c^4$.

J. Rius y Casas (Saragosse).

Autre réponse de M. Wargny (Valparaiso)

Soit à éliminer $\varphi$ entre les deux équations :

$$(1) \qquad \sqrt{\frac{ax}{\cos\varphi}} + \sqrt{\frac{by}{\sin\varphi}} = c,$$

$$(2) \qquad \sqrt{ax\cos\varphi} + \sqrt{by\sin\varphi} = c.$$

(1) élevée au carré donne

$$\frac{ax}{\cos\varphi} + \frac{by}{\sin\varphi} + 2\sqrt{\frac{abxy}{\sin\varphi\cos\varphi}} = c^2$$

ou

$$(3) \qquad ax\sin\varphi + by\cos\varphi + 2\sqrt{abxy\sin\varphi\cos\varphi} = c^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

(2) élevée au carré donne

$$(4) \qquad ax\cos\varphi + by\sin\varphi + 2\sqrt{abxy\sin\varphi\cos\varphi} = c^2.$$

Retranchons (3) de (4), nous aurons

$$(\cos\varphi - \sin\varphi)(ax - by) = c^2(1 - \sin\varphi\cos\varphi).$$

Élevons au carré

$$(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi)(ax - by)^2 = c^4(1 - \sin\varphi\cos\varphi)^2$$

ou simplement

$$(5) \qquad (1 - 2\sin\varphi\cos\varphi)(ax - by)^2 = c^4(1 - \sin\varphi\cos\varphi)^2.$$

Il nous reste à calculer le produit $\sin\varphi\cos\varphi$. Multiplions (1) et (2) membre à membre, on a

$$ax + by + \sqrt{abxy\,\text{tang}\,\varphi} + \sqrt{abxy\cot\varphi} = c^2$$

ou

$$\sqrt{abxy\,\text{tang}\,\varphi} + \sqrt{abxy\cot\varphi} = [c^2 - (ax + by)].$$

Élevons au carré, on a

$$abxy\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) + 2\,abxy = [c^2 - (ax + by)]^2$$

ou

$$abxy\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} + 2\right) = [c^2 - (ax + by]^2$$

ou encore

$$abxy(1 + 2\sin\varphi\cos\varphi) = \sin\varphi\cos\varphi\,[c^2 - (ax + by)]^2.$$

On tire de là

$$\sin\varphi\cos\varphi = \frac{abxy}{[c^2-(ax-by)]^2-2abxy}.$$

Reportons cette valeur de $\sin\varphi\cos\varphi$ dans (5), nous aurons

$$\left[1-2\frac{abxy}{[c^2-(ax+by)]^2-2abxy}(ax-by)^2\right.$$
$$= c^4\left[1-\frac{abxy}{[c^2-(ax+by)]^2-2abxy}\right]^2.$$

Posons

$$[c^2-(ax+by)]^2=\Delta^2;$$

nous aurons

$$(\Delta^2-4abxy)(ax-by)^2(\Delta^2-2abxy)=c^4(\Delta^2-3abxy)^2,$$

ou encore

$$\frac{(\Delta^2-4abxy)(\Delta^2-2abxy)}{(\Delta^2-3abxy)^2}=\frac{c^4}{(ax-by)^2}=\left[\frac{c^2}{ax-by}\right]^2,$$

courbe du sixième degré.

G. Delahaye.

Élevons les deux équations au carré et, après avoir chassé dans la première les dénominateurs, retranchons-les, il vient :

$$(1)\qquad c^2(1-\sin\varphi\cos\varphi)=(ax-by)(\cos\varphi-\sin\varphi).$$

Multiplions membre à membre les deux équations données, il vient :

$$ax+by-c^2=-\sqrt{abxy\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}-\sqrt{abxy\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}.$$

Élevons cette équation au carré, il vient :

$$(2)\qquad (ax+by-c^2)^2=abxy\frac{1+2\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Élevons (1) au carré, et remplaçons le produit $\sin\varphi\cos\varphi$ par sa valeur tirée de (2), on a l'équation du lieu du sixième degré

$$\left(\frac{ax-by}{c^2}\right)^2\left[1-\frac{2abxy}{(ax+by-c^2)^2-2abxy}\right]$$
$$=\left[\frac{abxy}{(ax+by-c^2)^2-2abxy}-1\right]^2$$

ou

$$c^4[(ax+by-c^2)^2-3abxy]^2$$
$$=(ax-by)^2[(ax+by-c^2)^2-2abxy][(ax+by-c^2)^2-4abxy].$$

H.-B. MATHIEU (Saïgon).

La réponse de M. Quilibet est inexacte, les deux équations (1906, p. 80, lignes 6 et 12) étant erronées.

Voici mon procédé d'élimination. La multiplication membre à membre des équations proposées donne

$$ax+by+\sqrt{ab\,xy}\left[\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}+\sqrt{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}\right]=c^2$$

ou

$$ax+by-c^2=-\frac{\sqrt{ab\,xy}\,(\sin\varphi+\cos\varphi)}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}.$$

En élevant au carré, on a

$$(ax+by-c^2)^2\sin\varphi\cos\varphi=ab\,xy\,(1+2\sin\varphi\cos\varphi).$$

D'où

(1) $$\sin\varphi\cos\varphi=\frac{ab\,xy}{(ax+by-c^2)^2-2\,ab\,xy}.$$

Les deux équations proposées, élevées au carré, deviennent

$$\frac{ax}{\cos\varphi}+\frac{by}{\sin\varphi}=c^2-2\sqrt{\frac{ab\,xy}{\sin\varphi\cos\varphi}},$$
$$ax\cos\varphi+by\sin\varphi=c^2-2\sqrt{ab\,xy\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Multiplions encore ces deux dernières équations membre à membre, on a ainsi

$$a x^2+b^2y^2+\frac{ab\,xy}{\sin\varphi\cos\varphi}=c^4+4\,ab\,xy-\frac{2c^2\sqrt{abxy}\,(1+\sin\varphi\cos\varphi)}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}.$$

En y remplaçant $\sin\varphi\cos\varphi$ par sa valeur (1), on arrive au résultat cherché

(2) $$\left\{\begin{aligned}&[(ax-by)^2-c^2(ax+by)]^2[(ax+by-c^2)^2-2abxy]\\&\quad=c^4[(ax+by-c^2)^2-abxy]^2\end{aligned}\right.$$ (1).

E.-N. BARISIEN.

(1) On peut dire que l'équation (2) représente la courbe du sixième degré lieu des points de rencontre des deux paraboles représentées par les équations de l'énoncé, lorsque l'angle $\varphi$ varie.

Posons

$$\alpha = \frac{\sqrt{ax}}{c}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{by}}{c}, \qquad \lambda = \pm\sqrt{\cos\varphi}\ \mu = \pm\sqrt{\sin\varphi}.$$

En tenant compte de tous les signes possibles des radicaux, on a le système en $\lambda$ et $\mu$ :

$$\eta\frac{\alpha}{\lambda} + \theta\frac{\beta}{\mu} = 1, \qquad \alpha\lambda + \beta\mu = 1 \qquad (\eta = \pm 1, \theta = \pm 1),$$

avec la condition : $\lambda^4 + \mu^4 = 1$.

On tire d'abord, des deux premières équations :

$$\lambda = \frac{\eta\alpha_2 - \theta\beta^2 + 1 + \varepsilon\sqrt{P}}{2\alpha}, \quad \mu = \frac{\theta\beta^2 - \eta\alpha^2 + 1 - \varepsilon\sqrt{P}}{2\beta} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

avec

$$P = (\eta\alpha^2 + \theta\beta^2 - 1)^2 - 4\eta\theta\alpha^2\beta^2.$$

En substituant et en remplaçant $\alpha$ et $\beta$ par leurs expressions, on trouve l'ensemble de huit équations :

$$b^2y^2(\eta\,ax - \theta\,by + c^2 + \varepsilon\sqrt{\varphi})^4$$
$$+ a^2x^2(\theta\,by - \eta\,ax + c^2 - \varepsilon\sqrt{\varphi})^4 = 16\,a^2b^2c^4x^2y^2$$

avec

$$\varphi = (\eta\,ax + \theta\,by - c^2)^2 - 4\eta\theta\,abxy.$$

Elles se réduisent évidemment à quatre en faisant disparaître l'irrationnelle.

H. Hoffbauer.

**2993.** (**1906**, 5) (Plakhowo). — *Généralisation d'un théorème d'Euler* (**1906**, 128). — Ma réponse à la question **2846** (**1905**, 82) demande modification. Je donne une bibliographie du sujet.

J.-T. Graves (*P. M.*, 3e série, t. XXVI, 1845, p. 315-320; *P. R. I. A.*, t. III, 1847, p. 527-530). — J.-R. Young (*T. R. I. A.*, t. XXI, 1848, p. 311-341 ; *P. R. I. A.*, t. IV, 1850, p. 19-20; *P. M.*, 3e série, t. XXX, 1847, p. 424-425 ; 3e série, t. XXXI, 1847, p. 123 ; 3e série, t. XXXIV, 1849, p. 113-115).

M. Young indique les généralisations suivantes :

(Somme de $2m$ carrés)
$\times$ (somme de $2n$ carrés) = somme de $2mn$ carrés ;

(Somme de $4m$ carrés)
$\times$ (somme de $4n$ carrés) = somme de $4mn$ carrés ;

(Somme de $8m$ carrés)
$\times$ (somme de $8n$ carrés) = somme de $8mn$ carrés.

T.-P. KIRKMAN (*P. M.*, t. XXXIII, 1848, p. 447-459, 494-509). — A. CAYLEY (*P. M.*, 4e série, t. IV, 1852, p. 515-519; *Coll. Math. Papers*, vol. II, p. 49-52; *Q. J.*, t. XVII, 1881, p. 258-276; *Coll. Math. Papers*, vol. XI, p. 294-313; *Johns Hopkins Univ. Circulars*, 1882, p. 203; *Amer. J. M.*, t. IV, 1881, p. 293-296; *Coll. Math. Papers*, vol. XI, p. 368-371).

Sylvester (*Johns Hopkins Univ. Cir.*, 1882, p. 203) dit que Cayley est le premier à avoir prouvé l'impossibilité de l'extension du théorème d'Euler à plus de 8 carrés.

F. BRIOSCHI (*Cr.* t. **52**, 1856, p. 141). — A. GENOCCHI (*A. D. M.*, t. III, 1860, p. 202-205; *G. B.*, t. II, 1864, p. 47). — S. ROBERTS (*Q. J.*, t. XVI, 1879, p. 159-170; t. XVII, 1881, p. 276-280). — X. ANTOMARI (*C. R.*, t. CIV, 1887, p. 566-567). — A. PUCHTA (*S. A. W.*, t. XCVI, 1887, p. 110-133). — Il discute les démonstrations de Brioschi et Genocchi et dit que la généralisation de Genocchi n'est correcte que moyennant des conditions très particulières.

E.-B. ESCOTT (Ann. Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

La même question a été proposée par M. Fontené (**1459**, **1899**, 32, 207; **1900**, 21, 280; **1904**, 18), M. Hurwitz (Zurich) (**1900**, 21) dit s'être occupé de cette question, avoir démontré que ce problème n'a de solution que si $n = 2, 4, 8$, et que les recherches de Roberts et Cayley lui semblent insuffisantes. Plus loin (**1900**, 2), *Besouclein* dit : « L'assertion de E. Lucas semble en contradiction avec une autre du même géomètre; mais ces deux assertions ne sont pas contradictoires parce que les formules de Genocchi deviennent illusoires lorsqu'on fait $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$ et E. Lucas a raison; ce que j'ajoute moi-même. »

N. PLAKHOWO (Russie).

Je demande la permission de présenter ici une observation qui, peut-être, pourra apporter quelque clarté dans la discussion soit au sujet de la question **2993**, soit au sujet de la question **1459** rappelée par M. Plakhowo, soit au sujet de la question **820** (**1896**, 85, 259; **1897**, 82; **1905**, 77).

Le produit d'une somme de $\lambda$ carrés par une somme de $\mu$ carrés est-il une somme de $\nu$ carrés?

Une question ainsi posée manque de précision et peut donner lieu à des réponses contradictoires indépendamment des erreurs com-

mises par certains mathématiciens. Il faut d'abord spécifier s'il s'agit d'un problème d'algèbre (point de vue de M. Hurwitz, **1900**, 21) ou d'arithmétique; il faut encore dire si certains des carrés peuvent ou non être nuls. On a déjà ainsi quatre catégories de problèmes et en particulier ce résultat arithmétique évident : lorsque $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sont au moins égaux à 4, le produit d'une somme de $\lambda$ carrés nuls ou non par une somme de $\mu$ carrés nuls ou non est une somme de $\nu$ carrés nuls ou non.

E. Maillet.

**3021.** (**1906**, 38). (A. Pellet). — *Sommation d'une série.* — M. Pellet demande la sommation de la série

$$\frac{1}{\varphi(m+1)\,\varphi(m-1)}-\frac{1}{\varphi(m+2)\,\varphi(m-2)}+\ldots;$$

il me semble qu'il serait plus rationnel de demander la sommation de la série

$$\frac{1}{\varphi(m+1)}+\frac{1}{\varphi(m+2)}+\ldots,$$

et même de

$$\varphi(m+1)+\varphi(m+2)+\ldots$$

Or cela ne peut pas se faire en général. Mais si $\varphi(x)$ est une fonction analytique, il y a la solution de Cauchy.

$$\sum\frac{(-p)^{h-1}}{\varphi(m+h)\,\varphi(m-h)}=\pi\,\mathcal{L}\,\frac{e^{\pi(z-1)\sqrt{-1}}}{\varphi(m+2)\,\varphi(m+2)}\left(\left(\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}\right)\right)$$

d'où il faudra retrancher les résidus relatifs à la fonction $\varphi$ s'il y a lieu. D'ailleurs, le résidu devra être pris de manière que l'aire y relative ne contienne que les points 1, 2, 3, ..., et non les points 0, —1, —2, ....

H. Laurent.

**3022.** (**1906**, 38) (M. Petrovitch). — *Racines de séries* (**1906**, 135). — Dans le *Messenger of Mathematics*, vol. XXXIV, p. 97, je prouve que si $b(\xi)$ est une fonction de $\xi$, positive et croissante pour toutes les valeurs de $\xi$, et si

$$b\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\geqq 3b(\xi),$$

$$b(n)=b_n,\qquad a_n=\frac{1}{b_0b_1\ldots b_n},$$

la fonction entière

$$\sum_0^\infty a_n x^n$$

a toutes ses racines réelles et négatives; de plus, la même démonstration s'applique au polynome

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

pour toutes les valeurs de $m$.

Il est intéressant d'observer que non seulement toutes les racines de ces polynomes sont réelles (ce que M. Petrovitch demande), mais encore que celles de la fonction entière le sont.

EXEMPLE :

On peut faire : soit

$$b_n = q^{-2n+1}, \qquad a_n = q^{n^2},$$

quand

$$q \leqq \frac{1}{3};$$

soit

$$a_n = \frac{1}{1^1 2^2 3^3 \ldots n^n (n+1)^{n+1}}.$$

Dans ce dernier cas, la condition

$$\left(\xi + \frac{3}{2}\right)^{\left(\xi + \frac{3}{2}\right)} \geqq 3(\xi + 1)^{(\xi+1)}$$

n'est pas satisfaite pour les petites valeurs de $\xi$; mais la démonstration est facile à compléter.

G.-H. HARDY (Cambridge, 26 mai).
[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

3042. (**1906**, 90) (E. MAILLET). — *Fractions continues.* — J'ai oublié de mentionner que je ne demande pas de réponse pour le cas où les $a_n$ croissent suffisamment vite avec $n$, car j'ai alors la solution. (Voir *C. R.*, 2 juillet 1906, *Sur la classification des irrationnelles*).

E. MAILLET.

# QUESTIONS.

**952.** [**I 2**] Trouver trois nombres entiers dont les cubes ou des puissances supérieures soient composés des mêmes chifres convenablement permutés. Exemple : $345^3$ $384^3$ et $405^3$. H. Tarry.

**960.** [**N**' **1 b**] Connaît-on une propriété de six droites appartenant à un même complexe linéaire, propriété qui soit symétrique par rapport à ces six droites ?

Raoul Bricard.

**964.** [**J 2 f**] Une urne contient $n$ séries de boules numérotées, dans chaque série, de 1 à $p$ $(2n \geqq p+3)$.

Je tire de l'urne une boule au hasard; soit $q_1$ son numéro.

Je tire *ensuite* $p$ boules de l'urne en notant combien de fois est sorti le numéro $q_1$; j'apèle ce tirage de $p$ boules le *premier tirage.*

Je tire après lui une boule de l'urne, soit $q_2$ son numéro, puis $p-1$ boules successivement, en notant combien de fois est sorti le numéro $q_2$ : j'apèle ce tirage de $p-1$ boules le *deuxième tirage.*

Je tire après lui une boule de l'urne, soit $q_3$ son numéro, puis $p-2$ boules successivement, en notant toujours combien de fois est sorti le numéro $q_3$; c'est le *troisième tirage.*

Je continue jusqu'à ce que j'ai fait le $p^{\text{ième}}$ tirage dans lequel il n'y a eu qu'une boule à sortir.

Je demande : 1° la probabilité pour que l'on ait noté zéro après tous les tirages ; 2° la probabilité pour que l'on ait noté zéro après $l$ de ces $p$ tirages. E. Lemoine.

971 [1]. [**V9**] Les dictionnaires biographiques ne donnent que des indications incomplètes sur la vie et les travaux du mathématicien Marc-Antoine Parseval-Deschênes, mort en 1836 (*voir*, par exemple, la *Nouvelle Bibliographie générale*, 39 [Paris, 1862], col. 253), auquel on doit un beau théorème dans la théorie des séries.

Y a-t-il quelque Notice imprimée sur l'action scientifique de ce savant ? G. Eneström (Stockholm).

973. [**I3a**] Peut-on, quel que soit l'entier positif $n$, satisfaire à la congruence ci-dessous et donner des exemples ?

$$a^{\alpha n+\beta} + b^{\alpha' n+\beta'} + c^{\alpha'' n+\beta''} + d^{\alpha''' n+\beta'''} \equiv 0$$

$a$, $b$, $c$, $d$, $p$ sont des nombres premiers différents, et $p$ le plus grand d'entre eux ? Les nombres $\alpha$ sont des entiers positifs dont aucun n'est nul ; les $\beta$ sont des entiers positifs, ou négatifs, ou nuls. On demande que cette congruence ne puisse se partager en deux autres, comme

$$a^{\alpha n+\beta} + b'^{\alpha n+\beta'} \equiv 0 \quad \text{et} \quad c^{\alpha'' n+\beta} + d^{\alpha''' n+\beta'''} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

A. Boutin.

975. [**Q4b**] A propos du jeu de Halma, je signale la question suivante : Sur un échiquier carré de $p$ cases de côté, on place le long d'une bande $p$ pions. Quel est le nombre minimum de coups qu'il faut jouer, en suivant la règle du jeu de Halma, pour les placer le long de la bande opposée ? (*Voir* t. III, 1896, question 730, p. 30 et 189.)

A. Boutin.

992. [**V**] Que sait-on des *procédés* ou des *méthodes* de Fermat ? G. de Rocquigny.

---

[1] Extrait de la *Bibliotheca mathematica*.

**996.** [**A31**] Je désirerais une solution *algébrique* de l'équation :

$$mA^x - By^{f(x)} = C,$$

que je sais seulement résoudre par l'*Arithmétique*, lorsque les quantités A, B, C < B et $m$ étant remplacées par des nombres entiers, les inconnues $x$ et $y$ ont des valeurs entières et positives. F. DELASTELLE.

**1000.** (**H9h**) Résoudre le système

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Ax^n + by^n - b(x-y)^n,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = ax^n + By^n + a(x-y)^n,$$

$n$ pouvant être négatif et fractionnaire. FERBER.

**1001.** [**D2bβ**] Peut-on démontrer la formule

$$\frac{\sin \pi x}{1} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 5\pi x}{5} + \ldots = \frac{\pi}{4}(-1)^{[x]}$$

par des moyens *élémentaires ?* CESARO (Naples).

**1003.** [**V9**] Pourrait-on m'indiquer où et dans quelles conditions je pourrais me procurer le célèbre Jubelschrift de Helmholz intitulée : *Zählen und Messen?* E. BALLUE.

---

**3078.** [**O2gα,Σ**] *Sujet d'étude.* — A-t-on déjà étudié la développante de la développante de cercle et, en général, les développantes successives. La quadrature de ces courbes est particulièrement intéressante. *Onponale.*

**3079** [**M'5α**] Je désire savoir en raison de quelles propriétés de la strophoïde droite, cette courbe a reçu aussi l'appellation de *logocyclique.* *Onponale.*

3080. [K1bβ] On sait que l'aire du triangle formé par les trois médianes d'un triangle ABC est les $\frac{3}{4}$ de l'aire du triangle ABC. Il en résulte que

$$m_a < m_b + m_c,$$

$m_a$, $m_b$, $m_c$ étant les longueurs des médianes de ABC.

Si l'on remplace $m_a$, $m_b$, $m_c$ en fonction des côtés $a, b, c$, de ABC, on a l'inégalité

$$\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} < \sqrt{2a^2+2c^2-b^2} + \sqrt{2a^2+2b^2-c^2},$$

dont je voudrais une démonstration directe, basée sur ce que

$$a < b + c.$$

*Nester.*

3081. [U10] Quels sont les arguments essentiels pour et contre la répétition, pour et contre la réitération des mesures angulaires au théodolite?

Quels sont les mathématiciens qui les ont soulevés ou défendus? G. Lemaire.

3082. [U10] Quelle est l'étymologie la plus rationnelle du mot *théodolite?* G. Lemaire.

3083. [I17c] On sait (¹) que tout nombre qui n'est pas de la forme $4^n(8h+7)$ est la somme de trois carrés au plus. Où peut-on en trouver une démonstration simple?

*Neisirab.*

3084. [I17c] Connaît-on d'autres carrés que $7^2, 9^2, 15^2$, qui soient une somme de trois carrés différents de zéro.

*Neisirab.*

---

(¹) Legendre, *Théorie des nombres*, 3ᵉ édition, t. I, p. 393 et suiv.

# RÉPONSES.

**2984.** (**1905**, 289) (E. WEBER). — *Cycles non réversibles* (**1906**, 80). — *Voir* aussi :

J. MOUTIER. — Éléments de Thermodynamique, 1re éd. 1872, Chap. III, § IX, p. 49-52, et 2e éd. 1885.

R. BLONDLOT. — Introduction à l'étude de la Thermodynamique, Chap. I.

H. BROCARD.

**3010.** (**1906**, 34) (H. WIELEITNER). — *Courbe identifiable à la lemniscate.*

Soient $\widehat{ABA'B'}$ le cercle de rayon R, et $\overline{MM'}$ une corde parallèle à $\overline{BB'}$ : le cercle de centre M et de rayon R rencontre le cercle décrit sur $\overline{MM'}$ comme diamètre en deux points N et N', et il est clair qu'en dehors de ces deux points il ne saurait y avoir sur le cercle de centre M et de rayon R d'autres points du lieu que ceux qui peuvent coïncider avec les trois points fixes par lesquels il passe, savoir le centre O du cercle $\widehat{ABA'B'}$ et les points cycliques. Or, lorsque $\overline{MM'}$ est menée à une distance $\alpha = \frac{R}{\sqrt{2}}$ de O, le cercle $\overline{MM'}$ passe par O, et il est manifeste que N est venu coïncider avec O suivant la tangente au cercle de centre M, c'est-à-dire suivant la bissectrice des diamètres rectangulaires $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ : par raison de symétrie O est pour la courbe (N) un point double à tangentes rectangulaires inflexionnelles. En outre le point S, diamétralement opposé à O sur le cercle $\widehat{MM'}$ et qui manifestement appartient à la courbe, est un sommet de cette courbe : en effet le cercle correspondant à la distance $\alpha = \frac{R}{\sqrt{2}} + h$, $h$ étant infiniment petit, est tout entier à l'intérieur du cercle qui vient d'être considéré et pour lequel on a

rigoureusement $h = 0$. Enfin, lorsqu'on a $\alpha = R$, c'est-à-dire lorsque M vient en A, le cercle $\widehat{MM'}$ s'évanouit en devenant concentrique au cercle de centre A et de rayon R. Ainsi les droites isotropes issues de A et de A' sont des tangentes à la courbe aux points cycliques : ces points, par suite, appartiennent à titre de points doubles à la courbe dont l'ordre est $\frac{1}{2}(2+2+2+2) = 4$.

Cela étant, une lemniscate de centre O et admettant les points A et A' comme foyers n'aura pas moins de ***dix-huit*** points communs avec la courbe (N), savoir six en O, quatre (au minimum) en chacun des points cycliques, deux en chacun des sommets S et S' : deux quartiques distinctes ne pouvant se couper qu'en seize points, l'identité de la courbe (N) et de la lemniscate est établie.

E. Malo.

Soient OX, OY les axes d'une hyperbole équilatère, O le centre, S, S' les sommets (sur OX), F, F' les foyers, FAF' la circonférence de centre O et de rayon OF, ABT, ACT' les tangentes à l'hyperbole, D le pied de la hauteur AD du triangle ABC, E le milieu de OA, I le milieu de OD; M, M' les projections de O sur ABT, ACT'.

Les propriétés énoncées, relatives à la lemniscate de Bernoulli, podaire centrale de l'hyperbole équilatère, seront établies si l'on démontre :

1° Que MM' est parallèle à FF',

2° Que $IM = IM' = IE$.

Par définition, ou par construction, ou en vertu de propositions connues :

I. Les points A, M, D, O, M' sont concycliques; centre E, rayon $OE = EA = R$.

II. Les points F, A, F' sont sur une circonférence de centre O et de rayon $2R$.

III. $OF = OF' = 2R$, $OS = OS' = R\sqrt{2}$.

IV. On a les égalités d'angles $FAD = OAF'$, $FAT = F'AT'$ (théorème de Poncelet); $DAT = OAT'$.

V. Les deux circonférences AFF', AMDOM' sont homothétiques par rapport au point A.

VI. Par suite des égalités d'angles ci-dessus, les cordes OD, MM' sont parallèles.

VII. Le trapèze MDOM' étant isoscèle, le milieu I de OD est à égale distance des points M, M'. Ainsi, IM = IM'.

VIII. Dans le triangle ABC, AO est la syhauteur correspondant à AD. Eu égard au triangle AFF' rectangle en F, on est amené à poser AOF $= 2u$, et FAT = F'AT' $= \delta$.

Dans le triangle AMM' inscrit au cercle EAMM', on a

$$\text{MEM}' = 2\text{MAM}' = 2(90 - 2\delta),$$

et comme le triangle MEM' est isoscèle, on a

$$\text{EMM}' = \text{EM}'\text{M} = 90 - \frac{\text{MEM}'}{2} = 2\delta.$$

On en déduit les distances $\lambda_M$, $\lambda_{M'}$ de M, M' à BC, ou

$$\lambda_M = \lambda_{M'} = \text{EI} - \text{EJ} = \text{R}\sin 2u - \text{R}\sin 2\delta.$$

IX. Comme l'enveloppe des polaires des points A est la polaire réciproque du cercle AO concentrique à l'hyperbole, cette enveloppe est ici un cercle de rayon R. Ainsi la polaire du point A est la tangente à ce cercle symétrique de la tangente en E.

Les deux cercles E de rayon R et I de rayon $\text{R}\sin 2u$, rapportés aux axes EI, IX, ont pour équations

$$x^2 + (y - \text{R}\sin 2u)^2 = \text{R}^2,$$
$$x^2 + y^2 = \text{R}^2\sin^2 2u.$$

Leur corde commune MM' a donc pour équation

$$y = \text{R}\,\frac{\sin^2 2u - \cos^2 2u}{2\sin 2u}.$$

On doit donc avoir, entre les angles $\delta$ et $u$, la relation

$$\frac{2\sin^2 2u - 1}{2\sin 2u} = \sin 2u - \sin 2\delta$$

ou simplement

$$2\sin 2u \sin 2\delta = 1,$$

ou

$$\cos 2(u - \delta) - \cos 2(u + \delta) = 1,$$

ou

$$2\cos^2(u-\delta)-2\cos^2(u+\delta)=1.$$

Ces résultats nous donnent

$$\overline{IM}^2=\overline{IM'}^2=\frac{\overline{MM'}^2}{4}+(\lambda_M)^2$$

ou

$$\overline{IM'}^2=R^2+R^2\sin 2u\left(\sin 2u-\frac{1}{\sin 2u}\right)=R^2\sin^2 2u=\overline{IE}^2.$$

X. Le cercle O de rayon R étant polaire réciproque du cercle OA de rayon 2 R, on voit qu'aux points où celui-ci rencontre l'hyperbole, la tangente à cette courbe est aussi tangente au cercle polaire réciproque, et que celui-ci est tangent aux deux cordes communes parallèles à OX.

Ces deux systèmes de droites forment donc deux triangles équilatéraux inscrits dans le cercle OAFF' et circonscrits au cercle OE.

Ainsi, pour $2u=90^\circ$, on a $\delta=45^\circ-30^\circ=15^\circ$.

XI. L'équation du lieu M, M' se déduit aisément des formules ci-dessus. En effet,

$$\begin{aligned}\rho &= OM'=2R\sin(u-\delta),\\ M'OX &= \omega=90-(u+\delta),\\ 2\cos^2(u-\delta) &= 1+2\cos^2\omega.\end{aligned}$$

Éliminant $(u-\delta)$, il vient

$$\rho^2=-2R^2\cos 2\omega,$$

équation de la lemniscate de Bernoulli, podaire centrale de l'hyperbole équilatère de sommets S, S'.

La lemniscate possède, sur MM', deux autres points symétriques de ceux-ci par rapport à OY. H. Brocard.

3011. (**1906**, 34) (E.-N. Barisien). — La question est depuis longtemps classique, au moins pour l'hypothèse de $b=a$ (*N. C.*, 1879, quest. 101, p. 203 et 235).

Transportant l'origine au point $x=y=a$, dont se rapproche indéfiniment un sommet de la courbe, puis formant l'équation des

courbes semblables à la proposée on a

$$\left(1 - \frac{x}{na}\right)^n + \left(1 - \frac{na}{y}\right)^n = 1.$$

$n$ tendant vers $\infty$, les courbes variables se rapprocheront de la courbe limite

$$e^{-\frac{x}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} = 1.$$

H. Brocard.

La courbe $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ tend vers les côtés $x = a$, $y = b$ du carré $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ lorsque $n$ tend vers l'infini positif et les prolongements de ces côtés lorsque $n$ tend vers l'infini négatif. Cela découle immédiatement des équations

$$\log\frac{x}{a} = \frac{1}{n}\log\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^n\right] \quad \text{et} \quad \log\frac{y}{b} = \frac{1}{n}\log\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^n\right].$$

A. Hurwitz (Zurich).

*Limites de* $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$, *quand* $n$ *tend vers l'infini.* — La forme de la courbe étant essentiellement différente suivant que $n$ est pair ou impair, il y a lieu de distinguer ces deux cas dans la recherche des limites.

Portons, sur les axes des $x$ et des $y$, des longueurs OA et OB égales aux valeurs absolues $a$ et $b$ et achevons le rectangle $OAO_1B$. Construisons, dans les autres quadrants, trois rectangles égaux aux précédents. Ils formeront par leur ensemble un rectangle total $O_1O_2O_3O_4$.

*Cas des valeurs paires de* $n$. — La courbe est fermée, inscrite entièrement dans le rectangle $O_1O_2O_3O_4$, auquel elle est tangente en A, B et les points symétriques.

Si l'on coupe la courbe par des droites d'équation

$$\frac{y}{b} = k\frac{x}{a}$$

depuis l'axe des $x$ jusqu'à la diagonale $OO_1$, c'est-à-dire pour $k$ variant de 0 à 1, et éliminant $y$, il est facile de voir que, pour une valeur donnée de $k$, $x$ reste plus petit que $a$, et tend vers $a$ quand $n$ augmente indéfiniment.

De même, en coupant par des droites

$$\frac{x}{a} = h\frac{y}{b},$$

variant de OO à OB, on voit que $y$ est $< b$, et tend vers $b$, quand $n$ augmente indéfiniment.

Donc, la courbe totale tend vers le périmètre du rectangle $O_1O_2O_3O_4$.

*Cas des valeurs impaires de n.* — Il faut alors fixer les signes de $a$ et $b$. Supposons-les positifs. La courbe présente une branche analogue à la précédente entre A et B, comprise dans le rectangle $OAO_1B$. Elle est tangente à ce rectangle en A et B, où elle présente un point d'inflexion. Au delà, elle se compose de deux branches infinies, l'une du côté des $x$ positifs, l'autre du côté des $x$ négatifs, et asymptotiques à la droite

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

c'est-à-dire à la diagonale $O_2O_4$ du grand rectangle précité.

Par des procédés identiques à ci-dessus on arrive aux mêmes conclusions dans l'intérieur du rectangle $OAO_1B$. Mais si, dans l'équation $\frac{y}{b} = k\frac{x}{a}$, on fait varier $k$ de 0 à $-1$, c'est-à-dire à droite depuis l'axe des $x$ jusqu'à l'asymptote, on voit que, pour une valeur donnée de $k$, $x$ est $> a$ mais tend vers $a$, quand $n$ augmente indéfiniment. De même pour la branche des $x$ négatifs.

Donc la courbe tend vers une ligne brisée, comprenant les deux côtés $O_2O_1$, $O_1O_4$ du rectangle, et en dehors des points $O_2$ et $O_4$, du côté positif, comme du côté négatif, l'asymptote elle-même.

L. Dujardin.

Le rectangle construit sur l'abscisse $OA = a$, et sur l'ordonnée $OB = b$, si $n$ croît par valeurs paires; la partie de ce rectangle comprise dans l'angle XOY jointe à la droite AB (moins précisément le segment AB) si $n$ croît par valeurs impaires. *E.-A. Majol.*

3012. (1906, 34) (E.-N. Barisien). — Question déjà étudiée. *Voir :*

J. Griffiths. — On the problem of finding the circle wich cuts three given circles at three given angles (*P. L. M. S.*, t. III, 1869-1871, p. 269-278).

J. GRIFFITHS. — On the cartesian equation of the circle wich cuts three given circles at given angles (*P. L. M. S.*, t. V, 1873-1874, p. 33-35).

E.-M. LAQUIÈRE. — Recherche des cercles coupant trois cercles donnés sous des angles déterminés (*N. A.*, 1883, p. 272-287).

E.-M. LAQUIÈRE. — Détermination et construction nouvelle du cercle qui coupe trois cercles sous des angles donnés et de la sphère qui coupe quatre sphères sous des angles donnés (*N. A.*, 1883, p. 348-352).

G. TARRY. — Cercle coupant trois cercles donnés sous des angles donnés (*Géométrie* de ROUCHÉ, 1891, p. 288-290).

M. FOUCHÉ. — Sur les cercles qui touchent trois cercles donnés ou qui les coupent sous un angle donné (*N. A.*, 1892, p. 227-244, 331-349, 404-424).

Pour le cas particulier où les trois angles sont égaux, *voir* :

F. van WAGENINGEN. — Les cercles qui coupent sous des angles égaux trois cercles donnés (*Nieuw Archief f. Wiskund.*, t. II, 1876, p. 180-185).

Pour le cercle orthotomique à trois cercles, *voir* SALMON et BRIOSCHI (*N. A.*, 1856, p. 463-464). H. BROCARD.

Rayons des cercles coupant trois cercles de rayon R sous des angles donnés.

On peut prendre la question à un point de vue plus général, et supposer que les trois cercles donnés ont des rayons différents.

Soient :

$d_1$, $d_2$, $d_3$ les côtés du triangle des centres donnés;

$\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ les angles intérieurs de ce triangle;

$R_1$, $R_2$, $R_3$ les rayons des cercles donnés;

$\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ les angles d'intersection donnés;

$\Omega$, $\rho$ le centre et le rayon du cercle inconnu;

$\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ les distances du centre $\Omega$ aux trois sommets $O_1$, $O_2$, $O_3$ du triangle;

$\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ les angles des droites $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$,

les indices ayant, dans le triangle, la correspondance d'usage.

On a, pour une valeur de $\delta_1$,

$$(1) \qquad \delta_1^2 = R_1^2 + \rho^2 - 2 R_1 \rho \cos\alpha_1$$

et deux autres équations semblables, par la permutation tournante des indices.

D'autre part, la trigonométrie donne

$$(2) \qquad d_1^2 = \delta_2^2 + \delta_3^2 - 2\,\delta_2\delta_3 \cos\Delta_1$$

et deux autres semblables par la permutation.

Si, dans l'égalité

$$(3) \qquad \cos^2\Delta_1 + \cos^2\Delta_2 + \cos^2\Delta_3 - 2\cos\Delta_1\cos\Delta_2\cos\Delta_3 = 1,$$

qui a lieu entre les cosinus de trois angles dont la somme est égale à $2\pi$, on introduit les valeurs des cosinus tirées des équations (2), on obtient l'équation suivante :

$$(4) \qquad \Sigma d_1^2(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1^2 - \delta_3^2) + \Sigma \delta_1^2 d_1^2 (d_1^2 - d_2^2 - d_3^2) + d_1^2 d_2^2 d_3^2 = 0,$$

les signes $\Sigma$ comprenant un ensemble de trois termes qui se déduisent les uns des autres par la permutation tournante.

Puis, si dans l'équation (4) on remplace les $\delta$ par leurs valeurs en $\rho$, tirées des équations (1), cette équation, après transformations algébriques et trigonométriques, devient

$$(5) \left\{ \begin{aligned} &[4\Sigma d_1^2(R_1\cos\alpha_1 - R_2\cos\alpha_2)R_1\cos\alpha_1 - R_3\cos\alpha_3) - 2d_1d_2d_3\Sigma d_1\cos\theta_1]\rho^2 \\ &-2\left\{\Sigma d_1^2[(R_1^2 - R_2^2)(R_1\cos\alpha_1 - R_3\cos\alpha_3) + (R_1^2 - R_3^2)(R_1\cos\alpha_1 - R_2\cos\alpha_2)\right. \\ &\qquad\qquad \left. - 2d_1d_2d_3\Sigma R_1\cos\alpha_1\cos\theta_1\right\}\rho \\ &\qquad + \Sigma d_1^2(R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 - R_3^2) - 2d_1d_2d_3\Sigma R_1^2 d_1\cos\theta_1 + d_1^2d_2^2d_3^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose, comme dans la question posée, $R_1 = R_2 = R_3 = R$, cette équation se réduit à

$$(6) \left\{ \begin{aligned} &[4R^2\Sigma d_1^2(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3) \\ &\quad - 2d_1d_2d_3\Sigma d_1\cos\theta_1]\rho^2 \\ &\quad + 4R\,d_1d_2d_3\Sigma d_1\cos\theta_1\cos\alpha_1\,\rho \\ &\quad - d_1d_2d_3[2R^2\Sigma d_1\cos\theta_1 - d_1d_2d_3] = 0. \end{aligned} \right.$$

On pourrait donner à cette dernière équation une autre forme en y introduisant la notion du rayon $r$ du cercle circonscrit au triangle des centres. On a, en effet,

$$2(d_1\cos\theta_1 + d_2\cos\theta_2 + d_3\cos\theta_3) = \frac{d_1d_2d_3}{r^2}$$

et, par suite,

$$(7)\left\{\begin{aligned}&\left[4\,R^2\Sigma\, d_1^2(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)(\cos\alpha_1-\cos\alpha_3)-\frac{d_1^2 d_2^2 d_3^2}{r_2}\right]\rho^2\\&\qquad+4\,R\,d_1 d_2 d_3\,\Sigma\, d_1\cos\theta_1\cos\alpha_1\,\rho-d_1^2 d_2^2 d_3^2\frac{R^2-r^2}{r^2}=0.\end{aligned}\right.$$

La donnée de l'angle $\alpha$ d'intersection de deux cercles correspond à deux situations différentes, suivant qu'on l'applique à l'angle intérieur ou à l'angle extérieur des rayons allant au point d'intersection. Les cosinus de ces angles sont égaux et de signes contraires. La combinaison de ces signes pour les trois angles donne naissance à $2^3$ ou 8 cercles différents, c'est-à-dire à 8 valeurs de $\rho$.

Mais, comme, en changeant *tous* les signes des cosinus, on change simplement le signe du coefficient de $\rho$, et par suite le signe des deux racines dans les équations du deuxième degré ci-dessus, il en résulte que l'on aura toutes les solutions de la question, en considérant simplement quatre équations (de formes 5, 6 et 7) en combinant les signes de telle manière que dans les quatre équations on ne puisse en trouver deux dont les signes de cosinus soient tous respectivement contraires.

En donnant aux cosinus toutes les valeurs possibles, 0, $+1$, $-1$; les formules précédentes donnent la solution de problèmes particuliers intéressants : recherches de cercles coupant orthogonalement d'autres cercles, tangents intérieurement, ou extérieurement de différentes manières; condition pour que trois cercles soient tangents deux à deux à une ou plusieurs droites respectivement, etc.

L. Dujardin.

La réponse à cette question se trouve dans mon Mémoire manuscrit présenté en 1887 à l'Académie royale des Sciences de Lisbonne et publié en partie dans le *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas* de M. G. Teixera en 1882. Ce problème peut avoir en général quarante-huit solutions.

A. Schiappa Monteiro (Lisbonne).

**3013.** (**1906**, 35) (E.-N. Barisien). — *Courbes représentées par les équations* $x = a\cos^m\varphi$, $y = b\sin^m\varphi$.

Je crois qu'il n'y a d'étudiées que les courbes mentionnées dans l'énoncé.

Leur équation générale est

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{m}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{m}} 1.$$

On en trouvera une bibliographie au Volume de 1901, p. 234-236, en réponse à la question **1948** (**1900**, 333). H. Brocard.

**3014.** (**1906**, 35) (*Crut*). — *Aires de triangles.* — I. Aire $\Delta$ du triangle $H_a H_b H_c$ des milieux des hauteurs $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ d'un triangle ABC. — A', B', C' étant les milieux des côtés du triangle ABC, les points $H_a$, $H_b$, $H_c$ sont sur les côtés du triangle A'B'C'. Les triangles AB'C', BC'A', CA'B', A'B'C' étant égaux, les pieds des hauteurs de A'B'C' sont les conjugués isotomiques des points $H_a$, $H_b$, $H_c$.

Le triangle $H_a H_b H_c$ a donc pour sommets les conjugués isotomiques des sommets du triangle orthocentrique du triangle ABC.

Ainsi, le triangle $H_a H_b H_c$ est homothétique au triangle $\alpha\beta\gamma$ conjugué isotomique du triangle orthocentrique $A_1 B_1 C_1$ du proposé ABC. Le rapport d'homothétie est $\frac{1}{2}$.

Il suffit donc d'évaluer l'aire $\alpha\beta\gamma$. On trouve, sans difficulté,

$$\Delta\alpha\beta\gamma = \Delta ABC - \sum \frac{a^2}{2} \cos B \cos C \sin A.$$

Comme vérification, $\Delta\alpha\beta\gamma = 0$, si le triangle donné est rectangle.

II. Aire $\Delta$ du triangle $I_a I_b I_c$ des milieux des bissectrices intérieures d'un triangle ABC. — Ces points se trouvent sur les côtés du triangle A'B'C' et les divisent dans le même rapport que les pieds A'', B'', C'' des bissectrices, c'est-à-dire dans le rapport des côtés adjacents; mais ils sont évidemment leurs isotomiques.

Le triangle $I_a I_b I_c$ s'obtiendra donc en divisant les côtés du triangle A'B'C' dans le rapport inverse des côtés adjacents. Il est donc, à un facteur près, le triangle des isotomiques des pieds $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ des bissectrices du triangle donné.

Les segments issus d'un sommet sont donc tous deux proportionnels au côté opposé, et le triangle $\alpha\beta\gamma$ aura ses côtés parallèles à ceux du proposé.

On aura ainsi

$$\Delta\alpha\beta\gamma = \Delta ABC - abc \sum \frac{a \sin A}{(a+b)(a+c)}.$$

Comme vérification,

$$\Delta\alpha\beta\gamma = \frac{1}{4}\,\Delta ABC,$$

si le triangle donné est équilatéral. H. Brocard.

R et $r$ étant les rayons des cercles circonscrit et inscrit :

1° Le triangle ayant pour sommets les milieux des hauteurs a pour aire

$$s = \frac{R^2}{2}\Big[\sum(1+\cos^2 A + \cos^4 A)\operatorname{tang} A - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)\sum(\sin A + \operatorname{tang} A)\Big],$$

ou encore

$$s = \frac{R}{4}\sum a\,[\cos B \cos C\,(1+\cos^2 A) - \cos A\,(\cos^2 B + \cos^2 C)];$$

2° Le triangle ayant pour sommets les milieux des bissectrices a pour aire

$$\sigma = \frac{r^2}{4}\sum \frac{\sin A \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-C}{2}}.$$

P. Hendlé.

Si D, E, F sont trois points quelconques pris respectivement sur les côtés d'un triangle ABC; P, Q et R les milieux des droites AD, BE, CF; l'aire du triangle PQR est le quart de celle du triangle DEF.

D'un autre côté, si l'on a

$$\frac{BD}{DC} = \frac{l}{m}, \quad \frac{CE}{CA} = \frac{l'}{m'}, \quad \frac{FB}{AF} = \frac{l''}{m''},$$

on sait que le rapport des aires des triangles DEF et ABC est

$$\lambda = \frac{ll'l'' + mm'm''}{(l+m)(l'+m')(l''+m'')}.$$

Si D, E et F sont les pieds des bissectrices du triangle ABC, on a

$$\lambda = \frac{2\,abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

Si D, E et F sont les pieds des hauteurs du triangle ABC, il vient :

$$\lambda = 2\cos A\cos B\cos C = \frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{4\,a^2b^2c^2},$$

etc., etc.

J'ignore si le théorème énoncé plus haut est connu. GENTY.

*Aires des triangles formés en joignant : 1° les milieux des hauteurs d'un triangle ; 2° les milieux des bissectrices.*

$$1^\circ \quad S = R^2 \sin A \sin B \sin C \cos A \cos B \cos C = \frac{R^2}{8} \sin 2A \sin 2B \sin 2C;$$

$$2^\circ \quad S = \frac{R^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A)(\sin A + \sin B)}.$$

DELAHAYE, *E.-A. Majol*, MATHIEU.

1° L'aire du triangle Σ ayant pour sommets les milieux des hauteurs du triangle S a pour expression

$$\Sigma = \frac{1}{16}\,\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{a^2b^2c^2}\,S.$$

Les milieux des hauteurs d'un triangle S ne peuvent être en ligne droite que si ce triangle est rectangle.

2° L'aire du triangle Σ' ayant pour sommets les milieux des bissectrices vaut

$$\Sigma' = \frac{1}{2}\,\frac{abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}\,S.$$

Pour les bissectrices externes, il suffira de changer $a+b$, $a+c$, $b+c$ en $a-b$, $a-c$, $b-c$. Quand S est équilatéral, on a $\Sigma = \Sigma' = \frac{1}{16} S$. P. BARBARIN.

Autres réponses de MM. PLAKHOWO, K. HAGGE (Kolsnap, Allemagne), J. ROSE, communiquées à M. *Crut*.

3015. (**1906**, 35) (*Crut*). — OI, OI' étant deux diamètres conjugués d'une ellipse, les anomalies excentriques en I, I' ont pour

valeurs $\varphi$, $\varphi - 90°$. C, C′ étant les centres de courbure aux points I, I′, la droite CC′ a pour équation

$$(1) \qquad y + \frac{c^2}{2b}\sin^3\varphi = \frac{a}{b}\,\frac{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}{\cos^3\varphi - \sin^3\varphi}\left(x - \frac{c^2}{2a}\cos^3\varphi\right).$$

La podaire de l'enveloppe, par rapport à l'origine, s'obtiendra en éliminant $\varphi$ entre l'équation (1) et

$$y = -\frac{b}{a}\,\frac{\cos^3\varphi - \sin^3\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}\,x,$$

d'où

$$\operatorname{tang}^3\varphi = \frac{bx + ay}{bx - ay};$$

on en déduira $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, qu'il restera à substituer dans l'équation (1). H. Brocard.

1° L'enveloppe de la droite joignant les centres de courbure correspondant à deux points conjugués d'une ellipse est une courbe du sixième ordre dont l'équation est $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\right.$ étant celle de l'ellipse$\left.\right)$:

$$\begin{aligned} 2(ax + by)^2(ax - by)^2(a^2x^2 + b^2y^2) \\ -(a^2 - b^2)^2(3a^2x^2 + b^2y^2)(a^2x^2 + 3b^2y^2) = 0. \end{aligned}$$

2° Le lieu de la projection du centre de l'ellipse sur cette droite est une courbe du quatorzième ordre dont l'équation peut se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$\begin{aligned} \left[(x^2 - y^2)^2 - (a^2 - b^2)^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right]^3\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \\ + 27(a^2 - b^2)^2\left[\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right]^2(x^2 + y^2)^4 = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}{x^2 + y^2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

P. Hendlé.

$\varphi$ étant le paramètre angulaire du point M, en posant $\frac{c^2}{a} = \alpha$,

$\frac{c^2}{b} = \beta$, les équations de CC′ et de sa perpendiculaire OD sont

$$\beta x(\sin^3\varphi - \cos^3\varphi) + \alpha y(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi) + \alpha\beta(\sin^6\varphi + \cos^6\varphi) = 0,$$
$$\beta y(\sin^3\varphi - \cos^3\varphi) - \alpha x(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi) = 0,$$

d'où

$$\sin^3\varphi = -\frac{(\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2)}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}, \qquad \cos^3\varphi = \frac{(\alpha x - \beta y)(x^2 + y^2)}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2};$$

l'équation du lieu de D est donc

$$[(\alpha x + \beta y)^{\frac{2}{3}} + (\alpha x - \beta y)^{\frac{2}{3}}]^3(x^2 + y^2)^2 - (\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2)^2 = 0.$$

Quant à l'enveloppe de CC′, elle est déterminée par les équations

$$\alpha y + \beta x = \frac{\cos^4\varphi - \sin^2\varphi}{\sin\varphi},$$
$$\alpha y - \beta x = \frac{\sin^4\varphi - \cos^2\varphi}{\cos\varphi},$$

entre lesquelles il faut éliminer $\varphi$. P. Barbarin.

*Enveloppe et podaire centrale des droites joignant les centres de courbure relatifs aux extrémités de deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse.* — En fonction de l'angle excentrique $\varphi$ les coordonnées de la droite considérée sont

$$\lambda = \frac{c^2}{b}(\cos^3\varphi - \sin^3\varphi), \qquad \mu = -\frac{c^2}{a}(\cos^3\varphi - \sin^3\varphi),$$
$$\nu = -\frac{c^4}{ab}(\cos^6\varphi + \sin^6\varphi);$$

mais l'identité $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ permet de réduire la valeur de $\nu$ à $\frac{c^4}{ab}(3\cos\varphi\sin\varphi - 1)$, de sorte que prenant pour variable $\theta = \tang\frac{\varphi}{2}$, on a les expressions :

$$\lambda = \frac{c^2}{b}[(1 - \theta^2)^3 - 8\theta^3], \qquad \mu = -\frac{c^2}{a}[(1 - \theta^2)^3 + 8\theta^3],$$
$$\nu = -\frac{c^4}{ab}(1 + \theta^2)[6\theta(1 - \theta^2) - (1 + \theta^2)^2].$$

Il vient ensuite pour la podaire :

$$x = -\frac{\nu\lambda}{\lambda^2 + \mu^2}, \qquad y = -\frac{\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Les courbes cherchées sont donc formellement des unicursales respectivement de la sixième classe et du douzième ordre.

*E.-A. Majol.*

Autre réponse de M. L. DUJARDIN, communiquée à l'auteur de la question.

**3019.** (**1906**, 36). — (*Trinitario*). — *Aire d'un triangle.* — Dans mon mémoire *Uber eine Darstellung der Klassenzahl binärer quadratischer Formen durch unendliche Reihen* (*Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. 129), j'ai introduit la notion d'une intégrale double projective et en particulier de l'aire, par rapport à une forme linéaire. Cette aire se réduit à l'aire dans le sens ordinaire du mot, si la forme linéaire égalée à zéro représente la droite à l'infini. L'aire du triangle formé des points $(x_0, y_0, z_0)$, $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ par rapport à la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z$ a pour expression

$$\frac{\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1)(\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2)}$$

(voir *loc. cit.*, p. 198). Il s'ensuit aisément, que le lieu d'un point qui détermine avec cinq points donnés un triangle de Pascal dont l'aire a une valeur C donnée est une conique et que les coniques correspondant à des valeurs différentes de C forment un faisceau.

A. HURWITZ (Zurich).

Soient d'abord $Ox$, $Oy$, $\gamma$ deux droites et un point fixe de coordonnées $a$, $b$. Si $\alpha$ se meut sur $Ox$ et $\beta$ sur $Oy$ de sorte que le triangle $\alpha\beta\gamma$ ait une aire constante, on a évidemment

$$\alpha\beta - b\alpha - a\beta - K = 0$$

et $\alpha$ et $\beta$ décrivent deux divisions homographiques où O se correspond à lui-même lorsque $K = 0$.

Ceci posé, soient A, C, O, D, B les cinq points donnés : $\gamma$ est la rencontre de AC et BD ; OC et OD sont prises pour $Oy$ et $Ox$. $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ formant comme ci-dessus le triangle d'aire constante, $A\alpha$ et $B\beta$ se coupent en M de façon à définir l'hexagone ACDOBM où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont les trois points de rencontre des couples de côtés opposés ; le lieu de M est une conique passant par A et B.

Si de même on se donne AODBM ou BOCAM, les lieux de C et D sont deux coniques analogues confondues avec la première quand $\alpha\beta\gamma = 0$, puisque celle-ci passe alors par O, ainsi que par C et D. Le théorème de Pascal se trouve ainsi vérifié.

Une marche analogue conduit au théorème de Brianchon. Soient A et B deux points et CD une droite fixe ; si l'on fait mouvoir sur CD un segment $\beta\gamma$ de longueur constante, $B\beta$ et $A\gamma$ sont les rayons correspondants de deux faisceaux homographiques.

Soient données les cinq droites FD, DA, AB, BC et CE, le segment $\beta\gamma$ étant constant sur CD, $B\beta$ et $A\gamma$ coupent DF et CE aux points F, E ; alors FE enveloppe une conique tangente à DF et à CE, et qui est tangente aussi à AB, AD et BC, lorsque $\beta\gamma = 0$.

P. Barbarin.

*Courbes décrites par un point tel qu'en faisant la construction de Pascal pour vérifier s'il est sur la conique déterminée par cinq points donnés, on obtienne un triangle d'aire donnée.*

La formule qui exprime le double de l'aire S d'un triangle, donné par les coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ de ses sommets, est (en supposant ces coordonnées proportionnelles aux distances de chaque point aux côtés d'un triangle de référence ABC) :

$$S = \frac{(2R\sin A\sin B\sin C)^2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}}{(\alpha\sin A+\beta\sin B+\gamma\sin C)(\alpha'\sin A+\beta'\sin B+\gamma'\sin C)(\alpha''\sin A+\beta''\sin B+\gamma''\sin C)}.$$

Or, il est clair qu'en prenant pour sommets du triangle de référence trois, A, B, C, des cinq points donnés, désignant les deux derniers par D et E, puis encore par M le sixième point, de coordonnées $(x, y, z)$, supposant enfin les sommets de l'hexagone pris dans l'ordre ABDMEC, on aura un triangle PQR, dont le sommet P, ou $(\alpha, \beta, \gamma)$, sera fixe et dont les sommets Q et R, ou $(\alpha', \beta', \gamma')$ et

$(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, variables sur les droites $\overline{CA}$ et $\overline{AB}$ respectivement, auront pour coordonnées des fonctions linéaires de $x, y, z$. De là suit sans autre calcul qu'en posant

$$V = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}, \qquad L = \alpha' \sin A + \beta' \sin B + \gamma' \sin C,$$

$$M = \alpha'' \sin A + \beta'' \sin B + \gamma'' \sin C,$$

V sera une fonction quadratique et L, M, des fonctions linéaires de $x$, $y, z$ : en outre $V = 0$ sera l'équation de la conique $\overline{ABCDE}$, $L = 0$ et $M = 0$, les équations des droites joignant respectivement les points D et E aux points à l'infini sur les côtés $\overline{CA}$ et $\overline{AB}$.

L'équation du lieu de M sera donc de la forme

$$V - KLM = 0,$$

et l'on aura pour les différentes valeurs de K les coniques d'un faisceau ponctuel admettant pour points fixes les points où la conique V est coupée par les droites L et M. Le surplus de la question (en Géométrie euclidienne) suit immédiatement de ces considérations fort simples.

*E.-A. Majol.*

**3025.** (**1906**, 59) (*Alauda*). — *Étant donnés trois points, caractériser la droite de leur plan pour laquelle la somme des carrés des perpendiculaires abaissées des trois points est minimum.* — L'expression de la distance d'un point $(x, y, z)$ à une droite $(\lambda, \mu, \nu)$ étant en coordonnées trilinéaires normales (au facteur $2R \sin A \sin B \sin C$ près)

$$\frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{(x \sin A + y \sin B + z \sin C)\sqrt{\Omega}},$$

où l'on pose pour abréger

$$\Omega = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu \cos A - 2\nu\lambda \cos B - 2\lambda\mu \cos C,$$

la somme des carrés des distances des sommets du triangle de référence à la droite $(\lambda, \mu, \nu)$ est

$$S = \frac{\dfrac{\lambda^2}{\sin^2 A} + \dfrac{\mu^2}{\sin^2 B} + \dfrac{\nu^2}{\sin^2 C}}{\Omega};$$

la valeur de cette somme ne change donc pas si la droite enveloppe une certaine conique appartenant au faisceau des homofocales de la conique

$$\frac{\lambda^2}{\sin^2 A} + \frac{\mu^2}{\sin^2 B} + \frac{\nu^2}{\sin^2 C} = 0.$$

Par conséquent, il n'existe à proprement parler ni maximum, ni minimum pour la valeur de $s$; toutefois, au-dessous d'une certaine valeur de $s$, la droite $(\lambda, \mu, \nu)$ cesse d'être réelle, et au-dessus d'une certaine autre valeur de $s$, quoique l'on soit conduit à une infinité de valeurs réelles de $\lambda$, $\mu$, $\nu$, on n'en obtient que d'imaginaires si l'on adjoint la condition

$$\frac{\lambda}{\sin A} + \frac{\mu}{\sin B} + \frac{\nu}{\sin C} = 0:$$

c'est ce qui est remarqué dans l'énoncé 3025.

Il s'agit donc de la détermination des axes de la conique

$$\frac{\lambda^2}{\sin^2 A} + \frac{\mu^2}{\sin^2 B} + \frac{\nu^2}{\sin^2 C} = 0,$$

dont l'équation ponctuelle est

$$x^2 \sin^2 A + y^2 \sin^2 B + z^2 \sin^2 C = 0,$$

et à la place de cette conique, purement imaginaire, il y a lieu de considérer l'ellipse concentrique et homothétique

$$\begin{aligned} 0 &= (x \sin A + y \sin B + z \sin C)^2 - (x^2 \sin^2 A + y^2 \sin^2 B + z^2 \sin^2 C) \\ &= 2(yz \sin B \sin C + zx \sin C \sin A + xy \sin A \sin B), \end{aligned}$$

qui passe par les sommets du triangle de référence et qui jouit de propriétés remarquables, en particulier de la propriété d'être l'ellipse circonscrite d'aire minimum.

Toutefois il ne s'offre aucun motif de présumer qu'en dehors du barycentre aucun point remarquable lié au triangle puisse être régulièrement situé sur l'un ou l'autre des axes cherchés, car ceux-ci se présentent sous un aspect symétrique et ainsi le point devrait appartenir à l'un et l'autre : on construira donc les axes, ainsi qu'à l'ordinaire, comme le couple rectangulaire des faisceaux involutifs formés par les couples de directions conjuguées parmi lesquels trois sont apparents à première vue pour l'ellipse dont il s'agit.

On pourrait, dans l'ordre d'idées que manifeste l'énoncé 3025,

chercher le quatrième point commun à l'ellipse et au cercle circonscrit au triangle, après quoi il n'y aurait plus qu'à mener les bissectrices d'un certain angle; mais les coordonnées de ce quatrième point, qui sont

$$\frac{1}{\sin^2 A \sin(B-C)}, \quad \frac{1}{\sin^2 B \sin(C-A)}, \quad \frac{1}{\sin^2 C \sin(A-B)},$$

ne paraissent pas se prêter à une construction simple.

*E.-A. Majol.*

**3027** et **3028**. (**1906**, 60) (H. Bosmans). — Il existe en effet une biographie de Jean Errard, par Marcel Lallemend et Alfred Boinette (Bar-le-Duc, imprimerie Comte-Jacquet; Paris, Thorin, Dumoulin, 1884, 332 pages in-12).

J'y trouve (p. 116-117) la réponse que voici aux questions **3027** et **3028** :

« En 1594 encore, Errard fit paraître sa *Réfutation de quelques propositions du Livre de M. de l'Escale* [Scaliger] de la quadrature du cercle par luy, intitulé : *Cyclometrica elementa duo* (in-f°, Leyde, 1594). Au Roy, par Jean Errard, de Bar-le-Duc, ingénieur de Sa Maiesté. [DDXCIIII] in-8° de quatre feuillets, dont trois sont imprimés (Bibliothèque Nationale, V + 831.

» Dans son Livre, Scaliger se vantait, dit M. Max Werly, d'avoir découvert la quadrature du cercle : il fut vivement réfuté par Viète, Adrien Romain et le P. Clavius; Errard prit part à la lutte. Il « présenta au Roy [Henry IV] son petit discours pour deffendre » le *Traité de Géométrie* qu'il a naguère dédié à Sa Maiesté, dans » lequel quelques démonstrations d'Archimède seroyent très-fausses, » si les propositions du sieur de l'Escale estoient certaines ».

» Puis, dit M. Bégin, Errard se borne à démontrer géométriquement l'erreur de ce paradoxe, « que le circuit du dodécagone in» script au cercle peut plus que le circuit du cercle, d'où s'en suit » la fausseté de la proposition que le circuit du cercle est décuple » du quarré du diamètre », comme le témoignent deux figures géométriques au trait et une triangulation rigoureuse. « Par ainsi, » ajoute Errard, cette quadrature du cercle demeurera pendue au » croc, ensemble tout ce qui est basty sur ce fondement, » et il termine ainsi sa lettre : « Je laisseray le reste aux plus versez ès mathé» matiques et supplieray votre Maiesté avoir ceci pour aggréable. De

» son très humble et très obéissant serviteur, G. Errard. A Paris, » au moys de septembre 1594. »

*Note.* — Je saisis l'occasion de rappeler qu'il existe aux manuscrits de la Bibliothèque nationale, ancien fonds, un document qui paraît avoir échappé à l'attention des deux biographes précités de Jean Errard.

Il s'agit du Recueil n° 663 indiqué au Catalogue sous la désignation suivante :

663, « Traité de fortifications » par Herrar, « ingénieur du roy Henry quatre »

Commençant par :

« Fortification est rendre une place forte, afin que peu d'hommes résiste à un plus grand nombre.... »

Et finissant par :

« ... puis le passer par la chausse pour savoir la quantité du salpestre. »

Papin, Dessins au lavis, XVII$^e$ siècle. Anc. 7120.

A part la singulière transcription du nom, l'attribution de ce travail à Jean Errard ne saurait faire le moindre doute.

H. Brocard.

3035. (**1906**, 62) (H.-B. Mathieu). — *Identité.* — L'identité faisant l'objet de l'énoncé 3035 est la conséquence trop directe d'identités trop connues pour pouvoir être considérée comme présentant un intérêt propre et une existence indépendante. On a, en effet,

$$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2,$$

et par l'élévation au carré

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^4 &= [(x^2-y^2)^2-4x^2y^2]^2+[4xy(x^2-y^2)]^2\\ &= [(x^2+y^2)^2-8x^2y^2]^2+[4xy(x^2-y^2)]^2;\end{aligned}$$

puis, en doublant (et introduisant, si l'on veut, un facteur $\lambda^4$),

$$\begin{aligned}2(x^2+y^2)^4 = {} & [(x^2+y^2)^4-8x^2y^2-4xy(x^2-y^2)]^2\\ & +[(x^2+y^2)^2-8x^2y^2+4xy(x^2-y^2)]^2.\end{aligned}$$

*Quilibet.*

Réponse analogue de M. Brocard.

# QUESTIONS.

3085. [V] N'existe-t-il pas à Paris un bureau ou une agence qui se charge de renseigner sur les citations faites du nom d'un auteur scientifique ou d'une personne quelconque dans les publications les plus diverses ?

Si cela est, quels sont les moyens de travail de ce bureau et les conditions de l'abonnement ? *Hergé.*

3086. [V] Qui a introduit le nom de « perspective cavalière » et quelle est la signification du mot « cavalière ».

H. de Vries (Delft).

3087. [**A3g**] A-t-on employé la méthode suivante pour développer les radicaux et les racines des équations en fractions continues (¹) ?

Ayant une équation dont la racine positive est située entre $\alpha$ et $\alpha + 1$

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + cx + d = 0,$$

on aura

$$x = \alpha + \frac{1}{x_1},$$

$$f(\alpha)x_1^n + f'(\alpha)x_1^{n-1} + \tfrac{1}{2}f''(\alpha)x_1^{n-2} + \ldots + (na\alpha + b)x_1 + a = 0,$$

et ainsi de suite. C'est la série des formes équivalentes.

A. Werebrusow (Théodosia).

(¹) *Voir* **1905**, 44, où il faut lire

$$\frac{x}{y} = 1.23075\ 55992\ 06190\ldots = (1.4.2.1.433.2.1.1.2.5.1.9.1.2.2\ldots).$$

**3088.** [**T7c**] Un circuit fermé sur une pile est parcouru au temps $t$ par un courant d'intensité $i$; il se déforme de façon que durant un intervalle $dt$ le flux de champ magnétique à travers son contour varie de $d\mathcal{N}$ : le travail des forces électromagnétiques agissant sur le circuit est égal à $i\,d\mathcal{N}$, si, le circuit étant dépourvu de self-induction, le champ magnétique est dû tout entier à des causes étrangères; il est égal à $\frac{1}{2}i\,d\mathcal{N}$ seulement, *si*, aucune cause étrangère n'intervenant, le champ est tout entier dû à la self-induction du circuit.

La différence entre les deux résultats semble tenir à ce que, dans le second cas, un élément $ds$ du circuit, en se déplaçant, entraîne son propre flux et ne coupe donc que le flux produit par les *autres* éléments.

S'il en est ainsi, dans le voisinage d'un élément $ds$, le champ magnétique dû à $ds$ doit égaler la moitié du champ dû à *tous* les éléments du circuit.

On désirerait une démonstration *directe* de cette proposition, dont on aura sans doute déjà remarqué la corrélation avec un théorème d'électrostatique bien connu et *très aisé* à démontrer. EDM. FRANCKEN (Liége).

**3089.** [**J2f**] On partage au hasard un jeu de piquet en 8 paquets de 4 cartes.

Quelle est la probabilité que, dans chaque paquet, les 4 cartes soient :

1° D'espèce différente (sept, huit..., roi...);

2° De couleur différente (cœur, pique, trèfle, carreau);

3° D'espèce et de couleur différentes?

Ce que je désire, c'est moins un résultat numérique, qui peut être pénible à calculer, qu'une formule et surtout qu'une *méthode,* à laquelle je n'ai pu parvenir (sauf pour le numéro 2° que je serais bien aise de vérifier par le procédé nouveau qui me serait indiqué). L. DUJARDIN.

**3090.** [**O2cδ**] Il existe un grand nombre d'arcs connus

dont la trisection est possible rigoureusement au moyen de constructions effectuées par la règle et le compas. Un correspondant pourrait-il me donner, de ces arcs ou de ces familles d'arcs, une nomenclature aussi complète que possible? R. Guimaraes (Elvas, Portugal).

**3091.** [**V**] *Problème de Malfatti.* — Derousseau a publié en 1895, dans *M. S. L.*, 2e série, t. XVIII, une bibliographie de ce problème. Je désirerais connaître les articles de revues traitant de cette question depuis 1895 et aussi ceux que Derousseau pourrait avoir oubliés.

L. Godeaux (Ath, Belgique).

**3092.** [**R7g**, **R8c**$\gamma$] Un correspondant pourrait-il m'indiquer des Ouvrages ou des Mémoires où soit étudié avec un certain développement le mouvement ascendant d'un corps grave sur un plan incliné? *Milèse.*

**3093.** [**X6**] Contrairement à une opinion émise dans l'*Intermédiaire* (**1895**, 161), l'emploi d'un instrument pour rechercher une aire présente un intérêt pratique considérable.

(Le calcul numérique, déjà très long avec des surfaces régulières, est, pour ainsi dire, inapplicable aux cours d'eau et aux propriétés adjacentes. Le calcul mécanique, au contraire, donne en quelques minutes les surfaces les plus capricieuses.)

Aussi, je demande : 1° à qui sont dues la première idée et la première exécution d'un planimètre? 2° s'il existe, pour le planimètre polaire, une théorie tout à fait élémentaire?

G. Lemaire.

**3094.** [**V1a**] Pourquoi dit-on : *triangle, quadrilatère, polygone, circonférence?*

Ne serait-il pas raisonnable de puiser à une source unique

d'étymologie et de désigner invariablement les figures par le nombre de leurs côtés ou le nombre de leurs angles?

G. Lemaire.

3095. [V et I1] Ce théorème, que tout nombre entier peut se mettre sous la forme

$$1\alpha \pm 3\alpha \pm 9\alpha \pm 27\alpha \pm \ldots \qquad (\alpha = 0 \text{ ou } 1),$$

était connu de Stifel (*Arith. int.*, f° 38). N'existerait-il pas chez un auteur plus ancien? A. Aubry.

3096. [J1 et Q4] $n$ jetons numérotés 1, 2, 3, ..., $n$ étant disposé en cercle, on enlève le premier, puis le deuxième des suivants, puis le troisième des suivants, etc. Quel est le numéro du $n^{\text{ième}}$ jeton enlevé? A. Aubry.

3097. [Σ].(1903, 7, 99; 1904, 1, 113, 260;.1905, 6).

PRIX ACADÉMIQUES.

Académie royale de Belgique.

*Sujet de prix pour* 1907 :

*a*. Trouver en hauteur et en azimut les expressions des termes principaux des déviations périodiques de la verticale dans l'hypothèse de la non coïncidence des centres de gravité de l'écorce et du noyau terrestres. Prix : 800fr.

*b*. Entre les éléments de deux formes du second degré (deux systèmes plans non superposés, un système plan et une gerbe, deux gerbes de sommets différents) on établit une correspondance quadratrique [*Verwandschaft zweiten Grades* dans le sens de Reye (*Geometrie der Loge,* t. II, Ch. XXII)]. Etudier les systèmes d'éléments qu'on déduit par jonction ou par intersection des couples d'éléments homologues des deux formes du second ordre. Prix : 800fr.

Brocard, La Rédaction.

3098. [V7] Jouvin (*Sol. et éclaircis. de quelques*

*probl. de Math.*; Paris, 1658) donne comme connu depuis quarante ans en Lorraine un problème identique au célèbre problème de Newton : « *Si boves a depascant pratum b in tempore c, etc.* », à cela près qu'il s'agit de personnes ayant dépensé en un certain temps une certaine somme et l'intérêt de celle-ci pendant ce temps. S'agirait-il d'Albert Girard?

A. AUBRY.

**3099. [V7]** En plusieurs endroits, Fermat parle de sa méthode *de maximis* dans la théorie des nombres. Ne veut-il pas parler du procédé recueilli par de Billy (*Inventum votum*) et qui consiste à passer d'une solution $x = a$ de la congruence $Ax^\alpha + Bx^\beta + \ldots \equiv 0 \pmod p$ à une autre, en changeant, dans cette congruence, $x$ en $a + y$?

A. AUBRY.

**3100. [V]** Kramp (*A. G.*, t. V) dit avoir lu que la formule $x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$, attribuée généralement à Snellius, est en réalité due à Cusa. Où Kramp a-t-il vu cette rectification historique?

A. AUBRY.

**3101. [D1]** Posant $Lx = \lim_{n=\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$, des considérations très simples conduisent à la relation

$$\sum_1^\infty x^{2^k} > L\frac{1}{1-x} > \sum_1^\infty x^{3^k}$$

Écrivant d'après cela

$$L\frac{1}{1-x} = \sum_1^\infty x^{X^k},$$

on voit, après divers essais, que la courbe $y = X$ paraît avoir un rebroussement au point $x = 0$, $y = 2$; monter jusqu'au point $x = 0,01$, $y = 2,15$; aller ensuite assez régulièrement jusqu'au point $x = 1$, $y = e$.

Pourrait-on définir simplement la fonction X, ou tout au moins vérifier cette allure de la courbe $y = X$?

A. Aubry.

3102. [Q4] On partage en $2^n$ cases une bande de papier AB, au moyen de $2^n - 1$ parallèles transversales. Comment doit-on y inscrire les nombres 1, 2, 3, ..., $2^n$, pour que, pliant la bande en C de manière à mettre B sur A, coupant la bande en C; puis repliant en D, de manière à mettre C sur A, coupant en D; etc., jusqu'au dernier pli qu'on ne coupe pas, on ait une petite brochure dont les pages soient exactement numérotées?

Même question avec un rectangle partagé en $2^n$ cases par $2^n - 2$ parallèles aux côtés et qu'on replie alternativement de droite à gauche et de bas en haut. A. Aubry.

3103. [Q4] On dispose sur une circonférence $n$ jetons, marqués 1, 2, 3, ..., $n$, et, à partir du premier, on les enlève, en comptant de $k$ en $k$. Désignant par $f(n, h)$ le numéro du $h^{\text{ième}}$ jeton enlevé, on a :

$$f(n, 1) = h, \quad f(n+1, h+1) - f(n, h) \equiv k \pmod{n+1},$$

ce qui permet de dresser de proche en proche les solutions du problème de Caligula, pour tous les cas.

Connaît-on un moyen plus direct? A. Aubry.

# RÉPONSES.

**217.** (**1894**, 115) (G. Loria) et **280**. (**1894**, 151) (P. Tannery). — *Sur Pierre Hérigone* (**1895**, 55, 82). — Dans sa réponse (**1895**, 55) aux questions 217 et 280, M. Tannery dit qu'en dehors des citations et des mentions qui se rapportent à l'ouvrage de P. Hérigone, il n'a rencontré son nom que deux fois : 1° dans une lettre de Diodati à Galilée ; 2° dans une lettre de Cavalieri à Mersenne.

Ayant rencontré ce nom dans le *Dictionnaire universel de Mathématiques et de Physique*, de Savérien, Paris, 1753, page 252, je communique le texte qui s'y rapporte :

« L'histoire rapporte qu'Apollon rendit à Delos un oracle aux habitans de cette isle, qui étoient affligés de la peste. Par cet oracle, Apollon demandoit qu'on lui fit un autel qui eut une fois autant de pieds cubiques que l'ancien en avoit. Or, c'étoit justement la duplication du cube que demandoit Apollon (Vitruve, L. 9, C. 3).

« Les Déloniens fort embarrassés allèrent consulter Platon, pour satisfaire à l'oracle ; et Platon les renvoïa à Euclide, sans les négliger lui-même. Pierre Hérigone (*Cours Math.*, t. VI), de qui je tiens ce trait historique, ajoute qu'on voit dans Eutoce la méthode de Platon, etc... »

G. Lemaire (Cochinchine).

**755.** (**1896**, 37 ; **1905**, 100) (H. Bourget). — *Ouvrages de Legendre* (**1906**, 100). — I. Voici d'autres témoignages à retenir au sujet de la thèse mathématique de Legendre.

Rendant compte d'une réédition de *Leçons élémentaires de Mathématiques*, de l'abbé de La Caille, par l'abbé Marie, professeur de mathématiques au Collège Mazarin, le *Journal des Sçavans* de novembre 1770 ajoutait à la fin de l'article :

« On annonce actuellement une thèse qui doit être soutenue sous sa présidence par M. Le Gendre, sur les parties les plus difficiles de la Géométrie et qui sera dédiée à l'Académie Royale des Sciences,

comme la seule Compagnie à qui un pareil hommage puisse être offert. »

II. Extrait du *Journal des Sçavans* (décembre 1770) :

*Thesis mathematicæ, Academiæ Regiæ scientiarum inscriptæ*, etc.

La thèse de Mathématique soutenue au collège Mazarin, le 25 juillet, par M. Le Gendre, est la plus solennelle et la plus brillante que l'on eût jamais vue dans l'Université de Paris; tout concourut à illustrer cet acte: l'Académie des Sciences à qui il étoit dédié y assista en corps; les plus habiles géomètres interrogèrent le répondant, et il satisfit à toutes les questions avec une facilité, une netteté, un sçavoir dont tout le monde fut étonné. Les questions qu'on lui proposa exigeoient des intégrations d'équations différentielles très compliquées, dont il exécuta tous les calculs avec dextérité. M. d'Alembert, le samedi suivant (28 juillet), rendit compte à l'Académie des Sciences des succès de ce jeune géomètre, de ses dispositions et de ses talens, d'une manière aussi flatteuse pour lui que pour M. l'abbé Marie, son professeur, qui a donné à son élève tous les soins que méritoient d'aussi rares dispositions.

III. Dans son *Éloge historique de Legendre* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XXXII, 1864), Elie de Beaumont rappelle que Legendre mourut sans avoir laissé de postérité.

Je tiens d'une personne digne de foi l'affirmation qu'un proche parent, du nom de Legendre, ancien officier de cavalerie, résidait à Coolus (Marne) où il était, m'a-t-on dit, commissaire de surveillance administrative de la Compagnie des Chemins de fer de l'Est.

IV. Réimpression de l'ancien *Moniteur*.

9 février 1792. Annonce de l'ouvrage : Exposé des opérations faites en France en 1787 pour la jonction des observatoires de Paris et de Greenwich, par MM. Cassini, Mechain et Legendre, membres de l'Académie Royale des Sciences.

21 avril 1795. Legendre nommé membre de l'Agence temporaire des poids et mesures.

28 décembre 1795. Annonce des *Éléments de Géométrie*.

V. Pour différents travaux scientifiques de Legendre, dont plusieurs seront aujourd'hui difficiles à retrouver, on consultera :

1° M. Chasles. — Rapport sur les progrès de la Géométrie, 1870.

2° Correspondance sur l'École Polytechnique, t. II, 1812.

3° Mémoires présentés par divers savants, etc. (2e série, t. I, 1827, p. 601-610). Rapport sur le Mémoire de M. Cauchy intitulé : *Mémoire sur les intégrales définies*.

4° La France littéraire, de Quérard.

Le premier ouvrage imprimé de Legendre est une dissertation sur la question de balistique proposée par l'Académie des Sciences de Prusse pour le prix de 1782. Berlin, 1782.

5° Dictionnaire chronologique et raisonné des découvertes. Paris, L. Colas, 1822.

6° Mémoires de l'Institut.

7° Mémoires du Centenaire d'Abel.

VI. Un Mémoire de Legendre sur l'analyse indéterminée, dans le *Recueil de l'Académie des Sciences de Paris* pour l'année 1785, cité par Lagrange (*Addition à l'Algèbre d'Euler : Analyse indéterminée*, § 47).

VII. Je n'ai rencontré aucune mention d'autographes de Legendre dans les Catalogues de manuscrits, et j'ignore si quelque bibliothèque en possède.

VIII. *Voir* aussi POISSON : *Dicours prononcé aux funérailles de M. Legendre*. 1833.

H. BROCARD.

**845.** (**1896**, 128) (P.-F. TEILHET). — *Courbe de poursuite dans le cercle* (**1897**, 22). — Une étude très complète de ce problème vient d'être exposée par M. L. Dunoyer dans un article intitulé : Sur les courbes de poursuite d'un cercle (*N. A.*, 1906, p. 193-222).

H. BROCARD.

**860.** (**1896**, 152 ; **1906**, 82). — La question reproduite de l'année 1896 a trouvé sa réponse dans le 2e Volume de mon *Histoire des Mathématiques* (1re édition de 1892, p. 393, 2e édition de 1900, p. 429). Au surplus *voyez* la *Bibliotheca Mathematica* de 1896, p. 96 et 120, de 1897, p. 32, de 1905 (t. VI de la 3e série), p. 112. Le nom de *Regula cecis* qui se trouve en Allemagne dès le commencement du XVIe siècle dérive probablement de *Zeche* (écot), puisqu'on demande ce que chacun doit payer. La première question d'analyse indéterminée du premier degré à résoudre en nombres entiers a été trouvée

par moi pour l'Europe, avec certitude, dans les *Propositiones ad acuendos iuvenes* remontant sûrement au XI$^e$ siècle, et peut-être à Alcuin (VIII$^e$ siècle). *Voyez* mon *Histoire des Mathématiques*, t. I, 2$^e$ édition de 1894, p. 787-788. M. CANTOR.

901. (**1896**, 199; **1906**, 89) (*Cycleman*). — *Courbes de virage.* — Puisque les courbes dont il est question dans l'énoncé **901** doivent avoir en chacun des points $A_0$, $A_1$ des contacts du troisième ordre avec les droites $\overline{OA_0}$, $\overline{OA_1}$, c'est-à-dire rencontrer chacune de ces droites en quatre points respectivement coïncidant avec les points $A_0$, $A_1$, on ne peut les chercher que parmi les quartiques ou parmi les courbes d'ordre supérieur. Il est au surplus manifeste que les quartiques dont l'équation en coordonnées normales, référée au triangle $OA_0A_1$, est de la forme

$$x^4 - Syz = 0,$$

$S = 0$ étant l'équation d'une conique quelconque, satisfont aux conditions de contact imposées. Si l'on veut de plus que la quartique admette la médiane $\overline{OM}$ comme diamètre (c'est-à-dire pour axe dans le cas du triangle isoscèle), il suffit que cette condition soit remplie à l'égard de la conique $S = 0$, ce qui conduit à former certaines relations qu'il n'est pas utile d'écrire.

Je me bornerai en effet à considérer un seul cas particulier, celui où l'on fait

$$S = \Delta^2 = (x \sin A + y \sin B + z \sin C)^2.$$

$\Delta$ est la constante $2R \sin A \sin B \sin C$, et l'on a

$$y \sin B + z \sin C = (2R \sin B \sin C - x) \sin A,$$

$$y \sin B - z \sin C = \frac{x^4}{4R^2 \sin^2 A \sin B \sin C},$$

de sorte que $y \sin B$ et $z \sin C$ sont les racines de l'équation

$$0 = t^2 - t(2R \sin B \sin C - x) \sin A + \frac{x^4}{4R^2 \sin^2 A \sin B \sin C}.$$

Il est donc facile de construire la courbe, qui, sur une parallèle à $\overline{A_0A_1}$, ne compte que deux points à distance finie. Les points situés

sur le diamètre sont fournis par les valeurs de $x$ qui vérifient l'équation

$$\pm \frac{x^2}{\mathrm{R}\sin\mathrm{A}\sqrt{\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}}} - x\sin\mathrm{A} + 2\,\mathrm{R}\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C} = 0,$$

c'est-à-dire

$$x = \left(\sin\mathrm{A} \pm \sqrt{\sin^2\mathrm{A} \pm 8\sqrt{\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}}}\right)\mathrm{R}\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}:$$

deux sont donc toujours réels et les deux autres imaginaires. Si du reste on pose $2\,\mathrm{R}\sin\mathrm{A} = a = \overline{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}$, et qu'on fasse tendre $\sin\mathrm{A}$ vers zéro, on trouve

$$x = \pm a\sqrt{2}(\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C})^{\frac{3}{4}}.$$

La quartique envisagée satisfait donc même à la dernière condition posée dans l'énoncé 901. E. MALO.

1087. (1897, 146) (E. FAUQUEMBERGUE). — Même objet et même réponse que pour la question 2999 (1906, 7, 130).

H. BROCARD.

1307. (1898, 149) (*Novus*). — *Édition des Œuvres de Descartes* (1898, 216; 1906, 11). — Le VIII^e Volume, dernièrement publié (1905), renferme :

*Principia philosophiæ;*
*Epistola ad G. Voetium;*
*Lettre apologétique,*
et *Notæ in Programma.*

Les X^e et XI^e Volumes, en préparation, contiendront la refonte et la revision des Notices biographiques relatives à Descartes, ainsi qu'un exposé de sa philosophie.

Au cours de sa mission, M. Ch. Adam a retrouvé, à Middelbourg, le Journal d'Isaac Beeckmann. (*Voir* rép. 2778, 1906, 106-107).

H. BROCARD.

1385. (1899, 175) (*Jean-Baptiste*). — *Involution* (1900, 210). — Le dictionnaire de Savérien (1753) mentionne et critique le caractère ☉, nommé *caractère d'involution*, qui marque le carré d'une quantité. G. LEMAIRE (Cochinchine).

**2134.** (**1901**, 188) (*Epsilon*). — *Applications numériques de la méthode des moindres carrés* (**1902**, 80; **1906**, 64). — Dans l'esprit de la question et pour la comparaison désirée, *voir* S.-W.-L. Glaisher (*Monthly notices of the R. Astr. Soc.*, t. XXXIV, p. 311-334 et 1880, t. XL, p. 601-615 et Suppl., p. 18-23). *On the Method of least squares.*

L'auteur cite également :

C. Niven, *Cambr. senate Houze Probl. and Riders,* 1878, 188-191. — Van Geer, *Nieuw Arch. v. Wisk.*, 1875, t. I, p. 179-188.

Pour une application numérique plus compliquée, *voir* aussi :

A. Schobloch, *Definitive Bahnbestimmung des Cometen* 1870, II (*Astron. Nachr.*, Bd. CXLI, p. 3383, col. 377-402, 1896).

H. Brocard.

**2241.** (**1901**, 309) (H. Brocard). — *Équation*

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 6xy^2 + 2y^3 = 1$$

*en nombres entiers* (**1902**, 111, 283; **1903**, 108). — Les minima de $f(x,y)$ pour les petites valeurs de $x$ et $y$ sont :

| $x =$ | $-y =$ | $f(x,y) =$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | — 2 |
| 1 | 1 | + 2 |
| 1 | 3 | — 8 |
| 1 | 2 | + 3 |
| 2 | 5 | — 2 |
| 3 | 7 | +34 |
| 19 | 47 | —47 |
| .. | .. | .... |

La racine de l'équation $f(x,y) = 0$ développée en fraction continue est

$$\frac{x}{y} = -(0.2.2.9.1.3.1.1.2.7.4.5.2.2.2.4.1.1.9.2$$
$$\times 4.1.442.1.6.2.1.1.7.1.3.1.1.1.11.1.1.102.1\ldots).$$

Les valeurs de $f(x,y)$ croissent jusqu'à la dernière réduite calculée :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x =$ | 18859 | 56054 | 14258 | 75555 |
| $y =$ | — 46455 | 62393 | 60957 | 07239 |
| $f(x,y) =$ | — 19662 | 35296 | 56800 | 60071 |

Pour qu'on ait $f(x, y) = 1$, il faut qu'un quotient incomplet soit plus grand que $2,437y$. A. Werebrusow (Théodosie, Crimée).

**2512.** (**1903**, 34) (A. Werebrusow). — (**1903**, 283, 316; **1904**, 152; **1905**, 43, 79, 156). — Parmi les $3m$ constantes dans $\alpha$, A et B, dont les degrés, par rapport à $n$, sont $m$, $m-1$, $m-2$ dans les expressions

$$x = \alpha^2 + 2A, \qquad y = \alpha^3 + 3A\alpha + B \qquad (\omega = 3A^2 - 2B\alpha),$$

il y a trois constantes arbitraires, car on peut mettre $\lambda n + \mu$ pour $n$ et diviser $\alpha$, A, B, $\omega$ et $\Delta$ par $p$, $p^2$, $p^3$, $p^4$ et $p^6$, sans changer l'égalité. En égalant donc à zéro les cofficients des termes supérieurs de l'expression

$$\Delta = \omega(\alpha^2 + 3A) - A^3 - B^2,$$

dont le degré est $4m-2$, on obtient pour $\Delta$ l'expression de degré $m+1$; ainsi l'ordre de $\Delta$ par rapport à $x$ sera

$$\Delta = k\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)^{\frac{m+1}{2m}}.$$

L'équation $x^3 - y^2 = \Delta$ a donc un nombre fini de solutions, ainsi que les équations cubiques. A. Werebrusow (Théodosia).

**2612.** (**1903**, 156) (Gillet). — *Calculs des Grecs et des Romains* (**1903**, 272). — Dans le *Bulletin de Physique et de Mathématiques élémentaires* (en russe), n° 180 du XV$^e$ semestre, on a montré, comme exemple de multiplication romaine,

$$\text{CXXXXIV} \times \text{XXX},$$

qui se faisait comme suit :

$$\begin{aligned} \text{C} \times \text{X} &= \text{M} \\ \text{C} \times \text{X} &= \text{M} \\ \text{C} \times \text{X} &= \text{M} \\ \text{XXXX} \times \text{XXX} &= \text{MCC} \\ \text{XXX} + \text{XXX} + \text{XXX} + \text{XXX} &= \text{CXX} \end{aligned}$$

Total........ MMMMCCCXX

ce qui signifie $144 \times 30 = 4320$. N. Plakhowo (Russie).

**2694.** (**1903**, 300) (*Artigensis*) (**1904**, 104). — *Voir* C. RUNGE, *Sur la résolution numérique des équations différentielles* (*M. A.*, t. XLVI, 1895, p. 167-178).

La méridienne de la surface d'une goutte liquide ou d'une bulle gazeuse est définie par le système

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tang}\varphi,$$

$$2z = a^2\left(\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{d\varphi}{dr}\cos\varphi\right).$$

H. BROCARD.

**2719.** (**1904**, 9) (*Canon*). — *Tangentes à deux cercles* (**1904**, 111, 131). — Réponse de M. *Vidi*, communiquée à l'auteur de la question. LA RÉDACTION.

**2740.** (**1904**, 66) (E.-B. ESCOTT). — *Critère pour les racines imaginaires d'une équation* (**1904**, 180; **1905**, 23).

Le critère peut être obtenu comme cas particulier du théorème de Newton. *Voir* :

H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra* (2, Aufl., 1898). Band I, p. 345-350;

I. TODHUNTER, *Theory of equations*, 1888, p. 236-251;

J. PETERSEN, *Theorie der algebraischen Gleichungen*, p. 203-211. (Kopenhagen, 1878).

Ce théorème est indiqué, mais sous une forme incomplète, dans l'*Encyklopädie der Math. Wiss.*, I. B. 3 a, p. 415. Voici des références additionnelles à celles mentionnées dans l'*Encyklopädie* :

J.-J. SYLVESTER, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, t. CLIV, 1864; *P. L. M. S.*, t. I, 1865, 17 pages; *Trans. Roy. Irish. Acad.*, t. XXIV, 1871; *Philosophical Magazine*, 4e série, t. XXXI, 1866, p. 214; *Mess. Math.*, 2e série, t. IX, 1879, p. 71-84.

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

**2749.** (**1904**, 70) (P.-F. TEILHET). — La question, telle que je la comprends, me paraît analogue à celle du n° **1201** (**1898**, 4) résolue : **1898**, 142, 201 et 280.

Un rapport constant existe entre l'aire et le volume, tous deux de

révolution, engendrés par une courbe dont l'équation ne renferme qu'un paramètre, et qui, par suite, est toujours semblable à un type fondamental. Exemples : cercle, parabole, lemniscate, cycloïde, cardioïde, strophoïde, cissoïde, folium droit, folium de Descartes, chaînette, développante de cercle, logarithmique, etc.

Il en est de même si la courbe de base est à deux paramètres dont le rapport soit constant ou donné. Exemples : épicycloïde ou hypocycloïde à $n$ rebroussements, développée d'ellipse, podaire centrale d'ellipse, etc.

La plupart de ces aires et volumes se trouvent indiqués en formules finies dans le *Cours d'Analyse infinitésimale*, de Ph. Gilbert (1875). H. BROCARD.

**2753.** (**1904**, 71) (T. LEMOYNE). — *Propriétés des cubiques nodales* (**1904**, 174; **1906**, 19; 104). — En terminant une réponse à cette question (**1906**, 19-20) j'ai indiqué une proposition sur les quartiques rationnelles dont M. Malo avait avancé en forme dubitative la partie qui concerne la classe de la courbe d'involution; plus récemment (**1906**, p. 104), M. Malo, au moyen de la transformation steinérienne, a déterminé la classe $(m-1)$ de la courbe d'involution d'une involution quadratique placée sur une courbe d'ordre $m$ ayant un point $(m-1)$-ple; sans recourir à la transformation quadratique, on démontre aisément, par le principe de correspondance, la proposition générale suivante :

*Étant donnée, sur une courbe plane rationnelle* $C_m$ *de l'ordre* $m$, *une involution du degré* $k$, *la courbe* $C'$ *d'involution* (*enveloppe des droites qui joignent des points correspondants*) *est de la classe* $(m-1)(k-1)$ *et du genre* $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$.

Cherchons les rayons de $C'$ issus d'un point arbitraire O : une droite $x$ menée par O coupe $C_m$ en $m$ points, à chacun desquels en correspondent $(k-1)$ en l'involution; ces $m(k-1)$ points joints avec O donnent $m(k-1)$ rayons $x'$ correspondant à $x$. De même, à un rayon $x'$ correspondent $m(k-1)$ rayons $x$, et nous avons ainsi deux faisceaux de rayons, avec même sommet O, en correspondance $[m(k-1), m(k-1)]$. Ces deux faisceaux ont donc

$$m(k-1)+m(k-1)=2m(k-1) \text{ rayons doubles,}$$

dont seulement $2m(k-1)-2(k-1)$ unissent des points corres-

pondants de l'involution, car $2(k-1)$ rayons doubles de la correspondance sont les droites qui projettent de O les $2(k-1)$ points doubles de l'involution. Chacun des rayons de l'enveloppe issu de O est évidemment obtenu deux fois de la façon indiquée et la classe de C′ est donc

$$m(k-1)-(k-1)=(m-1)(k-1).$$

Pour avoir le *genre* de C′ on représente $C_m$ sur une conique, ce qui ne change pas le genre de la courbe d'involution; la classe de cette courbe est alors $(k-1)$ et, comme elle ne possède pas, en général, des tangentes doubles, car, en général, un groupe de l'involution ne contient pas deux ou un nombre plus grand de points doubles, le genre cherché est $\frac{1}{2}(k-2)(k-3)$.

Si l'on suppose $C_m$ rationnelle-générale, sa classe est $2(m-1)$ et C′ doit avoir avec $C_m$

$$2(m-1)(m-1)(k-1)$$

tangentes communes : $2(k-1)$ sont évidemment les tangentes à $C_m$ aux points doubles de l'involution, les tangentes aux $3(m-2)(k-1)$ points de contact de $C_m$ avec C′ en donnent $6(m-2)(k-1)$ autres.

Si $k=2$, nous avons : *l'enveloppe des droites qui joignent les couples de points conjugués d'une involution quadratique, placée sur une courbe* $C_m$ *unicursale de l'ordre* $m$, *est, en général, une courbe unicursale de la classe* $(m-1)$, *tangente à* $C_m$ *en* $3(m-2)$ *points et ayant en commun avec elle les deux tangentes aux points doubles de l'involution et* $2(m-2)(m-3)$ *autres tangentes.*

En cet énoncé, qui généralise une propriété bien connue des cubiques nodales, il n'est pas nécessaire, comme le suppose M. Malo, que $C_m$ soit douée d'un point multiple de l'ordre $(m-1)$, circonstance sur laquelle est essentiellement basée sa démonstration,

V. RETALI (Milan).

2853. (**1904**, 285) (E. MAILLET). — *Erreurs des mathématiciens.* (**1905**, 275; **1906**, 65 et 110). — Je retrouve dans mes Notes, sans pouvoir en contrôler l'exactitude, les erreurs suivantes :

I. Brassine a relevé une erreur de Fermat sur une loi de la Statique.

II. La seconde partie de l'énoncé de son principe de Thermodynamique par Carnot est entachée d'erreur.

III. Resal (*Nouvelles Annales de Math.*, 1872 et *Traité de Mécanique*) et après lui Gilbert ont prétendu que l'interprétation du mouvement des projectiles, dans le cas de l'attraction terrestre constante, donnée par Bour était erronée. M. Massau, dans son *Traité de Mécanique*, a prouvé que Bour avait raison.

IV. Erreur de Sophus Lie sur la théorie des complexes (*Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 308). Cette erreur a été corrigée par M. Demoulin (par la Géométrie) et par M. Scheffers (par le Calcul). J. Rose.

Autre réponse de M. Williot relative à une proposition de Dirichlet (*Leçons sur la théorie des nombres*, publiées par Dedekind, *Supplément II*, § 117).

**2893.** (**1905**, 73) (*Nester*). — Les listes proposées seront très longues et nécessairement incomplètes et indéterminées, car il sera toujours loisible de faire intervenir de nouveaux éléments auxquels on n'avait pas pensé.

Pour la liste des constructions de triangles, il faudra prévoir et cataloguer toutes les combinaisons trois à trois (à part quelques-unes évidemment illusoires ou non valables) des différents éléments qui se présentent comme données de ces sortes de problèmes : angles, côtés, hauteurs, médianes, symédianes, bissectrices intérieures et extérieures, centres et rayons des cercles circonscrit, inscrit et ex-inscrits, points remarquables (barycentre, orthocentre, etc.), angles remarquables et éléments divers, associés de façon plus ou moins simple.

Le Catalogue des constructions de coniques ne sera pas moins étendu, ni moins compliqué, ni moins indéterminé, par suite de l'intervention de données particulières.

Au surplus, les deux listes devront être appuyées de références bibliographiques. Certains problèmes, en effet, ont été proposés ou étudiés par des mathématiciens de renom (Newton, Pascal, Fermat, Carnot, Terquem, Halley, Castillon, Lamé, Bessel, Bellavitis, E. de Jonquières, Cremona, Chasles, Salmon, etc.), et il serait injuste de n'en point rappeler l'origine. H. Brocard.

**2922.** (**1905**, 128) (E. Malo). — (**1906**. 26). — Pour une réponse plus complète, voir *Mathesis*, 1906, p. 83-86, réponse **1543**.

H. Brocard.

**2925.** (**1905**, 129) (Fitz Patrick). — *Sur l'affaire Vrain-Lucas* (**1905**, 255; **1906**, 117). — Indications complémentaires.

VIII. Quérard. — Les supercheries littéraires dévoilées, t. II, 1882. Article Galilée.

La *Revue de Paris* a commencé en 1869 la publication de lettres inédites de Louis XIV, Mme de Maintenon, Galilée, Pascal, le comte d'Hamilton, Marie de Médicis, François de Sales.

Ces documents furent présentés au public par Michel Chasles.

Quérard dénonce la fausseté de ces lettres, mais il omet de dire ou de rappeler à qui, en réalité, on devait les attribuer.

IX. Extrait d'une Conférence à la Société le *Livre contemporain*, le 22 mars 1905, par M. Albert Cim :

« Ajoutons qu'une vengeance de Libri aurait, a-t-on prétendu, d'ailleurs sans preuve, donné naissance à la cruelle mystification dont fut victime, il y a quelque quarante ans, le mathématicien Michel Chasles. Ce serait Libri qui, pour le punir de lui avoir, après sa condamnation et sa déchéance, pris sa place à l'Institut, lui aurait dépêché le faussaire Vrain-Lucas, avec sa mirifique collection d'autographes, lettres de Pythagore, de Néron, de Marie-Madeleine, de Cléopâtre, de Jules-César, etc., sans compter les Notes de Pascal et les fragments de Galilée, qui réjouirent si fort la galerie et clôturèrent la discussion en 1869. »

X. La fameuse lettre de Charles-Quint à Rabelais, citée dans la question 795 (**1896**, 78; **1905**, 121, 223) est sortie sans doute de la même officine.

H. Brocard.

**2937.** (**1905**, 149) (G. Lemaire). — *Marées fluviales* (**1906**, 27). — *Voir* aussi :

L. Petiot. — Étude sur le mouvement des marées dans la partie maritime des fleuves. Paris, 1861.

H. Brocard.

**2948.** (**1905**, 172) (A. Grévy). — *Vie de Gaspard Monge* (**1906**, 47, 118). — Additions à la dernière réponse.

VI. M.-E. Wœlflin a bien voulu me rappeler que l'*Essai historique*, de 1819, de Charles Dupin a été signalé par Dufour, lieutenant-colonel du génie (depuis général), dans les *Annales des faits et des sciences militaires,* faisant suite aux *Victoires et conquêtes des Français de* 1792 *à* 1815, par MM. Barbié de Bocage, etc., Paris, Panckoucke, t. IV, 1819, p. 264-272. « Nous n'avons pas oublié, dit Dufour, ce que nous devons au protecteur et au fondateur de cette École [Polytechnique] dont nous nous glorifions d'être sortis. »

L'auteur fait aussi allusion à un autre article, de M. Parisot, inséré dans le 12e Cahier desdites *Annales militaires.*

VII. F. Arago. — Biographie de Gaspard Monge, 1746-1818. (*Mémoires de l'Ac. des Sc.*, t. XXIV, 1854).

VIII. O. Terquem — Notes sur certaines formules de Monge (*N. A.*, 1842, p. 504-505).

IX. Signature de Monge au bas d'un rapport au Directoire, daté de Rome (13 germinal, an VI).

Nantes. Manuscrits Labouchère, 662-20.

Lettre autographe, *Ibid.*, 662-21.

X. F. Ritter a signalé (*A. F.*, Pau, 1892, p. 25) une affiliation entre les représentants des familles de Gaspard Monge et de François Viète.

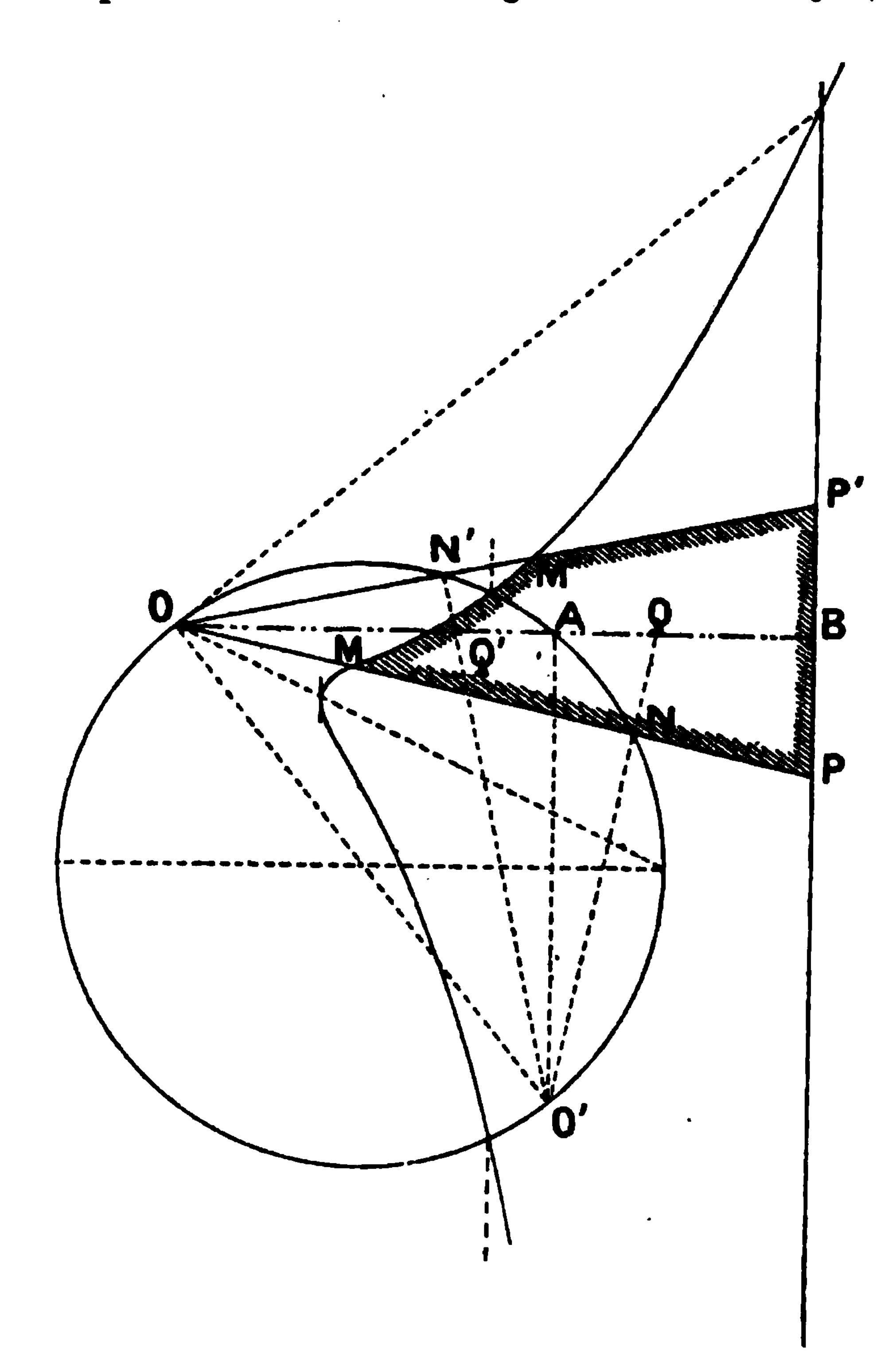
XI. Voici un extrait de l'appréciation formulée au sujet de la *Géométrie descriptive,* de Monge, 5e édition, par Brisson, Paris, 1827 :

« Quel que soit le mérite des ouvrages qui ont été publiés sur la Géométrie, aucun ne porte cette lumière que cet illustre savant répandait si habilement dans ses leçons. On aime à y retrouver ces éclairs de génie que l'inventeur distribuait avec tant d'art dans ses discours, et qui électrisaient son auditoire. « En remontant dans le passé je crois entendre, dit M. Francœur, la voix de Monge, lorsqu'il me fit comprendre les premières notions des arts qu'il avait assujettis à sa nouvelle doctrine. Je voyais les voûtes de pierre s'édifier sous ses mains, les charpentes se dresser et s'assembler à son ordre dans leurs justes proportions, les ombres se distribuer à sa voix sur les corps mis en perspective..., et ces sublimes leçons, je les retrouve dans le Traité de Géométrie descriptive, l'un des plus beaux titres que ce savant, aussi estimable que modeste, ait à la reconnaissance des hommes industrieux. »

H. Brocard.

3030. (1906, 61) (T. LEMOYNE). — *Aire comprise entre la cissoïde de Dioclès et son asymptote évaluée* GÉOMÉTRIQUEMENT. — Je me figure que le mot souligné dans l'énoncé doit être entendu en ce sens que la démonstration demandée soit exempte de tout calcul d'intégration et repose exclusivement sur la notion du secteur élémentaire mesuré par le demi-produit de son angle infinitésimal au sommet et du carré de son rayon; s'il en est bien ainsi, j'envisagerai un cas un peu plus étendu que celui qui est proposé par M. T. Lemoyne.

Soit la cubique nodale circulaire générale dont déjà (*I. M.*, 1905,




235, et antérieurement) j'ai eu occasion de signaler le mode de génération entièrement analogue à celui de la cissoïde, à cela près que le pôle O est quelconque sur le cercle générateur et que la tangente fixe est remplacée par une droite arbitrairement choisie qui demeure

l'asymptote réelle de la cubique. Soient $\overline{OB}$ la droite abaissée perpendiculairement du pôle sur l'asymptote, A le point où cette droite coupe à nouveau le cercle générateur, O' le point de ce cercle diamétralement opposé à O ; soit encore $\overline{OMNP}$ une sécante quelconque rencontrant la courbe en M, le cercle en N, l'asymptote en P : enfin soit désigné par Q le point où la droite $\overline{O'N}$, perpendiculaire à $\overline{OMNP}$, rencontre la droite $\overline{OAB}$.

L'aire élémentaire balayée par le segment $\overline{MP}$, intercepté sur la sécante mobile $\overline{OMNP}$ entre la cubique et l'asymptote, a pour mesure la moitié du produit de l'angle infinitésimal en O par la différence $\overline{OP}^2 - \overline{OM}^2$ : or on a

$$\overline{OP}^2 - \overline{OM}^2 = (\overline{OP} - \overline{OM})(\overline{OP} + \overline{OM}) = \overline{ON}(2.\overline{OP} - \overline{ON})$$
$$= 2.\overline{ON}.\overline{OP} - \overline{ON}^2 = 2.\overline{OQ}.\overline{OB} - \overline{ON}^2.$$

Si maintenant on considère la sécante $\overline{OM'N'P'}$ symétrique de la sécante primitive relativement à la droite $\overline{OAB}$, l'aire élémentaire balayée par le segment $\overline{M'P'}$ est mesurée par la moitié du produit de l'angle infinitésimal en O et de la différence $\overline{OP'}^2 - \overline{OM'}^2$, qui donne lieu à la relation

$$\overline{OP'}^2 - \overline{OM'}^2 = 2.\overline{OQ'}.\overline{OB} - \overline{ON'}^2.$$

Par conséquent, la somme de ces deux aires élémentaires a pour valeur la moitié du produit par l'angle infinitésimal en O de l'expression

$$2(\overline{OQ} + \overline{OQ'}).\overline{OB} - \overline{ON}^2 - \overline{ON'}^2,$$

c'est-à-dire, puisque, par le triangle isoscèle OQQ', on a

$$\overline{OQ} + \overline{OQ'} = 2.\overline{OA},$$
$$4.\overline{OA}.\overline{OB} - \overline{ON}^2 - \overline{ON'}^2.$$

En définitive, l'aire comprise entre la cubique, son asymptote et deux sécantes également inclinées sur l'asymptote, est égale à la différence entre le double du secteur que détermine dans le cercle de rayon $\sqrt{\overline{OA}.\overline{OB}}$ l'angle au centre formé par des parallèles aux sé-

cantes considérées, et le secteur découpé par ces sécantes dans le cercle générateur.

Si l'angle des sécantes grandit jusqu'à atteindre deux droites, on pourra énoncer que :

*L'aire comprise entre une cubique nodale circulaire, son asymptote et deux perpendiculaires à l'asymptote infiniment éloignées et équidistantes du point double* (cette dernière condition n'est pas nécessaire et il suffit dans le cas de non-équidistance que l'écart ne surpasse pas une longueur donnée) *a pour valeur l'excès de l'aire du cercle de rayon* $\sqrt{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}$ *sur l'aire du cercle générateur.*

Il faut toutefois faire attention de compter négativement non seulement l'aire afférente à la branche de courbe située relativement à l'asymptote du côté opposé au point double, mais aussi celle de la boucle si la cubique est *crunodale*.

Le résultat précédent peut s'étendre au cas des cubiques nodales quelconques n'ayant qu'une asymptote réelle; mais c'est de quoi il n'est besoin que de faire mention. E. Malo.

La propriété de la cissoïde de Dioclès, d'avoir pour surface totale (des deux côtés de l'axe) le triple du cercle générateur, a été démontrée géométriquement par Ch. Huygens (*Corresp.*, n° 949).

Dans une lettre de 1661 à Carcavi, communiquée par celui-ci le 1er janvier 1662 à Huygens, Fermat avait aussi obtenu très élégamment ce résultat par la Géométrie.

Huygens y ajouta : « J'ay démonstré cette proposition 4 ans auparavant. »

*Voir* Ch. Henry, *Pierre de Carcavy*, etc., p. 38-40 (*B. Bon.*, t. XVII, 1884).

Œuvres de Fermat : Fragment de *Cissoïde*, t. I, p. 285-288; traduction par P. Tannery, t. III, 238-240; lettre de 1661, t. II, p. 454-455).

La démonstration de Fermat ne diffère peut-être pas de celle de Huygens. (Voir *B. D.*, Ire Partie, 1892, p. 19.)

H. Brocard.

Les plus anciennes démonstrations de la proposition dont il s'agit ne reposent pas sur l'emploi de l'analyse; voyez les citations faites

dans la note 3, p. 41 de mon Ouvrage: *Spezielle algebraische und transcendante ebene Kurven* (Leipzig, 1902).

GINO LORIA (Gênes).

**3031.** (**1906**, 61) (E.-B. ESCOTT). — *Réduction d'une formule.*

1° On a

$$S_n(A, N) = A^{-\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}} n^k \frac{d^k}{dt^k} \left[(t+A)^{k+\frac{1}{n}} (t+N)^{k-\frac{1}{n}}\right]$$

pour $t = 0$ : cela résulte de la formule de Leibniz.

2° En faisant $A = N = 1$, l'expression $S_n(A, N)$ devient égale à la somme des coefficients de son développement, laquelle, d'après ce qui précède, a pour valeur

$$n^k \frac{d^k}{dt^k} (t+1)^{2k}_{t=0} = \frac{(2k)!}{k!} n^k.$$

3° La réduction du développement à la valeur finale s'opère immédiatement, puisque l'on a d'abord

$$1.3.5\ldots(2k-1) = \frac{(2k)!}{2^k . k!},$$

et qu'il n'y a qu'à remplacer $A^{k-i}$ par $\dfrac{(\sqrt{A})^{2k-2i+1}}{\sqrt{A}}$ pour obtenir le produit par $\dfrac{1}{2\sqrt{A}}$ de la somme .

$$(\sqrt{A}+\sqrt{N})^{2k+1} + (\sqrt{A}-\sqrt{N})^{2k+1}.$$

*E.-A. Majol.*

**3033.** (**1906**, 62) (E.-N. BARISIEN). — *Les points* P, Q, R, *étant les pieds des normales abaissées sur une ellipse d'un point* M *de cette ellipse, trouver :*

1° *Le lieu de l'intersection des droites* $\overline{PQ}$ *et* $\overline{RM}$;

2° *L'enveloppe des droites* $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RP}$.

Quel que soit le point M pris dans le plan de l'ellipse, on pourra partager en deux couples les points P, Q, R, S, qui sont les pieds sur l'ellipse des normales issues de M : ainsi, en attribuant à la droite $\overline{PQ}$ l'équation

$$b^2 \alpha x + a^2 \beta y - a^2 b^2 = 0,$$

qui la représente comme la polaire d'un certain point $(\alpha, \beta)$, l'équa-

tion de la droite $\overline{RS}$ sera

$$\beta x + \alpha y + \alpha\beta = 0,$$

et les coordonnées $\xi$, $\eta$ du point M seront liées aux coordonnées $\alpha$, $\beta$ par les relations

$$\xi = \frac{c^2\alpha}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}(b^2 - \beta^2), \qquad \eta = -\frac{c^2\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}(a^2 - \alpha^2);$$

en outre, les coordonnées du point d'intersection des droites $\overline{PQ}$ et $\overline{RS}$ ont pour valeurs

$$x = -\alpha\frac{a^2(b^2 + \beta^2)}{b^2\alpha^2 - a^2\beta^2}, \qquad y = \beta\frac{b^2(a^2 + \alpha^2)}{b^2\alpha^2 - a^2\beta^2},$$

et l'on parviendra encore à exprimer $\xi$ et $\eta$ rationnellement en $x$ et $y$ par les formules

$$\xi = \frac{c^2 x}{a^2}\,\frac{b^2x^2 - a^2y^2 + a^2b^2}{b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2},$$

$$\eta = -\frac{c^2 y}{b^2}\,\frac{-b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2}{b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2}.$$

Le premier lieu demandé est donc représenté par l'équation

$$\frac{(b^2x^2 - a^2y^2 + a^2b^2)^2x^2}{a^6} + \frac{(-b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2)}{b^6}y^2$$

$$= \frac{(b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2)^2}{c^4},$$

et, si le point M était assujetti à décrire une ellipse concentrique et homothétique à l'ellipse donnée, il n'y aurait qu'à introduire un multiplicateur arbitraire au second membre : toutes les courbes envisagées sont donc du sixième ordre.

Quant à l'enveloppe, on obtient immédiatement l'équation de la courbe qui est sa polaire réciproque relativement à l'ellipse considérée, savoir :

$$\frac{(b^2 - \beta^2)^2\alpha^2}{a^2} + \frac{(a^2 - \alpha^2)^2\beta^2}{b^2} = \frac{(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)^2}{c^4};$$

et, dans le cas où le point M se déplacerait sur une ellipse concentrique et homothétique, il n'y aurait encore qu'à multiplier par un facteur constant le deuxième membre : la courbe polaire étant dans tous les cas du sixième ordre, l'enveloppe est toujours de la sixième classe.

*E.-A. Majol.*

# QUESTIONS.

**1005.** (**1897**, 32) [**V7**] (¹) Dans un très grand nombre de Traités d'Arithmétique publiés aux XVI^e^ et XVII^e^ siècles on trouve une espèce de problèmes d'Analyse indéterminée, qui porte le titre de *regula cœci* (parfois *ceci* ou *cecis*). D'après M. Cantor (*Verlosungen über Geschichte der Mathematik*, t. II, p. 393), le *Traité d'Arithmétique* de Rudolff (1526) est le premier livre imprimé, où de tels problèmes ont été proposés; M. Cantor dérive *cœci* du mot allemand *Zeche* (société de buveurs), parce qu'il s'agit souvent de personnes qui se sont assemblées pour boire. D'autre part, Terquem (*Problème des jeunes filles, de l'aveugle, etc.; N. A.*, 1859; *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathématiques*, p. 1-2) a traduit *regula cœci* par « la règle de l'aveugle », parce qu'il y a une épigramme arithmétique grecque qui contient un problème de la même nature et où la résolution du problème est attribuée à l'aveugle Homeros. Quelques auteurs croient que *ceci* est le mot italien *zecca* (monnaie) et que, par conséquent, *regula cœci* signifie « la règle des monnaies »; en effet, il s'agit ordinairement de calculer combien d'argent différentes personnes doivent payer.

Quelle est la vraie signification de l'expression *regula cœci*, et quel est le premier auteur qui se soit servi de ce terme? G. Eneström (Stockolm).

(¹) Question insérée dans la *Bibliotheca Mathematica* et restée jusqu'ici sans réponse.

1007 ([1]). (**1897**, 49) [**V7a**] Dans l'écrit : *De numerosa potestatum purarum resolutione* (*Opera mathematica, in unum volumen congesta ac recognita, opere et studio* F.-A. Schooten, Lugd. Batav., 1646), p. 166, Viète a indiqué la formule d'approximation

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a+1}\right).$$

Est-ce que cette formule peut-être retrouvée chez quelque géomètre antérieur à Viète?

G. Eneström (Stocklom).

1012. (**1897**, 50) [**J1a**α] On prend une des permutations $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$ formées avec $n$ nombres entiers consécutifs, puis l'on y fait les $n-1$ diférences $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, ..., $a_n - a_{n-1}$. On opère ainsi pour toutes les permutations. Combien y en a-t-il pour lesquèles $p$ de ces $n-1$ diférences ont une valeur égale à 1, à 2, à 3, etc. ($p \leq n-1$)? Même question en suposant les termes de $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ rangés sur un cercle, c'est à dire qu'à la considération des $n-1$ diférences dont nous venons de parler, on ajoute cèle de la diférence $a_1 - a_n$. *Grip.*

1015. (**1897**, 51) [**K1c**] Soit ABC un triangle de référence.

On considère la polaire trilinéaire P du réciproque M d'un point M, lequel décrit une droite donée R. La distance de M à la droite P est-èle susceptible d'un minimum ou d'un maximum et, dans ce cas, quel est le point de la droite R pour lequel ce maximum a lieu? *Grip.*

1018. (**1897**, 51) [**B1c**α] On a un déterminant symé-

---

[1] La question 1007 a été publiée dans la *Bibliotheca Mathematica* de M. Eneström; elle est restée jusqu'ici sans réponse.

trique $\Delta$, du troisième ordre. Le déterminant fonctionnel des mineurs complémentaires des six éléments, par rapport à ces mêmes éléments, considérés comme des variables indépendantes, est égal à $-2\Delta^2$. Cette propriété est-elle susceptible d'une démonstration et d'une généralisation simple?

*Rosace.*

**1021.** (1897, 73) **[H9]** Une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$(1)\qquad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+D\frac{\partial z}{\partial x}+E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz=0,$$

où A, B, C, D, E, F sont des fonctions quelconques des variables indépendantes $x$ et $y$, ne change pas de forme quand on fait un changement de variables tel que le suivant

$$x=f_1(x',y'),\qquad y=f_2(x',y')\qquad z=f_3(x',y')z',$$

quelles que soient les fonctions $f_1$, $f_2$, $f_3$. A-t-on calculé les *invariants* de l'équation (1), relativement à ce groupe infini de transformations? E. Goursat.

**1022.** (1897, 73) **[I1a]** En étudiant une certaine méthode pour la représentation proportionnelle des partis dans les élections multiples, on est amené à l'équation

$$E(r_1x)+E(r_2x)+\ldots+E(r_sx)=p,$$

où $x$ est l'inconnu; $r_1$, $r_2$, ..., $r_s$, $p$ sont des nombres entiers, et $E(a)$ signifie le plus grand nombre entier contenu en $a$.

Est-ce que de telles équations ont déjà été étudiées, et, en cas affirmatif, quels sont les mathématiciens qui s'en sont occupés? G. Eneström (Stockholm).

**1023.** (1897, 74) **[V9]** Quelqu'un aurait-il la bonté de m'informer de qui est la traduction du Mémoire de Riemann :

*Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* (*B. D.*, série I, t. V; 1873)? Je crois qu'elle est de M. Axel Harnack, mais j'aurais besoin d'en être sûr. L. LAUGEL.

**1027.** (**1897**, 74) **[J2f]** Si l'on prend au hasard deux nombres entiers, et qu'on les divise l'un par l'autre, le n[ième] chiffre décimal du quotient est égal, en moyenne, à

$$c_n = 4 + \tfrac{1}{2} + f(10^n) - 10 f(10^{n-1}),$$

où

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \operatorname{tang}\varphi \, d\varphi}{e^{2\pi x \operatorname{tang}\varphi} - 1},$$

de sorte que la valeur moyenne de la partie fractionnaire est

$$\sum_1^\infty \frac{c_n}{10^n} = 0{,}46139216\ldots.$$

Comment doit-on modifier ces résultats si l'on a soin de ne considérer, dans chaque division, que des nombres premiers entre eux? CESARO (Naples).

**1029.** (**1897**, 75) **[M²7a]** A-t-on étudié, soit d'une façon générale, soit dans des cas particuliers autres que celui de deux quadriques, l'intersection de deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune? A. GOULARD.

**1032.** (**1897**, 75) **[I9c]** Dans une Note de Stern (*N. A.*, p. 23; 1856) l'auteur done, come vérifié empiriquement jusqu'à 9000, le téorème suivant : Tous les nombres impairs (premiers ou composés) qui ne sont pas de la forme $6n + 5$, sont de la forme $p + 2b^2$, où $p$ est un nombre premier. Ce téorème est-il démontré maintenant ou reconnu inexact?

E. LEMOINE.

**1034.** (**1897**, 76) [**O2c**] La surface latérale du cône oblique à base circulaire de rayon $r$, dont les génératrices maxima et minima sont A, $a$, s'exprime par la formule

$$S = \frac{\pi r}{2}\left[\sqrt{Aa} + \frac{A+a}{2}\sqrt{1-\left(\frac{A-a}{2}\right)^2} + \frac{A-a}{2}\arcsin\frac{A-a}{A+a}\right]$$

avec une approximation d'autant plus grande que le cône est moins oblique.

Cette formule, que nous avons rencontrée indirectement (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1896), par une méthode qui peut donner de nombreux résultats du même genre pour les transcendantes elliptiques ou hyperelliptiques, est-elle susceptible d'une démonstration directe? Williot.

**1041.** (**1897**, 78) [**M¹3g**] Si $f$ et $\varphi$ sont deux courbes algébriques de la classe $n$, les foyers réels des courbes du faisceau tangentiel $f + \lambda\varphi$, où $\lambda$ est un paramètre variable, forment une *involution complexe* du degré $n$. Je voudrais savoir si cette proposition, que je crois nouvelle, a été déjà énoncée quelque part. V. Retali (Milan).

---

**3104.** [**Q4**] Soit à trouver un polygone qui puisse être partagé par *deux* droites *rectangulaires* telles que les parties assemblées différemment donnent un carré.

La figure 1 donne une solution immédiate.

L'examen des assemblages de 5, 8, 10, 13, 17, 20, ... carrés égaux conduit à d'autres solutions. Par exemple, 9 des 11 assemblages qu'on peut obtenir avec 5 carrés sont dans ce cas.

Sauf 3, les 64 (¹) assemblages qu'on peut faire de 8 carrés tels qu'il n'y en ait pas plus de 4 dans un sens, et pas plus de 3 dans le sens perpendiculaire, sont dans le même cas.

---

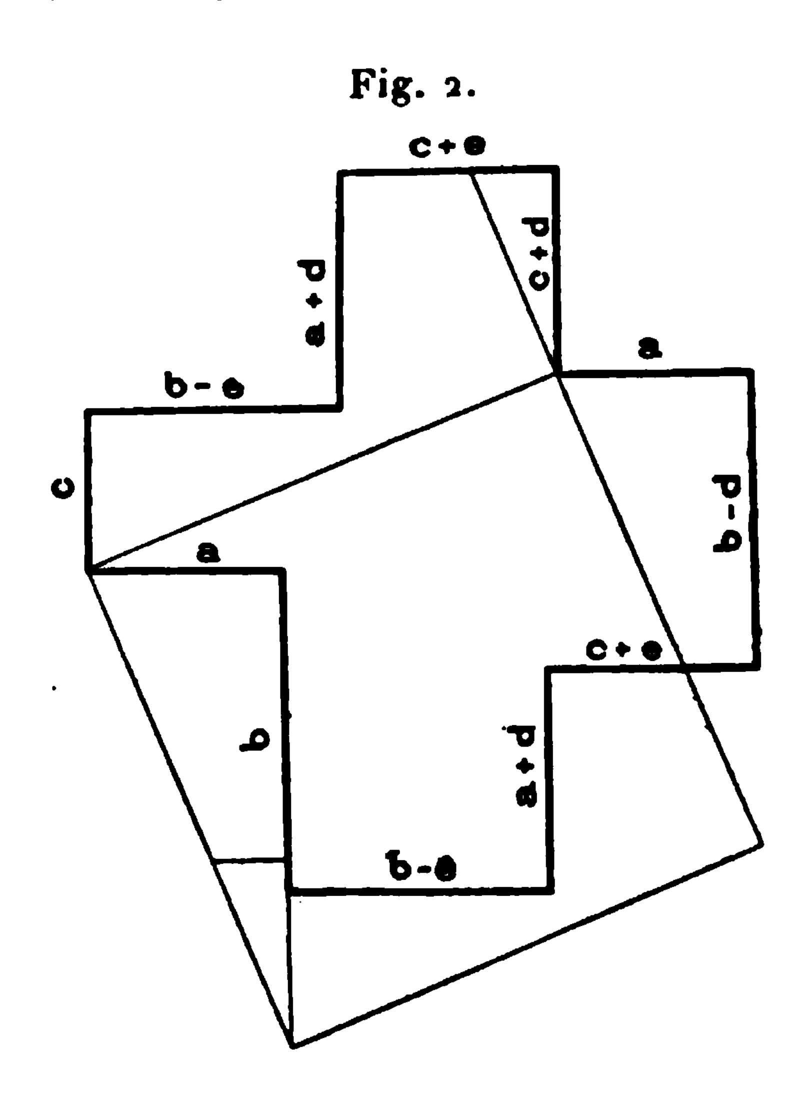
(¹) Cette énumération est une application de la théorie de la *partitio numerorum* d'Euler. Beaucoup des figures ainsi obtenues sont curieuses.

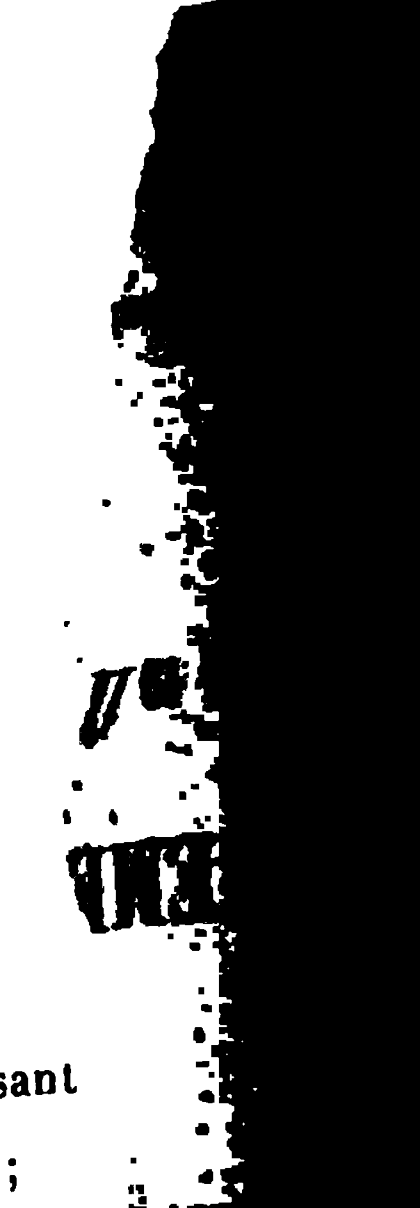
Si l'on considère les assemblages de 8 carrés tels que le tout soit inscriptible dans un carré de côté quadruple, 50 des 77 assemblages qu'on peut ainsi former sont dans le cas envisagé.

Fig. 1.

Une solution assez générale de la question est donnée par la figure 2, où $a$, $b$ et $c$ sont essentiellement positifs.

Fig. 2.



On a des cas particuliers assez intéressants en faisant

| | |
|---|---|
| 1° $d = -a$; | 4° $d = -c$, $b = 0$; |
| 2° $e = d = 0$; | 5° $a = c = -d$; |
| 3° $b = e$; | 6° $d = -a$, $b = 0$. |

Les cas 5° et 6° correspondent aux démonstrations du théorème de Pythagore données par Clairault, dans sa *Géométrie*, et par Guitel dans l'*A. F.* de 1896.

Les conditions du problème peuvent-elles se remplacer par d'autres plus particulières permettant de trouver d'autres solutions simples?

A. AUBRY.

**3105.** [**Q4**] Appelons $\varphi(n)$ le numéro du $n^{\text{ième}}$ et dernier jeton enlevé (question 3103). Il viendra

$$\varphi(n+1)-\varphi(n)\equiv k \qquad (\text{mod } n+1).$$

Soit $k=2$. Si en outre $\theta$ est l'excès de $n$ sur la plus haute puissance de 2 qui y est contenue, on aura

$$\varphi(n)=2\theta+1.$$

Soit $k=3$; formons le tableau

$$\begin{array}{l} g = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ \ldots, \\ a_g = 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 14,\ 21,\ 31,\ 47,\ 70,\ 105,\ 158,\ 237,\ \ldots, \\ \alpha_g = 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ \ldots \end{array}$$

dont les termes sont régis par les lois suivantes :

Si $a_g$ est pair,

$$a_{g+1}=\tfrac{3}{2}a_g \qquad \text{et} \qquad \alpha_{g+1}=\alpha_g.$$

Si $a_g$ est impair et si $\alpha_g=1$,

$$a_{g+1}=\frac{3a_g+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha_{g+1}=2.$$

Si $a_g$ est impair et si $\alpha_g=2$,

$$a_{g+1}=\frac{3a_g-1}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha_{g+1}=1.$$

Intercalons ensuite les nombres entiers dans la seconde ligne et des progressions arithmétiques de raison 3 dans la

troisième; nous aurons cette liste de solutions :

$$n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, \ldots,$$
$$\varphi(n) = 2, 1, 4, 1, 4, 7, 1, 4, 7, 10, 13, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 2, 5, \ldots$$

Peut-on simplifier ces résultats? A. Aubry.

3106. [Σ et S2β]. Je désirerais une observation et une description aussi exacte et minutieuse que possible des phénomènes qui se produisent au passage d'une crue d'un cours d'eau d'une certaine importance sur un barrage fixe. Je ne vise ici que les cours d'eau présentant de grandes crues où la vitesse moyenne dans une section transversale peut atteindre au moins $3^m$ à $4^m$ environ par seconde, et où le barrage est généralement noyé. Ce que je demande aurait d'autant plus d'intérêt que ces crues sont parfois rares. En particulier, je désirerais ce travail pour le barrage du Bazacle à Toulouse sur la Garonne.

Je voudrais surtout savoir si, le barrage étant noyé ou à peu près, le ressaut qui peut se produire aussitôt à l'aval n'est pas nettement (en moyenne) plus élevé au milieu du cours d'eau que sur les bords, et avoir, si possible, une idée approchée, même assez grossière, de la grandeur de ce ressaut (1). E. Maillet.

(1) Ainsi, d'après M. le conducteur Estingoy, il atteignait au Bazacle, dans la grande crue de 1875, quelque chose comme la longueur du corps d'un cheval entraîné par les eaux. — Au besoin, comparer Boussinesq, *Essais sur la théorie des eaux courantes*, p. 577 et suiv.

# RÉPONSES.

**2954.** (**1905**, 200) (*Rudis*). — *Fractions continues* (**1906**, 28, 119). — $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ étant les dernières réduites de la période de $i$ termes de $\cfrac{t}{a_1 + \cfrac{t}{a_2 + \ldots}}$, on aura

$$P_1 Q - P Q_1 = -(-t)^i,$$
$$Q(x-a)^2 - (P - Q_1)(x-a) - P_1 = 0.$$

Pour $x$ donné

$$x = m \pm \sqrt{n},$$

P et $-Q_1$ auront l'expression

$$z = (m-a)Q \pm \sqrt{n Q^2 + (-t)^i}.$$

A. Werkbrusow (Théodosia).

**2964.** (**1905**, 242) (G. Lemaire). (**1906**, 120). — Bien que la réalisation effective de l'anallatisme soit, de façon décisive, l'œuvre de l'ingénieur Porro, il sera intéressant de vérifier que des idées tout à fait pareilles ont été formulées bien antérieurement.

Voici, en effet, un témoignage très précis, tiré du *Journal des Savans*, du 27 août 1696 :

« Extrait d'une lettre de M. L. touchant des lunetes de longue vuë.

« J'ai fait, Monsieur, l'expérience dont je vous avois parlé. Voici comment. J'ai pris les deux verres d'une lunete qui est d'un pied et demi, et je les ai apliqués à un tuyau d'un demi-pied, non pas vis-à-vis l'un de l'autre à l'ordinaire, mais seulement sur des lignes paral-

lèles. Ensuite j'ai pris deux miroirs plans; je les ai placez dans le mesme tuyau, l'un vis-à-vis de l'objectif à côté de l'oculaire; l'autre vis-à-vis de l'oculaire à côté de l'objectif en ménageant les angles d'incidence et de réflexion. Ces verres avec ces miroirs estant ainsi disposez, j'ai trouvé qu'ils font un efet très peu diférent de celui que font les mesmes verres dans leur tuyau ordinaire d'un pied et demi, d'où vous voyez, Monsieur, qu'il est facile de multiplier les miroirs autant que l'on voudra, et de diminuer à proportion la longueur des tuyaux, et mesme d'en tirer plusieurs conséquences pour l'observation; et de cela mesme que la multiplicité des miroirs diminue la lumière, on peut s'en servir avantageusement pour le soleil. Mais comme ce n'est là qu'une première vuë et un premier essai, et que des engagements fort diférens ne me permetent pas de m'apliquer à ces sortes de sciences, quoi que je les estime beaucoup; je m'en raporte à vous, Monsieur, qui avez sur cela du goût, de l'expérience, et beaucoup de lumières, etc. »

J'ignore si l'auteur s'est fait connaître ou a été désigné dans la suite. J'incline à croire que ce pourrait être le physicien La Montre, dont plusieurs articles se rencontrent à la même époque (Voir *I. M.*, **1902**, 14, 130), mais il semble que le principe de l'anallatisme doive remonter à quatorze ans plus tôt, car on trouve au *Journal des Savans,* du 14 décembre 1682, la *Nouvelle invention* tirée d'un écrit envoyé par M. Boffat, Toulousain, demeurant dans le diocèse de Rieux, présentée le 18 novembre, à l'Académie des Sciences, par M. Borelli, auteur lui-même d'une manière de travailler les verres d'optique (*Ibid.*, 6 juillet 1676) :

« M. Boffat a imaginé de faire le tuyau immobile tourné vers le pôle, et de suppléer à tous les mouvemens par le moyen de miroirs plans mobiles qu'il ajuste au bout du tuyau, qui réfléchissent l'objet sur l'objectif pour de là le porter à l'oculaire. On peut même par cette intervention de miroir racourcir le tuyau autant qu'on veut, en disposant les miroirs de telle manière qu'ils réfléchissent l'objet plusieurs fois.

» En attendant que ce traité soit imprimé, etc., cette invention peut être d'une utilité considérable pour l'Astronomie, etc. »

(L'invention du S^r^ Boffat a été rappelée au *Journal* du 13 septembre 1683.)

Ainsi donc, les moyens de réaliser la réduction de longueur et l'anallatisme d'une lunette sont très clairement décrits dans les extraits ci-dessus rapportés. Le mérite de Porro a été de proposer l'emploi de prismes à réflexion totale à la place des miroirs. Cependant il n'est pas bien certain que Porro ait réussi de façon absolument satisfaisante. C'est ce que donne à entendre M. G. Mareschal dans un article de *La Nature* (1er sem. 1897, p. 87-88) : *Sur une nouvelle jumelle.* L'auteur dit que les tentatives faites par Porro et quelques autres, notamment par Hoffmann, pour arriver à un résultat pratique, n'eurent pas de succès. C'est seulement depuis peu que M. Zeiss, opticien à Iéna, a pleinement réussi à appliquer cette méthode.

Quelques études théoriques ont été publiées dans le même ordre d'idées. Je me bornerai à citer :

J. Michez. — Sur la mesure indirecte des distances (théorie analytique des instruments inventés et construits par I. Porro pour la mesure des distances) (*Memorie dell' Acc. delle Sc. dell' Istituto di Bologna*, 3e série, t. I, 1871, 28 p., 1 pl.).

C.-M. Goulier. — Lunette anallatique appliquée à une boussole nivelante et à un tachéomètre (*C. R.*, t. LXXX, 1875, p. 292-295).

Z. Cavani. — La lunette anallatique de Porro à anallatisme central (*Memorie dell' Acc. delle Sc. dell' Istituto di Bologna,* 5e série, t. III, 1892, p. 371-392, 1 pl.). H. Brocard.

2974. (1905, 266) (G. Lemaire) et 2976 (1905, 267) (G. Lemaire). — ***Problème de la Carte*** (1906, 122).

Voici, due à une large contribution de M. Brocard, une bibliographie chronologique du problème de la Carte :

1617. Snellius. — Eratosthenes Batavus, de terræ ambitus vera quantitate a Willebrordo Snellio suscitatus. Lugduni Batavorum, apud Jodocum a Colster. — *N. A.,* t. III, 1857. — Snellius a appliqué la méthode des segments capables au levé des édifices de la ville de Leyde.

1647. Marolois. — Œuvres mathématiques traitans de Géométrie, etc. Amsterdam, chez Jan Jansen. L'édition signalée par M. Laussedat (*Recherches sur les instruments,* etc., Paris, Gauthier-Villars, 1898) implique nécessairement une édition antérieure.

1669. Schickard. — Kurze Anleitung, wie Künstliche Landtafeln

aus rechtem Grund zu verfertigen (Tubingen). — N'existe pas à la Bibliothèque Nationale.

1671. Collins. — A solution given by Mr. John Collins of a chorographical probleme proposed by Richard Townley Esq. who doubtless hath solved the sam otherwise. — *N. A.*, t. XIII, 1854. — Solution par les segments capables avec mise en évidence des *points de Collins* ou *points d'alignement*. — Article paru dans les *Philosophical Transactions*, 25 mars 1671, p. 2093.

1692. Pothenot. — Problème de géométrie pratique. — *N. A.*, t. XIII, 1854. — Solutions par les segments capables, que Pothenot s'attribue. — Article paru dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. X, année 1730.

1765. Lambert. — Ouvrages.

1771. Dalrymple. — Essay on nautical surveying. — *N. A.*, t. XIII, 1854. — N'existe pas à la Bibliothèque Nationale. — C'est de cet Ouvrage que Beautemps-Beaupré (*Méthodes pour lever les cartes*, etc.) dit avoir tiré la solution par les segments capables.

1807. Puissant. — Traité de Topographie, p. 164. — Puissant mentionne le procédé du calque à la planchette.

1819. Puissant. — Traité de Géodésie, 2e éd., t. I, p. 235. — Puissant attribue à Delambre la solution trigonométrique classique.

1822. Benoit. — Cours complet de Topographie et de Géodésie (chez Barrois l'aîné, Paris). — Benoît indique cinq solutions à la planchette.

1825. Hoffmann. — Das Pothenot' sche Problem und seine Auflösung (Aschaffenburg). — N'existe pas à la Bibliothèque Nationale.

1837. Poudra. — Détermination d'un point par trois autres points connus. — *N. A.*, t. XVI, 1857. — C'est la méthode *des deux chapeaux*, connue depuis longtemps, puisqu'elle figure dans l'ouvrage précité de Benoît.

1876. Bessel. — Ueber eine Aufgabe des praktischen Geometrie. Article paru dans le t. II des Œuvres de Bessel. — N'existe pas à la Bibliothèque Nationale.

1884. Habich. — Sur un système particulier de coordonnées curvilignes. — *N. A.*, t. III, 1884.

1895. Prytz. — Solution et tables, dans le *Journal des géomètres-experts*. — Solution ingénieuse, traduction confuse.

1897. Duporcq, Friocourt, Hoffbauer. — Solutions diverses dans *I. M.*, t. IV. — La solution Duporcq paraît nouvelle. La solution

Friocourt est très connue; on la trouve dans Benoît, ouvrage cité, 1822; dans les *N. A.*, t. XVI, 1877, signée Toubin; enfin dans presque tous les Traités d'Hydrographie. Les solutions Hoffbauer rappellent la solution Pétersen, traduction Chemin.

**1900.** DARBOUX. — Article sur les Œuvres de Gauss, paru dans le *Journal des Savants*. — M. Darboux fait mention des points de Collins.

**1901.** HATT. — Utilisation des points de Collins pour la détermination d'un quadrilatère. — Article paru dans les *C. R.*, t. CXXXII.

G. LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

**2977.** (**1905**, 267) (G. LEMAIRE). — *Systèmes d'équations (problème de la Carte)* (**1906**, 76). — Les solutions des pages 76-79 ne semblent pas répondre à la question de M. Lemaire. Voici une solution algébrique complète du système d'équations

$$x^2 - 2xy\cos\gamma + y^2 = c^2, \quad (1)$$

$$x^2 - 2xz\cos\beta + z^2 = b^2, \quad (2)$$

$$y^2 - 2yz\cos\alpha + z^2 = a^2, \quad (3)$$

indépendante de toute considération géométrique.

De 4 fois le produit de (1) par (2) je soustrais le carré de la différence entre (3) et la somme de (1) et (2); je réduis, j'extrais la racine carrée et je divise le résultat par 2 :

$$(4) \quad \begin{cases} xy\sin\gamma + xz\sin\beta + yz\sin\alpha \\ \quad = \pm\frac{1}{2}\sqrt{[4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2]} = 2\Delta, \end{cases}$$

où $\Delta$ est l'aire du triangle donné.

Je multiplie la différence entre (3) et la somme de (1) et (2) par $\sin\alpha$; du résultat je soustrais $2\cos\alpha$ fois (4); on a

$$\begin{aligned} &2x^2\sin\alpha - 2xy\sin(\alpha+\gamma) - 2xz\sin(\alpha+\beta) \\ &\quad = (b^2+c^2-a^2)\sin\alpha - 4\Delta\cos\alpha, \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire après réductions,

$$(5) \quad 2x(x\sin\alpha + y\sin\beta + z\sin\gamma) = (b^2+c^2-a^2)\sin\alpha - 4\Delta\cos\alpha.$$

De même on trouve

$$(6) \quad 2y(x\sin\alpha + y\sin\beta + z\sin\gamma) = (a^2+c^2-b^2)\sin\beta - 4\Delta\cos\beta,$$

$$(7) \quad 2z(x\sin\alpha + y\sin\beta + z\sin\gamma) = (a^2+b^2-c^2)\sin\gamma - 4\Delta\cos\gamma.$$

Je multiplie (5) par $\sin\alpha$, (6) par $\sin\beta$ et (7) par $\sin\gamma$; alors

$$(8)\quad 2x\sin\alpha(x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma)=(b^2+c^2-a^2)\sin^2\alpha-2\Delta\sin2\alpha,$$

$$(9)\quad 2y\sin\beta(x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma)=(a^2+c^2-b^2)\sin^2\beta-2\Delta\sin2\beta,$$

$$(10)\quad 2z\sin\gamma(x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma)=(a^2+b^2-c^2)\sin^2\gamma-2\Delta\sin2\gamma.$$

J'ajoute (8), (9) et (10) et j'extrais la racine carrée du double de la somme :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&2(x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma)\\&=\pm\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)\sin^2\alpha+2(a^2+c^2-b^2)\sin^2\beta+2(a^2+b^2-c^2)\sin^2\gamma\\&\quad-4\Delta(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma)}.\end{aligned}\right.$$

Maintenant, divisant (8), (9) et (10) chacun par (11), j'ai les valeurs de $x$, $y$, $z$, en fonction de $a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, d'après (4).

Artemas Martin (Washington, Service géodésique).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

**2986.** (**1905**, 270) (*Doubt*). — *Corollaire de M. Lindemann* (**1906**, 123). — Voici comment je lèverai les doutes de l'auteur de cette question :

Reportons-nous aux notations de l'édition allemande des *Leçons de M. Klein* et remarquons tout d'abord que les nombres $C'_0$, $C'_1$, $C'_2$... (page 61) sont visiblement tous différents de zéro. Les nombres $C_0$, $C_1$, $C_2$... figurant dans l'égalité

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\prod_{\alpha,\beta,\ldots}[C'_0+C'_1e^{x_\alpha}+C'_2e^{\lambda_\beta}+\ldots]\\&=C_0+C_1(e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_N})+C_2(e^{x_1+x_2}+e^{x_2+x_3}+\ldots)+\ldots\\&\qquad(\alpha=1,2,\ldots,N;\ \beta=1,2,\ldots,N',\ldots)\end{aligned}\right.$$

ne sont que des produits des diverses puissances des nombres $C'_0$, $C'_1$, $C'_2$... et sont, par conséquent, tous différents de zéro. Dès lors, toutes les conditions de l'impossibilité de la relation (3), exigées par le théorème de Lindemann (p. 54, édition allemande), seront réalisées si l'on ajoute aux explications données dans le texte le fait que dans chaque parenthèse il y aura toujours, au moins, un exposant

(1) D'une façon exacte, l'impossibilité de l'annulation du second membre de (3) se ramène immédiatement au théorème de Lindemann, si l'on observe que l'annulation de tous les exposants figurant dans cette égalité est impossible.

différent de zéro ([1]). Cela est évident, puisque les nombres $x_i$, $\lambda_i$, ... sont tous différents de zéro. Il en résulte que, lorsque l'égalité prendra la forme définitive (après les réductions nécessaires) exigée par le théorème de Lindemann, il y aura toujours des termes dont le coefficient sera différent de zéro et son impossibilité sera acquise.

On ferait des remarques analogues à la proposition formulée à la page 62. GEORGES RÉMOUNDOS (Athènes).

**2987.** (**1905**, 271) (P.-H. SCHOUTE) (**1906**, 124). — Si, comme je le crois, la question a été posée sous une autre forme au n° 335 (**1894**, p. 186), il conviendra de se référer à la réponse (**1895**, p. 123), où ont été mentionnés Éd. Lucas (*Théorie des nombres*, p. 121-123), Flauti, Cayley, Desboves, etc. H. BROCARD.

**3001.** (**1906**, 7) (NAZAREVSKY). — *Dernier théorème de Fermat.* — D'après une proposition énoncée par M. Worms de Romilly (**1895**, 281; **1904**, 185), si l'équation de Fermat $a^p + b^p = c^p$ ($p$ premier $> 2$) est résoluble en nombres entiers, $c$ devrait être divisible par $p$; la démonstration de M. Worms de Romilly répondrait donc à la question. N. PLAKOWO.

Nous croyons savoir que cette démonstration aurait besoin d'être complétée. Jusqu'à nouvel ordre, nous ne pouvons que renvoyer aux réponses à 314 (**1905**, 11) et à l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (J. Molk), t. I, Vol. III, p. 36-37.

LA RÉDACTION.

**3009.** (**1906**, 33) (H. WIELEITNER). — *Lunules* (**1906**, 133). — Aux références bibliographiques données par M. Brocard, il faut ajouter les suivantes qui sont très importantes :

FERDINAND RUDIO. — Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates (*Bibliotheca mathematica.* 3^e^ série, t. III, Leipzig, 1902).

PAUL TANNERY. — Simplicius et la Quadrature du Cercle (*Bibliotheca mathematica*, même volume).

FERDINAND RUDIO. — Zur Rehabilitation des Simplicius (*Bibliotheca mathematica*, 3^e^ série, t. IV, Leipzig, 1903).

WILHELM SCHMIDT. — Zu dem Berichte des Simplicius über die Möndchen des Hippokrates (*Bibliotheca mathematica*, même vol.).

*H. Braid.*

Consulter la *Géométrie grecque* de P. TANNERY, p. 116; *Ueber die Entwickelung der Elementar-Geometrie im XIX^ten Jahrhundert*, de MAX SIMON, p. 74; *Voir* encore BOYER.

N. PLAKHOWO.

**3026.** (**1906**, 60) (GINO LORIA). — L'étude visée ici a pour titre : LABATIE. — Méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur entièrement rectifiée, 2^e édition, 1835.

Je ne sais rien de l'auteur, mais je désirerais avoir connaissance de ses prénoms ou au moins de leurs initiales. H. BROCARD.

**3030.** (**1906**, 61) (T. LEMOYNE) (**1906**, 204). — Aire asymptotique de la cissoïde de Dioclès. — *Voir* dans le *J. S.*, 1893, la démonstration

géométrique demandée, comprise dans une étude géométrique sur les cubiques circulaires unicursales que j'y ai donnée sous le pseudonyme *Jan Cyane*. C'est là un cas particulier du théorème suivant :

Dans une cissoïde droite, l'aire du triangle curviligne ORM formé par le vecteur $\overline{OR}$ perpendiculaire à $\overline{OM}$, par le segment RM parallèle à l'asymptote et par l'arc OM, est égal à trois fois le segment de cercle $O\rho R$.

Voici le principe de la démonstration : l'aire élémentaire balayée par RM est le quadruple de l'aire élémentaire correspondante balayée par OR.

H. Hoffbauer.

3033. (1906, 62) (E.-N. Barisien). — 1° Les points M, P, Q, R sont à l'intersection de l'ellipse donnée :

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

et de l'hyperbole d'Apollonius relative au point $M(\alpha\beta)$. Le point de rencontre des droites MP et QR est donc le centre d'une des coniques évanouissantes passant par les points communs à l'ellipse et à cette hyperbole.

L'équation générale de ces coniques est

$$(1) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + 2\lambda(c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y)$$

avec la condition

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} b^2 & \lambda c^2 & \lambda b^2\beta \\ \lambda c^2 & a^2 & -\lambda a^2\alpha \\ \lambda b^2\beta & -\lambda a^2\alpha & -a^2b \end{vmatrix} = 0.$$

Leur centre est donné par les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} b^2x + \lambda c^2y + \lambda b^2\beta = 0, \\ \lambda c^2x + a^2y - \lambda a^2\alpha = 0. \end{cases}$$

L'équation du lieu de ce centre s'obtient en éliminant $\lambda$, $\alpha$ et $\beta$ entre les relations (2) et (3) et la condition

$$(4) \qquad b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0$$

qui exprime que le point M est situé sur l'ellipse donnée.

La relation (2) peut s'écrire, en tenant compte des équations (3),

$$\begin{vmatrix} b^2 & \lambda c^2 & 0 \\ \lambda c^2 & a^2 & 0 \\ \lambda b^2\beta & -\lambda a^2\alpha & \lambda(b^2\beta x - a^2\alpha y) - a^2b^2 \end{vmatrix} = 0$$

et devient, en la développant,

$$(a^2b^2 - \lambda^2c^4)[\lambda(b^2\beta x - a^2\alpha y) - a^2b^2] = 0.$$

Les deux valeurs de $\lambda$

$$\lambda = \pm\frac{ab}{c^2}$$

correspondent au cas où les coniques (1) se réduisent à deux droites parallèles; leur centre est à l'infini dans les directions $\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a}$.

Portant dans les équations du centre (3) la dernière valeur de $\lambda$.

$$\lambda = \frac{a^2b^2}{b^2\beta x - a^2\alpha y},$$

on en tire

$$\alpha = \frac{c^2x}{a^2}\,\frac{b^2x^2 - a^2y^2 + a^2b^2}{b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2}, \qquad \beta = \frac{c^2y}{b^2}\,\frac{b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2}{b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2}$$

et la substitution de ces valeurs dans la relation (4) donne l'équation du lieu cherché,

$$b^6c^4x^2(b^2x^2 - a^2y^2 + a^2b^2)^2 + a^6c^4y^2(b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2)^2$$
$$- a^6b^6(b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2)^2 = 0.$$

Ce lieu est une sextique ayant pour centre l'origine et pour asymptotes les diagonales du rectangle des axes de l'ellipse donnée.

2° *Enveloppe des côtés du triangle* PQR. — Pour obtenir l'équation de la droite QR, on identifie l'équation (1) avec celle de la conique évanouissante formée par les droites MP et QR; en désignant par $\varphi$ l'argument du point M, on aura

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + 2\lambda(c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y)$$
$$\equiv (ax\sin\varphi - by\cos\varphi - c^2\sin\varphi\cos\varphi)(mx + ny + p).$$

Cette identification donne immédiatement

$$m = \frac{b^2}{2\lambda\sin\varphi}, \qquad n = -\frac{a^2}{2\lambda b\cos\varphi}, \qquad p = \frac{a^2b^2}{2\lambda c^2\sin\varphi\cos\varphi}.$$

L'équation de la droite QR est donc

$$b^3 c^2 x \cos\varphi - a^3 c^2 y \cos\varphi + a^3 b^3 = 0.$$

L'enveloppe de cette droite s'obtient en éliminant $\varphi$ entre son équation et l'équation dérivée par rapport à $\varphi$,

$$+ b^3 x \sin\varphi + a^3 y \sin\varphi = 0.$$

Le résultat est

$$c^4\left(\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6}\right) - 1 = 0.$$

L'enveloppe est donc une ellipse concentrique à l'ellipse donnée.

MICHEL.

3037. (**1906**, 88) (*Lino*). — A titre bibliographique, les problèmes 1° et 3° notamment ont fixé l'attention des mathématiciens; mais je ne retrouve rien au sujet du problème 2°.

Voici, pour les deux autres, la liste de quelques chercheurs :

Lieu des points d'où l'on voit sous des angles égaux deux segments rectilignes fixes.

Problème étudié par Steiner (*Cr.*, 1852); O. Hermes; K. Küpper; C. Pelz; H. Schrœter; H. Faure (*N. A.*, 1861); E. Habich (*N. A.*, 1884); P.-H. Schoute (*Cr.*, 1885); G. de Longchamps (*J. E.*, et *J. S.*, 1886), etc.

Lieu des foyers coniques inscrits dans un quadrilatère.

Problème étudié par Terquem (*N. A.*, 1845); Vauquelin (*Ibid.*); H. Faure (*N. A.*, 1861); L. Cremona (*N. A.*, 1864), etc.

H. BROCARD.

3038. (**1906**, 88) (P. BARBARIN). — Ces courbes sont plus habituellement appelées *triangulaires*.

Une bibliographie en a été donnée, **1901**, p. 234-236 en réponse à la question **1948** (**1900**, 333) proposée par M. E. MAILLET.

A ces références, j'ajouterai :

*N. A.*, divers articles, 1859, p. 366-370; 1900, 191.

G. DARBOUX. — Note au *Bulletin* (*B. D.*, 1870, p. 355).

S. LIE. — Sur les rapports de réciprocité du complexe de Reye (*voir B. D.*, 1872, p. 43-44).

P. GILBERT. — Cours d'Analyse infinitésimale, 1875, p. 169, 213, 224, 226.

S. ROBERTS. — Sur les courbes du sixième ordre représentées par l'équation

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,$$

et les courbes corrélatives du quatrième ordre (*Q. J.*, t. XV, 1878, p. 224-230).

G. FOURET. — *C. R.*, t. CX, 1890, p. 1093.

M. D'OCAGNE. — Construction des centres de courbure des courbes de Lamé (*N. A.*, 1901, p. 465-467).

GINO LORIA. — (Traduct. SCHÜTTE). Spezielle alg. und trans. ebene Kurven, 1902, p. 277-287 (avec indications bibliographiques).

H. BROCARD.

3043. (**1906**, 90) (E. MAILLET). — *Développement en fraction continue de π.* — Lagrange, dans ses additions au Tome II de l'Algèbre d'Euler, imprimées à part dans les Œuvres complètes (*ab initio*), a calculé (t. VII, p. 17), d'après la valeur de π donnée à 35 figures par Ludolph, les 34 premiers quotients incomplets du développement de cette transcendante en fraction continue de la forme $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}$; en voici les valeurs numériques :

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1,
2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1.

La loi qui les régit est fort loin d'être apparente et simple.

E. MALO.

Réponse analogue de M. BROCARD.

Je désirerais surtout avoir la loi qui régit les coefficients, au moins une loi asymptotique. E. MAILLET.

3048 *bis*. (**1906**, 93) (A. BOUTIN). — *Équation indéterminée.* — L'équation donnée peut s'écrire

$$x^2 - (y^2 - 1)p^2 = 1;$$

or, on a

$$\sqrt{y^2-1} = y-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2(y-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2(y-1)+\ldots}}}},$$

et, par suite, les réduites de $\sqrt{y^2-1}$ sont

$$\frac{y-1}{1},\quad \frac{y}{1},\quad \frac{2y^2-y-1}{2y-1},\quad \frac{2y^2-1}{2y},$$
$$\frac{4y^3-2y^2-3y-1}{4y^2-2y-1},\quad \frac{4y^3-3y}{4y^2-1},\quad \ldots.$$

Les nombres $p$ sont donc les termes successifs de la série récurrente

$$1,\quad 2y,\quad 4y^2-1,\quad \ldots$$

définie par ses deux premiers termes et par l'échelle de relation

$$p_{n+1} = 2y \times p_n - p_{n-1}.$$

Les nombres $x$ sont simultanément les termes de la série récurrente de même échelle,

$$y,\quad 2y^2-1,\quad 4y^3-3y,\quad \ldots.$$

On remarquera que les $x$ sont les fonctions $\cos\varphi$, $\cos 2\varphi$, $\cos 3\varphi$, ..., $\cos n\varphi$, exprimées en $y=\cos\varphi$ et les $p$ les quotients par $\sin\varphi$ des fonctions $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$, $\sin 3\varphi$, ..., $\sin n\varphi$ exprimés de même.

Du reste, il suffit de faire simultanément dans l'équation proposée $y=\cos\varphi$, $x=\cos n\varphi$, pour en conclure aussitôt $p=\dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$; ce qui donne pour $p$ un polynome entier en $\cos\varphi = y$, où l'on peut substituer n'importe quelle valeur entière de $y$. Toutefois cette solution si rapide n'est pas très naturelle et l'introduction de l'angle (imaginaire) $\varphi$ se justifie surtout par le succès. E. MALO.

Voici une remarque très simple, qui pourra être utile : c'est que les solutions numériques de l'équation de Pell

$$x^2 - ap^2 = 1$$

seront indirectement des solutions particulières de l'équation proposée.

En effet, il suffira de se donner $y$ et de prendre

$$a = y^2 - 1.$$

Or, c'est là précisément une forme de l'équation de Pell qui est très facile à résoudre, car l'équation

$$x^2 - (y^2 - 1)p^2 = 1$$

a pour solutions immédiates

$$x = y, \qquad p = 1,$$
$$x = 2y^2 - 1, \qquad p = 2y.$$

Les autres s'en déduiront par les formules ordinaires.

H. Brocard.

3050. (**1906**, 94) (G. Lemaire). — Il s'agit sans doute de substituer à $\sqrt{a^2 + b^2}$ une expression linéaire $ax + by$.

Cette étude a été exposée pour la première fois par Poncelet (*Cours de Mécanique industrielle*, Metz, 1826, 1827, 1829, et *Journal de Crelle*, Bd. 13, 1835) (*N. A.*, 1848, p. 39-42).

Je pourrai compléter ces indications si elles sont bien dans le sujet de la question. H. Brocard.

La condition envisagée peut s'écrire

$$1 - \varepsilon < \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1 + \varepsilon,$$

en posant $\varepsilon = \frac{1}{500}$. Or le terme intermédiaire est l'expression de la distance du point de coordonnées $(x, y)$ à la droite passant par l'origine

$$ax + by = 0,$$

le sens positif étant pris à volonté. La double inégalité supposée assujettit donc simplement le point $(x, y)$ à être compris entre les deux parallèles menées à cette droite aux distances $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$ respectivement et dont l'écart est $2\varepsilon$. *Quilibet.*

Réponse analogue de M. Aubry.

3034. (**1906**, 95) (E. Grigorieff). — Le Mémoire cité de Cauchy a bien pour titre : *Sur les moyens de vérifier ou de simplifier les diverses opérations de l'arithmétique décimale.*

Voir *C. R.*, t. XI, p. 847-858 (23 novembre 1840) et *Œuvres*, t. V, p. 443-455.

*Voir* aussi réponse 541 (**1895**, 311-312).

H. Brocard, E. Malo.

3035. (**1906**, 95) (E. Gregorieff). — *Lieu géométrique.* — Deux points conjugués isogonaux par rapport à un triangle peuvent être considérés comme les foyers d'une certaine conique inscrite dans le triangle : le lieu demandé est donc celui des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère donné. C'est une cubique circulaire depuis longtemps connue; mais justement la propriété des foyers des coniques d'être des points conjugués isogonaux par rapport à n'importe quel triangle de tangentes est celle qui facilite le plus l'étude de la courbe. Par exemple, la détermination du degré résulte de ce que la courbe est à elle-même sa transformée : en effet, si $m$ est le degré, $\mu$ l'ordre de multiplicité des points communs deux à deux aux quatre droites données, on a $2m - 3\mu = m$, c'est-à-dire $m = 3\mu$ : or, manifestement, $\mu = 1$; donc $m = 3$. E. Malo.

3036. (**1906**, 95) (G. Tarry). — *Tables de diviseurs.* — La Table d'Inghirami donne, jusqu'à cent mille, tous les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers de tous les nombres composés.

En raison de sa disposition, il est facile de voir que, si on la poussait jusqu'au premier million, l'espace occupé par chaque centaine de mille serait toujours le même.

Au-dessus du premier million, il augmenterait un peu; mais on pourrait facilement regagner cet espace en rendant le format in-4°, ce qui épargnerait quelques colonnes.

La Table en question remplit 33 pages in-8° et un tiers de page. Cela ferait donc pour le premier million exactement 333 pages et un tiers.

En rendant le format in-4°, les trois premiers millions occuperaient juste 500 pages de ce format.

Il en résulte que l'économie d'espace qui serait obtenue par le

procédé de M. Tarry serait, pour les trois premiers millions, de 50 pages in-4° seulement. Dr Prompt (Turin).

3057. (1906, 96) (N. Plakhowo). — Les extraits ici rapportés sont textuellement de Lagrange lui-même : *Additions aux Éléments d'Algèbre d'Euler*, et *Œuvres*, t. VII, p. 6-7. H. Brocard.

Les additions au Tome II de la traduction française de l'*Algèbre* d'Euler sont de Lagrange. Elles ont été publiées à part dans le Tome VII des *Œuvres de Lagrange*. E. Malo.

3061. (1906, 97) (Barisien). — *Développées*. — A propos de la question 3061 de l'*Intermédiaire* (1906, 97) j'observe que l'ordre $4n+2$ pour la $n^{\text{ième}}$ développée de l'ellipse se tire comme corollaire des remarquables formules données par Halphen dans son *Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes*, publié comme appendice de la traduction française du *Traité des courbes planes* de Salmon (Paris, 1884). Je crois que sa méthode de démonstration peut s'appliquer, avec quelques petites modifications, au cas de la parabole, mais il m'est impossible de le vérifier, étant à présent à la campagne sans aucun livre. Pour faire une chose agréable à M. Barisien, je ne veux pas retarder l'envoi de cette remarque, d'où, j'espère, il tirera tout ce qu'il lui faut.

G. Loria (Gênes).

Autre réponse de M. E. Malo.

# QUESTIONS.

**1046.** (**1897**, 97) [**A3a**] Je considère $n$ lettres $a$, $b$, ..., $k$, $l$; je forme les divers polynomes obtenus en ajoutant ces lettres prises $n$ à $n$, $n-1$ à $n-1$, ..., 2 à 2, 1 à 1, 0 à 0, j'élève chacun de ces polynomes à la puissance $p$, en donnant à cette puissance le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que le nombre de lettres qui manquent dans le polynome est pair ou impair; enfin je désigne pas $A_n^p$ la somme algébrique de tous les termes ainsi obtenus. On trouve aisément

$$A_n^p = 0, \qquad p < n,$$
$$A_n^n = n!\, abc\ldots k.l,$$
$$A_n^{n+1} = (n+1)\,A_n^n\left(\frac{\Sigma a}{2}\right),$$
$$A_n^{n+2} = (n+1)(n+2)\,A_n^n\left(\frac{\Sigma a^2}{6} + \frac{\Sigma ab}{4}\right),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

(*voir* un calcul analogue, *J. E.*, p. 226; 1894).

Cela posé, pourrait-on trouver de même des formules simples pour calculer les fonctions $B_n^p$ obtenues en ajoutant les valeurs absolues des termes définis plus haut?

H. Dellac.

**1055.** (**1897**, 99) [**O5iβ**] Parmi les surfaces, sur lesquelles les lignes de courbure forment un système isotherme, il y en a dont les centres principaux de courbure, en chaque point, sont séparés harmoniquement par ce point et par un plan fixe. Ces surfaces ont-elles été étudiées?

Cesaro (Naples).

**1056.** (**1897**, 100) [**V9**] Quels sont les principaux travaux qui ont été publiés sur la représentation plane des surfaces?

*Canon.*

**1060.** (**1897**, 101) [**K8a**] Je désire savoir si le théorème ci-dessous, dont la démonstration est très facile, est connu avec son double énoncé :

Si l'on coupe un triangle par une droite, et si l'on prend les trois intersections avec les côtés comme point de vue pour projeter les côtés du triangle, sur une autre transversale *parallèle* à la première, on a

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{R},$$

en appelant P la perspective qui est située entre Q et R.

Si l'on coupe un quadrilatère complet par une transversale *parallète* à un de ses côtés, on a six intersections avec les trois autres côtés et les *trois* diagonales. Entre les trois segments de la transversale, compris entre une diagonale et un côté, on a alors la relation

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{R}.$$

L. de la Campa.

**1061.** (**1897**, 101) [Σ] Je souhaite la traduction, dans toutes les langues européennes, des signes de la Logique mathématique (ou du moins celle des signes simples dont on puisse déduire celle des signes composés). Il serait bon d'avertir, lorsque la correspondance des symboles n'est qu'approximative. Il n'est pas nécessaire qu'une seule personne se charge de ce travail; il suffit, par exemple, qu'un Anglais traduise en anglais, un Allemand en allemand, etc. On trouve dans le formulaire une Table de signes; on peut se borner à ceux-là ou même à une partie.

On pourra envoyer les réponses à l'*Intermédiaire* ou à mon adresse : piazetta Barisone, n° 17, Int. 6, Gênes.

Italo Zignago (Gênes).

3107. [H4g] En étudiant le nombre de routes qu'un cavalier peut suivre sur un échiquier illimité pour aller d'une case à une autre, sous certaines conditions, j'ai été conduit à étudier les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ y_2 &= x^4 + 1, \\ y_3 &= x^8 + x^6 + 2x^4 + x^2 + 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

la loi de récurrence est

$$y_n = (x^4 + 1)y_{n-1} + x^2(x^2 + 1)y_{n-2},$$

dont l'intégrale est

$$y_n = \frac{1}{R}\left[\left(\frac{x^4+1+R}{2}\right)^n - \left(\frac{x^4+1-R}{2}\right)^n\right],$$

où

$$R = \sqrt{x^8 + 4x^6 + 2x^4 + 4x^2 + 1},$$

$y_n$ satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre

$$Py'' + Qy' + Ry = 0.$$

Je désirerais l'expression de P, Q et R en fonction explicite de $x$ et $n$. A. Boutin.

3108. [Q4c] L'angle des axes en coordonnées obliques étant $\theta$, on mène toutes les parallèles aux axes $x = a$, $y = b$, $a$ et $b$ entiers variant de $-\infty$ à $+\infty$, et qui partagent le plan en un carrelage de losanges égaux de côté *un*. On place sur ce plan un cercle de rayon $\sqrt{n}$, $n$ entier. Je demande les nombres $f(n, \theta)$ et $\varphi(n, \theta)$ qui expriment le maximum et le minimum du nombre des sommets de losange qui peuvent être situés à l'intérieur de ce cercle, considérant comme intérieurs les points sur la circonférence. En général il se peut que $f$ et $\varphi$ ne puissent être explicités en $\theta$, je désirerais des formules explicites pour les deux cas : $\theta = 90°$, $\theta = 60°$. A. Boutin.

3109. **[A1b]** Je désirerais une démonstration directe de l'identité suivante à laquelle j'arrive indirectement :

$$\frac{2^n}{n+1} - \frac{n2^{n-1}}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n-1)2^{n-2}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \frac{n(n-1)}{1.2.(n+3)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.(n+4)} + \dots.$$

A. Boutin.

3110. **[O2g]** Quelles sont les courbes connues transcendantes dont la développée est une courbe algébrique?

E.-N. Barisien.

3111. **[V]** Je ne demande pas à revenir sur l'étymologie du mot sinus, qui a été très discutée dans le Journal en 1898 et 1899 (question 1301) ; mais je voudrais bien savoir l'auteur et la date de la tétralogie allégorique (arc, corde, flèche, sein) que M. C. Wargny (**1899**, 252) a rapportée d'après Todhunter. Lemaire (Rachgia, Cochinchine).

3112. **[V7]** D'après les intéressantes citations que M. H. Braid a faites dans l'*Intermédiaire* (**1899**, 262), Leibniz s'attribuait seulement la paternité du mot *coordonnées*.

Je désirerais, si possible, un supplément d'information sur les points suivants :

1° Doit-on conclure, des textes cités, que, du temps de Leibniz, on disait indifféremment *ordonnée conjuguée* et *abscisse;* ou doit-on voir, dans la première expression, une simple explication de la seconde?

2° Quel est l'auteur des mots *abscisse* et *ordonnée?*

3° Qui a introduit l'usage géométrique des signes + et —; et quelles considérations ont fait prendre, pour sens positif des abscisses, le sens de gauche à droite?

Lemaire (Rachgia, Cochinchine).

# RÉPONSES.

**82.** (**1894**, 34) (M. Cantor). — *Sur la méthode des cascades* (**1895**, 96, 210) (Extrait du *Dictionnaire de Savérien*, 1753). — « Cette méthode d'approcher d'une racine est plus expéditive que celle de M. Descartes et plus sûre que la méthode de médiation. Quel dommage qu'elle soit vicieuse! Selon M. Bernoulli, non seulement on n'approche point de la racine, mais encore il arrive souvent qu'après quelques opérations on s'en éloigne; et cela parce qu'on est obligé de négliger certaines quantités, d'où naît une erreur considérable (Bernoulli, *Op.*, t. III, p. 533). » Lemaire.

**541.** (**1895**, 149) (G. de Longchamps). — *Usage des nombres complémentaires de Berthevin* (**1895**, 311). — L'appréciation que voici, formulée dans un article, non signé, mais de Gergonne, publié en 1826, est d'accord avec ce que Terquem en a dit en 1842, bien que celui-ci ne semble pas en avoir eu connaissance ou souvenir.

Les méthodes de M. Berthevin, souvent employées par les astronomes calculateurs, qui n'y ont pas attaché assez d'importance pour en écrire des traités *ex professo*, sont une sorte d'extension de la méthode de multiplication par les doigts. De l'aveu même de l'auteur, elles n'offrent d'avantage sur les procédés ordinaires que dans des cas spéciaux, auxquels il conseille conséquemment d'en restreindre l'emploi; et c'est, à notre avis, un inconvénient assez grave, parce qu'alors il n'y a plus d'uniformité dans les procédés du calcul, et qu'il faut retenir un assez grand nombre de préceptes pratiques qui varient d'un cas à l'autre et dans l'application desquels des méprises sont faciles à commettre. Ce sont, en un mot, des sentiers qui abrègent, mais qui aussi peuvent égarer, et qu'il ne faut conséquemment indiquer qu'à ceux-là seuls qui connaissent bien le terrain qu'ils parcourent, si toutefois on pense qu'ils ne parviennent pas d'eux-mêmes à les découvrir.

Nous devons dire pourtant que la recherche de la démonstration

de ces procédés peut offrir un utile exercice à céux des élèves de nos écoles qui commencent l'étude de l'algèbre, et c'est le parti que nous-mêmes nous avons tiré quelquefois de l'ouvrage publié par M. Berthevin en 1823. H. BROCARD.

**926.** (**1896**, 245; **1906**, 139) (MANNHEIM). — *Sur certaines surfaces parallèles.* — Les surfaces parallèles dont les centres de courbure principaux appartiennent à deux surfaces homofocales du second ordre ont reçu le nom de *surfaces de Liouville*. M. G. Darboux leur a consacré un chapitre entier dans son grand Ouvrage *Sur la théorie des surfaces* (t. II) et donne des indications bibliographiques. A. PELLET.

**928.** (**1896**, 247; **1906**, 139) (*Alauda*). — *Intersection d'une cubique avec une droite.* — Prenons $A_1$ pour sommet du faisceau de rayons et soient $A_2, A_3, A_4$ trois des points-base du faisceau de coniques projectif au premier et qui doit avec lui engendrer la cubique : il s'agit de trouver le quatrième point-base $x$, de manière que les faisceaux des cinq droites $A_1[A_5A_6A_7A_8A_9]$ et le faisceau des cinq coniques $(A_2A_3A_4x)[A_5A_6A_7A_8A_9]$ soient projectifs. De Jonquières a donné pour cette question quatre solutions (*Essai sur la génération des courbes géom.*, t. XVI des *Mém. présentés par divers savants*, etc... Paris, 1858; § III, n$^{os}$ 27-30) dont la plus simple peut se résumer comme il suit. Les cinq faisceaux de coniques

$$[A_2A_3A_4A_5],\quad [A_2A_3A_4A_6],\quad \ldots,\quad [A_2A_3A_4A_9]$$

marquent sur une droite arbitraire cinq involutions quadratiques. Déterminons respectivement dans ces cinq involutions les cinq couples $5, 5'$; $6, 6'$; ...; $9, 9'$ qui appartiennent à une même involution et correspondent projectivement aux droites du faisceau

$$A_1[A_5A_6A_7A_8A_9];$$

les cinq coniques

$$(A_2A_3A_4A_5\,5\,5'),\quad (A_2A_3A_4A_6\,6\,6'),\quad \ldots,\quad (A_2A_3A_4\,9\,9')$$

vont alors se couper en un même point $x$ que l'on peut construire avec la règle et le compas. Aussi la détermination des cinq couples $5\,5'$, ..., $9\,9'$ est quadratique (*Ibid.*, n° 25). Une autre solution de

cette question a été donnée par Kortum (*Ueber geom. Aufgaben dritten und vierten Grades*; Bonn, 1869, p. 43).

V. RETALI.

**1475.** (**1899**, 54) (G. DE LONGCHAMPS). — Parmi les courbes et surfaces, algébriques ou transcendantes, représentées par des équations symétriques en $x$, $y$, $z$, je ne rencontre qu'un petit nombre d'exemples, en dehors des courbes triangulaires et des surfaces tétraédrales (Voir *I. M.*, rép. 1948, **1901**, 234-236, et rép. 3038, **1906**).

En voici quelques-uns :

I. La quartique

$$x^4+y^4-a^2x^2-a^2y^2=0$$

dont Catalan a proposé de déterminer les points d'inflexion (*N. C.*, 1876, p. 365; 1877, p. 140);

II. La surface du huitième ordre

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}\pm\sqrt{x^2+z^2}\pm\sqrt{y^2+z^2}=2a$$

étudiée par L. Ripert (*N. A.*, rép. 193; 1900, p. 45-47).

H. BROCARD.

**2074.** (**1901**, 108) (G. DE ROCQUIGNY). — Il s'agit de vérifier si l'on a

$$\begin{array}{ll} 2^5=32=S3\Delta, & 3^5=243=S5\Delta, \\ 4^5=1024=S7\Delta, & 5^5=3125=S9\Delta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ n^5=S(2n-1)\Delta. & \end{array}$$

On trouve aisément

$$\begin{aligned} 32 &= 1+10+21, \\ 243 &= 1+3+21+28+190, \\ 1024 &= 1+3+28+66+136+325+465, \\ 3125 &= 3+6+10+36+105+120+820+990+1035. \end{aligned}$$

Amenée à ce point, la possibilité de la décomposition paraît hors de doute.

Les nombres $n^5$ augmentent rapidement, et cette circonstance facilite le choix des triangulaires partiels, décomposables à leur tour en d'autres triangulaires distincts, de manière à compléter leur nombre à $(2n-1)$.

Cette décomposition ne semble pas pouvoir être représentée par une identité algébrique, car il est bien évident qu'un même nombre $n^5$ suffisamment grand sera décomposable de plusieurs manières en $(2n-1)$ triangulaires distincts.

Exemple (de l'énoncé) :

$$3125 = 1 + 3 + 21 + 28 + 78 + 190 + 210 + 703 + 1891.$$

H. Brocard.

**2090.** (**1901**, 131) (G. de Rocquigny). — *Tout bicarré entier $>1$ peut-il être mis sous forme d'une somme de deux carrés?* — On ne le peut pour les bicarrés $3^4$ et $4^4$, mais cela est possible pour $5^4$, et en général pour $(b^2+c^2)^4$ et pour $a^4$ si $a=b^2+c^2$, $b^2+c^2$ étant, ou non, un carré.

Lorsque la décomposition en deux carrés n'est pas possible, elle le devient généralement en deux carrés et en deux triangulaires, tous différents de zéro.

Exemples :

$$3^4 = 81 = 3^2+4^2+1+55 = 3^2+4^2+28+28 = 6^2+6^2+3+6 = \ldots,$$

$$4^4 = 256 = 7^2+9^2+6+120 = \ldots.$$

H. Brocard.

**2235.** (**1901**, 281) (G. Picou). — *Carré numérique.* — Voici quelques propriétés de ce carré :

I. Le nombre inscrit dans une case est le nombre des routes que peut suivre pour y arriver un roi d'échecs partant de la case supérieure gauche, avec la restriction d'aller de gauche à droite, de haut en bas, en ligne horizontale, verticale ou diagonale, sans rétrograder.

On a

$$T_a^b = T_b^a,$$

$$T_a^b = T_{a-1}^b + 2\sum_{b=1}^{b=b-1} T_{a-1}^b.$$

Les nombres d'une même ligne horizontale, la $(n+1)^{\text{ème}}$, sont les coefficients de $x$ dans le développement

$$y=\frac{(1+x)^{n-1}}{(1-x)^n}=1+(2n-1)x+(4n^2+4n+2)\frac{x^2}{1.2}$$
$$+(8n^3-12n^2+16n-6)\frac{x^3}{1.2.3}$$
$$+(16n^4-32n^3+80n^2-64n+24)\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots.$$

Si l'on pose

$$y=1+A_1x+\frac{A_2x^2}{1.2}+\ldots+\frac{A_kx^k}{1.2.3\ldots k}+\ldots,$$

on a entre les A la formule de récurrence

$$A_k=(2n-1)A_{k-1}+(k-1)^2A_{k-2}.$$

Les nombres de la grande diagonale sont les coefficients de $x$ dans

$$(1-6x+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ce sont donc les valeurs des polynomes de Legendre pour $x=3$.

Dans les diagonales finies perpendiculaires à la grande diagonale précédente, les nombres sont les coefficients de $x$ dans le développement

$$(1+x)^n+(n-1)x(1+x)^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}x^2(1+x)^{n-4}$$
$$+\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^3(1+x)^{n-6}+\ldots,$$

ou, en termes finis,

$$\frac{1}{\sqrt{1+6x+x^2}}\left[\left(\frac{1+x+\sqrt{1+6x+x^2}}{2}\right)^n-\left(\frac{1+x-\sqrt{1+6x+x^2}}{2}\right)^n\right]$$

ou encore

$$\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},$$

$\alpha$ et $\beta$ étant les racines de l'équation

$$X^2-(1+x)X-x=0.$$

Si l'on pose

$$u(p,x)=T_0^p+xT_1^{p-2}+x^2T_2^{p-4}+\ldots,$$

on aura

$$u(p, x) = u(p-1, x) + xu(p-2, x) + xu(p-3, x).$$

A. Boutin.

**2236** (**1901**, 282) (Werebrusow). — La question pour $n = 2$ a été étudiée à diverses reprises (*Voir* **1906**, 143, réponse **1969**), mais j'ignore si elle a été abordée pour $n$ égal ou supérieur à 3. Jusqu'à présent, je n'ai rencontré aucun travail s'y rapportant.

H. Brocard.

**2446** et **2447** (**1902**, 263-264) (*Meglio*). — *Phénomènes intellectuels chez les mathématiciens et rêve mathématique* (**1902**, 339 ; **1905**, 131). — Voici quelques nouveaux résultats :

I. Au sujet du rêve géométrique, *voir* une Note de M. le Dr R. Pamart : *Sommeil et monoïdéisme* [(*Revue de l'Hypnotisme*, etc. (Bérillon), août 1906, p. 61].

II. On trouve dans les *Mélanges mathématiques* de Catalan, t. III (1) (*Mém. de la Soc. des Sci. de Liége*, 2e série, t. XV, 1888, p. 88), un problème de calcul intégral : Décomposer une fonction donnée $f(x, y)$ en deux parties M et N, de telle sorte que $M\,dx + N\,dy$ soit une différentielle exacte. Le titre est : *Problème trouvé en songe.*

III. *L'Intermédiaire* a déjà mentionné (**1904**, 257) l'*Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens,* ouverte par la Rédaction de l'*Enseignement mathématique* (C.-A. Laisant, H. Fehr, A. Buhl) et divers résultats corrélatifs publiés dans ce journal. Dans le numéro du 15 juillet 1906 (p. 293-310), M. Th. Flournoy, professeur de psychologie à l'Université de Genève, publie les résultats obtenus dans l'enquête pour les questions 6 à 9, c'est-à-dire la genèse des découvertes mathématiques, l'inspiration et le rêve mathématiques. En ce qui concerne le rêve, le nombre des réponses est de 69. M. Flournoy dit à cet égard : « Notre enquête confirme, dans les limites restreintes de son étendue, les conclu-

(1) A la fin se trouve une liste des travaux de Catalan.

sions de M. Maillet, qui a trouvé l'inspiration mathématique beaucoup plus fréquente au réveil que pendant le rêve. »

Au sujet des découvertes et de l'inspiration, il conclut : « Ces documents, tout disparates et insuffisants qu'ils soient, pourraient peut-être se résumer en disant : Les découvertes mathématiques, petites ou grandes, et quel que soit leur contenu, ne naissent jamais par génération spontanée. Elles supposent toujours un terrain ensemencé de connaissances préalables, et bien préparé par un travail à la fois conscient et subconscient. D'autre part, toute découverte, par sa nouveauté même et son originalité, tranche forcément avec ce qui précède et paraît d'autant plus surprenante qu'elle jaillit plus inopinément d'une incubation latente plus prolongée. On comprend donc que, suivant les cas et les individus, ce soit tantôt son caractère imprévu, tantôt sa dépendance du travail antérieur, qui frappe davantage son auteur lorsqu'il y réfléchit rétrospectivement. De là tant de variétés d'appréciation... ».

IV. Je mentionnerai encore : 1° Un rêve de M. H. Laurent où il s'imaginait que l'intensité de la toux qui l'affectait était en rapport avec la manière dont on pouvait décomposer un polynome du second degré en carrés, et, en particulier, avec la grandeur du dernier carré. M. Laurent ajoute n'avoir jamais eu de rêves mathématiques raisonnables : il y avait toujours un ou deux côtés absurdes. 2° Un rêve de M. E. Lebon où il s'imaginait qu'il entassait dans un coffre-fort des nombres *matériels*, et qu'on venait les lui voler. Ce rêve s'est produit au moment où, après plus d'un an de recherches pour trouver des formules simples donnant les nombres premiers de 1 à N, il venait de déduire de la solution du problème précédent le moyen rapide de reconnaître si un nombre donné est premier.

E. MAILLET.

**2571.** (**1903**, 102) (*Rudis*). — *Solutions de l'équation*

$$x^2 - Dy^2 = -1$$

(**1903**, 224, 319; **1904**, 156, 242; **1905**, 53, 249).

A propos de la réponse faite par M. J. Sadier (**1905**, 249) à la question **2571**, je me permettrai de faire observer ceci.

A un certain point de vue, on peut assurément considérer comme

fondamental, dans l'étude de l'équation

$$x^2 - \Delta y^2 = N,$$

le cas particulier $N = 1$. Cependant, il est vrai que, parmi toutes les équations de cette forme dont on peut trouver une solution *directe*, celle où l'on a $N = 1$ est la dernière à se présenter, et que les valeurs de $x$ et de $y$ qui la vérifient sont précisément les moins simples. Notamment, lorsque $\Delta$ est la somme de deux carrés premiers entre eux, et si je veux simplement savoir si l'équation

$$x^2 - \Delta y^2 = -1$$

est possible, il me suffit de pousser le développement de $\sqrt{\Delta}$ en fraction continue jusqu'à la moitié des termes de la période : à supposer que la réponse soit affirmative, j'obtiendrai les moindres valeurs convenables de $x$ et de $y$ en calculant une réduite dont le rang sera seulement la moitié de celui où se présente la réduite $\frac{\alpha}{\beta}$ donnant lieu à l'égalité

$$\alpha^2 - \Delta\beta^2 = 1.$$

On est donc fondé à dire que chaque fois que l'équation

$$x^2 - \Delta y^2 = -1$$

est possible sa solution se présente avant celle de l'équation

$$x^2 - \Delta y^2 = 1,$$

et que, bien loin de supposer cette solution, elle permet au contraire de l'obtenir sans poursuivre davantage le calcul des réduites. On a, en effet,

$$(x^2 - \Delta y^2)^2 = (x^2 + \Delta y^2)^2 - \Delta(2xy)^2 = 1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha = x^2 + \Delta y^2, \qquad \beta = 2xy.$$

Le nombre $\alpha$ est encore susceptible des expressions

$$\alpha = 2x^2 + 1, \qquad \alpha = 2\Delta y^2 - 1,$$

ce qui s'accorde avec les formules indiquées par M. Sadier, sauf l'ambiguïté que présentent celles-ci.

De là suit que, conformément à la remarque (5) de M. Sadier, $\Delta$ di-

vise $\alpha + 1$. Mais il me paraît à propos, et en accord avec ce qui a été observé précédemment, de considérer ce fait plutôt comme une conséquence que comme un point de départ. En se plaçant au point de vue de M. Sadier et en regardant la possibilité de diviser $\alpha + 1$ par $\Delta$ comme une condition préalable, on est porté à ajouter, comme il le fait : « C'est ce qui n'a pas lieu en général. » Or, comme il est certain que l'équation $x^2 - 221y^2 = -1$, entre autres, n'admet pas de solutions en nombres entiers, l'expression *en général* doit être prise dans le sens de *le plus souvent*. Cependant, si l'on se borne aux moindres valeurs de $\Delta$ composé et de la forme $a^2 + b^2$, on constate que dans la grande majorité des cas ([1]) l'équation

$$x^2 - \Delta y^2 = -1$$

admet des solutions. Cela, assurément, ne préjuge rien pour les valeurs plus grandes de $\Delta$, mais, à défaut d'une raison décisive, on peut y voir tout au moins une probabilité qu'il en soit toujours de même.

A cette occasion, je ferai également certaines remarques au sujet des réponses précédemment données à la question **2371**.

L'exemple indiqué par M. Escott (**1905**, 54) prouve péremptoirement, contre M. Werebrusow, que le fait que la racine de l'un des carrés dans lesquels se décompose le nombre $\Delta$ est résidu quadratique de $\Delta$ n'implique aucunement la possibilité de résoudre l'équation

$$x^2 - \Delta y^2 = -1;$$

mais je dois reconnaître avec M. Werebrusow, contre M. Escott, que ni le nombre 5, ni le nombre 11 ne sont des résidus quadratiques du module $221 = 13.17$. Ce module admet 48 résidus quadratiques (premiers au module) savoir :

1, 4, 9, 16, 25, 30, 35, 36, 38, 42, 43, 49, 53, 55, 64, 66, 69, 77, 81, 87, 94, 100, 101, 103, 118, 120, 121, 127, 134, 140, 144, 152, 155, 157, 166, 168, 172, 178, 179, 183, 185, 186, 191, 196, 205, 212, 217, 220.

Aucun des nombres 5 et 14, 10 et 11, qui sont les racines des carrés dans lesquels se décompose le nombre 221, ne se trouve dans

---

([1]) Jusques et y compris le nombre 394 (favorable) il y a 30 valeurs de $\Delta$ pour lesquelles l'équation considérée est résoluble, contre 9 pour lesquelles elle ne l'est pas.

cette liste que j'ai soigneusement vérifiée [1]. C'est précisément, du reste, parce que les nombres 5 et 14, 10 et 11 sont tous des non-résidus du module 221 qu'il est impossible que la période du développement de $\sqrt{221}$ soit impaire, ce qui entraîne, comme l'a remarqué M. *Besouclein* d'après Serret, que l'équation $x^2 - 221y^2 = -1$ n'ait pas de solutions entières; et la condition de M. Werebrusow, si elle n'est pas suffisante, est du moins nécessaire. C'est au surplus ce qu'observe M. Escott, *loco citato*, et la seule chose qui nous divise est la nature des résidus 5, 10, 11, 14 (mod 221) : c'est un point de fait que je crois décidé par l'énumération des résidus quadratiques de 221, et qui ne pourrait être contredit que par l'indication des carrés dont les nombres 5, 10, 11 et 14 dérivent.

***Rudis.***

Aux cas de possibilité ou d'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^2 - \Delta y^2 = -1$$

qui ont été déjà signalés j'ajouterai les suivants :

1° *Cas d'impossibilité*

$$\Delta = 2(a^2 + b^2) = 4u^2 \pm 2 :$$

tels sont, en prenant le signe supérieur, les nombres 146, 2306, 3138, etc., et, en prenant le signe inférieur, les nombres 34, 194, 482, 674, 898, 1154, 1762, 2914, 3842, etc.

$$\Delta = (a^2 + b^2) = (2u + 1)^2 - 4 = (2u - 1)(2u + 3).$$

Cette règle s'applique aux nombres $221 = 13.17$, $1511 = 37.41$, $3965 = 61.65$, $7565 = 85.89$, $9797 = 97.101$, $12317 = 119.113$.

2° *Cas de possibilité*

$$\Delta = 2[u^2 + (u + 1)^2].$$

$$\Delta = (2u + 1)^2 + 4 :$$

cette formule renferme les nombres composés 85, 365, 445, 533, 629, 965, etc. Il y a lieu de remarquer les moindres valeurs de $x$ et $y$ qui

---

(1) Le plus simple pour cela est de multiplier par 4 tous les nombres de la liste; on les reproduira à l'ordre près.

donnent

$$x^2 - [(2u+1)^2 + 4]y^2 = -1\,;$$

elles sont

$$x = 2[u^2 + (u+1)^2], \qquad y = u^2 + (u+1)^2.$$

E. Malo.

2766. (**1904**, 94) (*Doubt*). — *Inflexions réelles des cubiques sans point double* (**1905**, 81, 273). — La réponse (**1905**, 273) me donne l'occasion de signaler des cubiques, sans point double, de types tout différents, dont il pourra être intéressant de déterminer les inflexions réelles.

Tous les auteurs sont d'accord pour établir que toute courbe plane du 3e degré, sans point double, possède trois points d'inflexion réels.

Möbius (*N. A.*, 1853, p. 242) dit que la courbe plane du 3e degré ne peut avoir que trois points d'inflexion réels.

D'après J. Richard, sur les neufs points d'inflexion, il y en a toujours trois réels, et trois seulement (1) (en supposant que l'équation de la cubique a ses coefficients réels). (*Leçons sur les méthodes de la Géométrie moderne,* Paris, 1900, p. 178-182 et 22, suppl.)

M. D.-J. Korteweg a énoncé ici (**1894**, 54, quest. 111) une propriété analogue, et plus générale, que toute courbe algébrique de degré impair et n'ayant pas de point double possède au moins trois points d'inflexion réels.

Il est possible que deux de ces points, pour la courbe du 3e degré, ne soient pas à distance finie, mais l'un d'eux est toujours réel.

Au surplus, la droite joignant deux points d'inflexion d'une cubique passe par un troisième point d'inflexion.

A titre de référence bibliographique, *voir* T.-S. Bromwich, *La droite des inflexions d'une cubique plane unicursale* (*Mess. of Math.*, t. XXXII, 1902-1903).

*Note.* — La droite des inflexions passe par un point réel d'inflexion et par deux points imaginaires à l'infini (cubiques mentionnées, *loc. cit.*) ou par deux points réels et un imaginaire à l'infini.

Dans cette catégorie de cubiques (sans point double), on peut signaler les suivantes, qui ont deux points d'inflexion à distance finie,

---

(1) Résultat bien connu.

sur une parallèle à l'asymptote unique; un troisième point d'inflexion est à l'infini, sur la droite qui joint les deux premiers.

La cubique conchoïdale circulaire

$$a(y^2+3x^2)=x(x^2+y^2).$$

La cubique ou *versiera* d'Agnesi

$$xy^2+a^2(x-2a)=0.$$

La *visiera*

$$y^2(2x-a)=2x^2(a-x).$$

La *pseudo-versiera*

$$y(a^2+x^2)=2a^3.$$

La cubique duplicatrice

$$a(x^2+y^2)=x^3.$$

La cubique mixte

$$a(x^2+y^2)=xy^2.$$

La cubique

$$a(x^2+y^2)=x^3+y^3$$

(*Mathesis*, 1893, p. 95). Mais voici, par contre, un exemple de cubique, sans point double, ayant deux points d'inflexion à distance finie et non situés sur une parallèle à une asymptote :

$$y^2=c^2+\frac{x}{a}(x-a)(x-b).$$

H. Brocard.

**2855** (**1904**, 285) (E. Maillet). — *Erreurs des mathématiciens* (**1905**, 275, **1906**, 65, 110, 150, 200). — Voici encore une liste d'erreurs, indiquées à peu près dans leur ordre chronologique, mais dont la rectification n'a eu lieu que tout dernièrement pour certaines d'entre elles.

Fermat à Frenicle, août 1640. (Au sujet des nombres $2^n+1$ qui seraient tous premiers). Je n'en ai pas la démonstration exacte, mais j'ai exclu une si grande quantité de diviseurs par démonstrations infaillibles et j'ai de si grandes lumières, qui établissent ma pensée, que j'aurais peine à m'en dédire.

Fermat au P. Mersenne, 25 décembre 1640. — Fermat dit qu'il n'est pas pleinement satisfait des spéculations qu'il a faites sur la

proposition que 3, 5, 17, 257, ... $2^n+1$ sont toujours des nombres premiers.

Une erreur du P. Mersenne relative aux nombres dits de Mersenne [Voir *I. M.* (**1895**, 317)].

Une mesure du périmètre de l'ellipse, d'après Eisenschmid, démontrée inexacte par F. de Lagny (*J. des Savans,* 30 mars 1693).

Une assertion de Descartes reconnue trop absolue par P. Tannery (*I. M.*, question **2197**, **1901**, 252; **1901**, 336; **1902**, 83; **1903**, 108).

Sur une erreur mathématique de Descartes par P. Tannery (*Archive für Gesch. der Phil.*, X, 1904, p. 324-340). (Enoncé incorrect d'une loi de la chute des graves).

L'assertion de Newton (Lemme 28) qu'aucun ovale n'est susceptible ni de quadrature ni de rectification a été reconnue inexacte par d'Alembert.

Deux erreurs de Simpson relevées par Lagrange (*voir* lettres à d'Alembert de mars 1766 et du 6 septembre 1770).

Une inexactitude dans le principe de la moindre action énoncé par Lagrange (*Mécanique analytique*) signalée par J. Bertrand.

Une inexactitude analogue dans une conclusion de Jacobi (*Vorlesungen über Dynamik*, p. 45) signalée par G. Sabinine (*A. D. M.*, t. XV, 1887-1888, p. 27-51).

Au sujet de diverses erreurs rencontrées dans les œuvres de Lagrange, *voir* O. Terquem (*N. A.*, 1854, p. 414-415).

La théorie de Borda du mouvement des fluides dans les vases, déclarée inexacte par d'Alembert (lettre à Lagrange, du 9 avril 1773).

Le sujet du grand prix de Mathématiques pour 1858 (*Acad. des sci. de Paris*) était une proposition de Legendre (*Théorie des nombres,* t. II, p. 76, édit. 1830) rapportée *N. A.*, 1857, partie bibl., p. 46-47. Cette proposition a été reconnue inexacte par C. Moreau (*Ibid.,* 1873, p. 323-324).

Une proposition de Sophie Germain, reconnue inexacte par Gauss (1807). Voir *B. Bon.,* t. XVII, 1884, note de Genocchi.

Des erreurs de Pontécoulant, signalées par F. Arago dans une lettre à de Humboldt, *voir* J. Bertrand, *Revue des deux mondes,* 15 septembre 1896.

Une erreur de F. Arago sur les épactes grégoriennes, signalée par P. Tannery (*I. M.,* question **1648**, **1900**, p. 107).

Erreurs de détail dans l'*Aperçu historique* de M. Chasles. Par

exemple, il dit que Dioclès est de près d'un siècle postérieur à Pappus, oubliant que Pappus avait cité la cissoïde de Dioclès.

Une autre assertion à relever, concernant Menelaos (remarques de M. Aubry).

Une erreur de M. Chasles, sur les foyers des ovales de Descartes, relevée par P. Tannery (*I. M.*, **1900**, p. 362).

Une proposition de M. Chasles, sur le déplacement fini d'une figure plane dans son plan, rectifiée par V. Retali (*Memorie....Bologna*, 5[e] série, t. II, 1891, p. 585-589).

Une erreur de Montucla et de M. Chasles sur le géomètre Zénodore, relevée par P. Tannery (*I. M.*, **1896**, p. 140).

Une erreur de Poinsot (*J. M.*, 1[e] série, t. X, 1845, p. 45), relevée par P. Mansion (*Revue de l'Instruction publique en Belgique*, t. XI, 1869, p. 393-395).

Un théorème de Steiner sur les coniques (*N. A.*, 1855, p. 141, n° 4) reconnu inexact, rectifié par E. de Jonquières (*Ibid.*, p. 97).

Un théorème de Golbach, que tout nombre impair est de la forme $p^2 + 2a^2$, $p$ premier et $a$ entier ou zéro, reconnu faux par Stern (*N. A.*, 1856, p. 23-24).

Un théorème de Faure, sur les cubiques, question **454** (*N. A.*, 1858, p. 434) rectifié par C. Moreau (*Ibid.*, 1877, p. 382-384).

Une assertion d'Eisenstein (*Cr.*, t. **45**, 1853) reconnue inexacte par Heine (*N. A.*, 1854, p. 252).

D'après M. S. Meunier (*Rev. sci.*, 2 juin 1906, p. 687) le développement de la célèbre théorie du réseau pentagonal a été préjudiciable aux rapides progrès de la géologie.

Ce que l'on peut tirer de plus sûr des immenses travaux d'Élie de Beaumont (sur la théorie de son réseau pentagonal) c'est qu'ils se résument d'eux-mêmes en nous prouvant que le globe terrestre ne satisfait à aucune des conditions que le célèbre théoricien avait réunies comme base du problème qu'il prétendait résoudre.

On pourrait aller jusqu'à dire qu'un globe qui se comporterait comme le concevait Élie de Beaumont serait sensiblement *le contraire* du globe terrestre.

Aussi, malgré des résistances vraiment héroïques, tous les géologues ont-ils renoncé à cette conception.

La théorie du tétraèdre aura sans doute bientôt le même sort.

Ce jugement sévère me paraît autoriser à affirmer non moins vaine la tentative d'adaptation du réseau pentagonal à l'orographie

de la Lune, de Vénus et de Mars, par M.-A.-P.-J. Tissot, ingénieur des mines (*Essai de philosophie naturelle*, 1881, p. 661, 669-670, 681-684).

Une affirmation inexacte de l'impossibilité de l'équation

$$(4a^2-1)x^2-4y^2=\pm 1,$$

par F. de Jonquières (*I. M.*, 2057, **1901**, p. 106, 248).

La solution 949 (*N. A.*, 1871, p. 42) par P. Meutzner, rectifiée par C. Harkema (*Ibid.*, 1874, p. 293 et 483).

Une inadvertance de Beltrami dans la Géométrie de Riemann, relevée par F. Klein (voir *I. M.*, **1901**, p. 277).

Agrégation de 1873. Problème de Mécanique rationnelle. Solution de V. Hioux (*N. A.*, 1874, p. 507) rectifiée par P. Gilbert (*Ibid.*, 1877, p. 152-156).

Agrégation de 1873. Question de Mathématiques spéciales. Solution de Gambey (*N. A.*, 1874, p. 39) rectifiée par Moret-Blanc (*Ibid.*, p. 292-293).

Plusieurs assertions de G. de Coninck, sur des propriétés nouvelles des fractions décimales périodiques (*N. A.*, 1874, p. 569-571) rectifiées par Moret-Blanc (*Ibid.*, 1875, p. 229-231).

Bourguet (*N. A.*, 1873, p. 577) a critiqué les solutions 970 et 1028, mais lui-même s'est trompé (*Ibid.*, 1876, p. 186).

La solution inexacte d'une question de licence, par Moret-Blanc (*N. A.*, 1876, p. 63-76), rectifiée par Bourguet (*Ibid.*, p. 528 et 1877, p. 228).

*Note.* — La liste, on le voit, est loin d'être arrêtée.

Dans l'*Encyclopédie fr. all. des sci math.* en cours de publication, il est fait mention de diverses erreurs, successivement rectifiées à mesure que les théories mathématiques se sont précisées.

H. Brocard.

Du moins n'hésiterai-je pas à dire que je ne parviens point à percevoir l'erreur reprochée à Abel par J.-R. Young, suivant le résumé très succinct d'un passage de cet auteur que donne M. E.-B. Escott (**1906**, 150) : au contraire je m'imagine voir où est le défaut de sa critique.

La série considérée par Abel est

$$\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\sin 3\varphi-\tfrac{1}{4}\sin 4\varphi+\ldots,$$

et elle devient, en posant $\varphi = \pi - \varepsilon$,

$$\sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}\sin 2\varepsilon + \tfrac{1}{3}\sin 3\varepsilon + \tfrac{1}{4}\sin 4\varepsilon + \ldots = \sum \frac{1}{n}\sin n\varepsilon.$$

On peut considérer des valeurs de plus en plus petites de $\varepsilon$, mais il faut bien observer que, si petite que nous choisissions cette quantité, notre choix une fois fait la fixe pour toute la suite du raisonnement, l'essence même du nombre $n$, au contraire, est de grandir indéfiniment : le produit $n\varepsilon$ arrive donc à surpasser toute quantité donnée et les termes de la série après avoir été longtemps positifs deviennent longtemps aussi négatifs, puis redeviennent positifs et ainsi de suite, formant des groupes alternativement d'un signe et de l'autre, et dont on peut démontrer que la valeur absolue finit par tendre vers zéro.

La série est donc convergente, quoique très lentement convergente, et tout à fait impropre au calcul numérique, et l'on doit admettre qu'elle représente $\frac{1}{2}(\pi - \varepsilon)$ tant que $\varepsilon$ n'est pas rigoureusement nul. Mais, dans ce cas, comme il n'existe pas de nombre, si grand qu'il soit, qui, multiplié par zéro, ne donne zéro, la valeur de la série est également zéro. Il y a donc bien discontinuité, au sens où l'ont entendu Abel, Cauchy, Hermite, et, avec eux, la plupart des analystes.

MALO.

Comme le fait remarquer M. Malo, la série considérée par Abel est nulle pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$; l'erreur dans laquelle semble être tombé M. Escott provient de ce fait qu'il considère la valeur de la série comme une fonction continue du paramètre $\varphi$, même pour les limites.

LA RÉDACTION.

La note de M. Williot concernant Dirichlet me laisse croire qu'il a relevé une erreur au § 117 de sa *Théorie des Nombres;* je n'ai pu découvrir cette erreur.

LANDAU.

**2868.** (**1905**, 10) (A. CLAUSE). — La détermination mnémotechnique de l'incidence d'une date quelconque est absolument du même ordre que celle de la fête de Pâques. Je crois donc pouvoir identifier les deux recherches et rappeler que le sujet de la question **2868** ne diffère pas foncièrement de celui de la question **1182** (**1897**, 267). Je renvoie donc à la réponse publiée (**1899**, 119), en y ajoutant seulement que,

dans les *Récréations arithmétiques* (Paris, Nony, 1899, Chap. IX, p. 113-131), M. E. Fourrey a proposé des formules arithmétiques paraissant d'un usage rapide après quelque exercice.

Je rappellerai aussi que le calendrier à roulette d'Ed. Lucas (*A. F.*, Rouen, 1883) doit être la traduction de formules simples, que malheureusement l'auteur n'a pas eu l'occasion de présenter.

H. BROCARD.

**2970.** (**1905**, 265). — *Sur une notice de Feuerbach.* — La rédaction de *Wiskundig Tydschrift* a découvert un exemplaire de la notice de Feuerbach à Berlin dans la Bibliothèque royale.

Une réédition de cette notice est sous presse chez les éditeurs Blom et Olivierse à Culemborg (Pays-Bas). Le prix sera environ $3^{fr}$.

On propose d'y ajouter une bibliographie. Des renseignements qui ne sont pas mentionnés dans l'article de M. Mackay (*Proc. Edinb. Math. Soc.*, 1892-1893) ou dans l'article de M. Lange (*Jahresbericht der Werderschen Ober Realschule,* 1894) seront reçus avec reconnaissance par l'auteur de cette réponse.

N. QUINT (La Haye).

**2971.** (**1905**, 265) (E.-N. BARISIEN). — *Distance de deux points en coordonnées normales* (**1906**, 74, 152). — M. Barisien a montré l'inexactitude de la formule qui termine ma réponse à sa question sur la distance du barycentre au point de Lemoine d'un triangle ; mais il a laissé de côté la correction à y apporter. Elle est facile : il suffit d'effacer le facteur 2 qui figure dans les trois derniers termes.

E. MALO.

**3010.** (**1906**, 34) (H. WIELEITNER). — *Nouvelle génération de la lemniscate de Bernoulli.* — Appelons I, I' les extrémités du diamètre d'un cercle donné (de centre O et de rayon $R = 1$) perpendiculaire à la corde AA'; soient M et $\mu$ respectivement les milieux de la corde AA' et de la corde PP' commune aux deux cercles, $\Gamma$ (décrit sur $\overline{AA'}$ comme diamètre) et $\gamma$ (ayant A pour centre et le rayon égal à 1). Si $\theta$ est l'angle variable de AOI, les rayons des cercles $\Gamma$, $\gamma$ sont égaux à $\sin\theta$ et 1, et, la distance AM de leurs centres étant égale à $\sin\theta$, nous avons

$$2.\overline{\mu P} = PP' = \frac{4 \text{ aire tr. PAM}}{AM} = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{4\sin^2\theta - 1},$$

et

$$\overline{M\mu}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{\mu P}^2 = \sin^2\theta - \frac{1}{4\sin^2\theta}(4\sin^2\theta - 1) = \frac{\cos^2 2\theta}{4\sin^2\theta}.$$

Les coordonnées rectangulaires (O origine et II′ axe des $x$) des points P, P′ sont donc :

$$x = \text{OM} \pm \mu\text{P} = \cos\theta \pm \frac{1}{2\sin\theta}\sqrt{4\sin^2\theta - 1},$$

$$y = -\frac{\cos 2\theta}{2\sin\theta},$$

et, comme celles de I, I′ sont $(\pm 1, 0)$, nous avons successivement :

$$\overline{\text{PI}}^2 = \left(-1 + \cos\theta + \frac{1}{2\sin\theta}\sqrt{4\sin^2\theta - 1}\right)^2 + \frac{\cos^2 2\theta}{4\sin^2\theta},$$

$$4\sin^2\theta . \overline{\text{PI}}^2 = \left[\sin 2\theta - \left(2\sin\theta - \sqrt{4\sin^2\theta - 1}\right)\right]^2 + \cos^2 2\theta,$$

$$4\sin^2\theta . \overline{\text{PI}}^2 = 4\sin\theta\,(1 - \cos\theta)\left(2\sin\theta - \sqrt{4\sin^2\theta - 1}\right),$$

$$\overline{\text{PI}}^2 = \left(2\sin\theta - \sqrt{4\sin^2\theta - 1}\right)\tan\frac{\theta}{2}.$$

On trouve de même

$$\overline{\text{PI}'}^2 = \left(2\sin\theta + \sqrt{4\sin^2\theta - 1}\right)\cot\frac{\theta}{2};$$

et par suite $\overline{\text{PI}}^2 . \overline{\text{PI}'}^2 = 1 = \overline{\text{OI}}^2$.

Le lieu des points P, P′ est donc aussi le lieu d'un point tel que le rectangle de ses distances à deux points fixes I, I′ (les foyers) est égal au carré de la demi-distance des foyers ; ce qui est la définition plus connue de la lemniscate de Bernoulli. L'intéressante construction de la lemniscate donnée par M. Wieleitner n'était pas, à ce que j'en sais, connue. V. Retali.

3018. (**1906**, 36) (A. Pellet). — *Produit infini.* — Il convient de modifier un peu l'énoncé, ainsi : pour $s = \sigma + it$, $\sigma$ étant compris entre 0 et 1, la différence entre $\zeta(s)$ et la somme des $n$ premiers termes de la série divergente

$$1 + \frac{1}{2^s} = \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

tend vers 0 en même temps que $\frac{1}{t}$, lorsque $n$ est un entier supérieur

à $t$ et inférieur à $t^{\frac{1}{1-\sigma}-\gamma}$, $\gamma$ étant un nombre positif aussi petit que l'on veut d'ailleurs. A. PELLET.

3034. (1906, 62) (H.-B. MATHIEU). — *Résolution de l'équation*

$$z^2 = (x^2+y^2)^2 + 8x^2y^2 - 4xy(x^2-y^2).$$

L'équation proposée devient

$$z^2 = u^2 + 2v^2,$$

à condition de poser

$$u = x^2 - 2xy - y^2, \qquad v = 2xy.$$

Mais on peut aussi mettre $u$ sous la forme

$$u = (x-y)^2 - 2y^2;$$

et l'on a, par suite,

$$u^2 = [(x-y)^2 + 2y^2]^2 - 2[2y(x-y)]^2,$$

et plus généralement encore, en désignant par $\alpha$ et $\beta$ deux racines entières simultanées de l'équation $\alpha^2 - 2\beta^2 = 1$,

$$\begin{aligned} u^2 = & \left\{ \alpha[(x-y)^2 + 2y^2] + 2\beta[2y(x-y)] \right\}^2 \\ & - 2\left\{ \beta[(x-y)^2 + 2y^2] + 2\alpha y(x-y) \right\}^2. \end{aligned}$$

Il viendra donc

$$z = \alpha[(x-y)^2 + 2y^2] + 2\beta[2y(x-y)]$$
$$\pm v = \pm 2xy = \beta[(x-y)^2 + 2y^2] + 2\alpha y(x-y).$$

Il s'agit par conséquent de trouver pour quelles valeurs de $\alpha$ et de $\beta$ la forme quadratique homogène en $x$ et $y$

$$\beta[(x-y)^2 + 2y^2] + 2\alpha y(x-y) \pm 2xy,$$

ou plutôt, en ordonnant,

$$\beta x^2 + 2(\alpha - \beta \pm 1)xy + (3\beta - 2\alpha)y^2,$$

est décomposable en facteurs rationnels, ce qui conduit à égaler à un carré le discriminant :

$$(\alpha - \beta \pm 1)^2 - \beta(3\beta - 2\alpha).$$

Or, en tenant compte de l'inégalité $\alpha > \beta$ et de la relation

$$\alpha^2 - 2\beta^2 = 1,$$

la condition à satisfaire peut s'écrire, toutes réductions faites,

$$\alpha - \beta = 2t^2 - 1.$$

On a, du reste,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{99}{70}, \quad \frac{239}{169}, \quad \ldots,$$

et la série des différences $(\alpha - \beta)$, c'est-à-dire la suite 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, etc., reproduit à un rang près celle des nombres $\beta$. Mais la supposition qu'un des nombres $\beta$ fût de la forme $2t^2 - 1$ impliquerait que l'on eût $\alpha^2 = 2\beta^2 + 1 = 2(2t^2 - 1)^2 + 1 = 4[2t^2(t^2 - 1)] + 3$, forme qui ne convient pas à un carré parfait. Il n'y a d'exception que pour les valeurs $\alpha = 3$, $\beta = 2$, qui conduisent à la relation $x + 2y = 0$ et à la valeur $z = 9y^2$.

En dehors de ce cas particulier, on ne saurait satisfaire à la proposée par le moyen de valeurs entières des variables.

E. MALO.

Autre réponse de M. BROCARD qui propose la même transformation et rappelle que l'équation $z^2 = u^2 + 2v^2$, résolue uniquement par $u = 1$, $v = 2$, $z = 3$, a été étudiée ou rencontrée à diverses reprises (*N. A.*, 1846, 1863, 1876, 1879 et 1881).

3053. (**1906**, 94) (E. GRIGORIEF). — *Méthodes des mathématiciens japonais des* XVII^e *et* XVIII^e *siècles pour le calcul de* $\pi$. — On trouve une traduction libre (en italien) d'un article du professeur D. Kikuchi sur le sujet indiqué, dans le vol. XI (1896) du *P. M. R.*, p. 23-25.

V. RETALI.

## QUESTIONS.

**3113. [X4]** Quelle est la condition d'un bon graphique, c'est-à-dire quelle relation doit exister entre l'échelle des abscisses et l'échelle des ordonnées pour que *parle* une courbe représentant la marche d'une fonction algébrique, d'un titre financier, d'une fièvre, etc. ?

LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

**3114. [U10]** Certaines questions, notamment en topographie, peuvent se résoudre par voie directe ou par approximations successives. A laquelle de ces deux méthodes doit-on, en général, accorder la préférence ?

LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

**3115. [N¹1a]** Dans sa célèbre Communication du 15 février 1864, Chasles a énoncé, parmi un grand nombre de propriétés des systèmes de coniques, les théorèmes suivants :

*Dans un système de coniques* $(\mu, \nu)$ *passant par deux points fixes et satisfaisant à deux autres conditions, le lieu des pôles de la droite joignant les deux points fixes est de l'ordre* $\frac{\nu}{2}$;

*Le lieu des foyers d'un système de paraboles est une courbe de l'ordre* $\left(\frac{\mu}{2}+\nu\right)$ *qui a deux points multiples d'ordre* $\frac{\mu}{2}$ *imaginaires, à l'infini, sur un cercle.*

Or, comme tous ces nombres doivent être entiers, il s'en-

suit que : *tout système algébrique de cercles a pour deuxième caractéristique un nombre pair; tandis que tout système de paraboles a pour première caractéristique un nombre pair.*

Ces propositions ont-elles été remarquées? Dans ce cas, les a-t-on prouvées directement, ou a-t-on déterminé les conditions dans lesquelles elles sont exactes?

G. LORIA.

3116. [I11c] On a, pour la fonction holomorphe $(s-1)\zeta(s)$ de Riemann,

$$\log[(s-1)\zeta(s)] = \log(s-1) + \sum_2^\infty \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2}\sum_2^\infty \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_2^\infty \frac{1}{p^{3s}} + \ldots$$

quand $R(s) > 1$.

D'autre part, lorsque $s$ *est réel* et compris dans les limites $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$,

$$\log[(s-1)\zeta(s)] = \log(1-s) + \lim_{x=\infty}\left[\sum_2^x \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2}\sum_2^{x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_2^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{p^{3s}} + \ldots - \mathrm{Li}(x^{1-s})\right]$$

en sorte que l'expression suivante

$$\log[(s-1)\zeta(s)] = \log|1-s| + \lim_{x=\infty}\left[\sum_2^x \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2}\sum_2^{x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_2^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{p^{3s}} + \ldots - \mathrm{Li}(x^{1-s})\right]$$

est valable pour toutes les valeurs *réelles* de $s$ non inférieures à $\frac{1}{2}$.

Dans quel domaine cette expression est-elle applicable pour des valeurs complexes de $s$?

WILLIOT.

3117. [J1bα] Je désirerais savoir si les relations suivantes relatives aux combinaisons sont connues et comment

on peut les établir, en posant $n = 2h + 1$, $h > k$ :

$$(C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^{n-1}) - (C_n^2 C_1^1 + C_n^4 C_2^1 + \ldots + C_n^{n-1} C_h^1) + \ldots$$
$$+ (-1)^k (C_n^{2k} C_k^k + C_n^{2k+2} C_{k+1}^k + \ldots + C_n^{n-1} C_h^k) + \ldots$$
$$+ (-1)^h C_n^{n-1} C_h^h = 1,$$

$$n(C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1}) - (n-2)(C_n^2 C_1^1 + C_n^4 C_2^1 + \ldots + C_n^{n-1} C_h^1) + \ldots$$
$$+ (-1)^k (n - 2k)(C_n^{2k} C_k^k + C_n^{2k+2} C_{k+1}^k + \ldots + C_n^{n-1} C_h^k) + \ldots$$
$$+ (-1)^h C_n^{n-1} C_h^h = n^2.$$

RICALDE (Mérida, Yucatan).
[Traduit de l'espagnol. (LA RÉD.)]

**3118. [D2bβ]** Peut-on trouver la somme de la série

$$\sin x + \sin mx + \sin m^2 x + \sin m^3 x + \ldots + \sin m^n x,$$

où $m$ est un entier positif? NAZAREVSKY (Kharkov).

**3119. [A3h]** Établir une relation entre les coefficients de l'équation à coefficients entiers

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

pour qu'on puisse la mettre sous la forme

$$k(nx^2 + px + q)^2$$
$$+ l(nx^2 + px + q)(rx^2 + sx + t) + m(rx^2 + sx + t)^2 = 0,$$

où $k$, $l$, $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ sont des nombres entiers.
NAZAREVSKY (Kharkov).

**3120. [I22]** A-t-on démontré que $\sin x^\circ$, où $x$ exprimé en degrés est un nombre commensurable, ne peut être commensurable que pour $x = 90$ et pour $x = 30$ $(x \gtreqless 90)$?
NAZAREVSKY (Kharkov).

**3121. [V9]** J'ai lu que Gudermann avait trouvé la veille de sa mort un théorème de géométrie sphérique analogue au théorème de Pythagore. Quel est ce théorème et où se trouve-t-il exposé et démontré? *Trinitario.*

3122. [**K17e** et **J2f**] Une sphère est donnée et, sur celle-ci, cinq points A, B, C, D, E; si l'on prend au hasard sur la même sphère un sixième point X, l'on obtient un hexagone sphérique ABCDEX, et les couples de côtés opposés se coupent en trois points M, H, L. Or, on demande: 1° Quel est le lieu sur la sphère du point X, lorsqu'il se meut de manière que l'aire du triangle MHL soit une quantité constante? 2° Quelle est la probabilité pour que l'aire du triangle MHL soit plus petite qu'une portion donnée de la sphère? *Trinitario.*

3123. [**I**] L'équation $n! = N^3 - N$ est-elle satisfaite par d'autres valeurs que $n = 3, 4, 5$ et $6$?
LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

3124. [**V**] Je trouve extraordinaire qu'on ait attendu pendant deux siècles (de Viète à Puissant) les formules analytiques (**1906**. 6) de la surface du polygone, et pendant dix-neuf siècles (d'Euclide à Snellius) la solution du problème de la carte!

N'y a-t-il pas eu, durant ces intervalles, des géomètres obscurs qui aient résolu ces questions élémentaires?
LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

3125. [**V6**] Le colonel Laussedat (*Recherches sur les instruments, etc.*, Paris, Gauthier-Villars, t. I, 1898, note de la page 15) déclare que « chez les Aztèques, du temps de Cortez, il y avait des arpenteurs plus habiles que ceux des Espagnols ».

Pourrait-on me donner, non pas des preuves, mais des aperçus — qui m'intéresseraient vivement — sur l'habileté des arpenteurs aztèques en l'an 1500?
LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

3126. [**K1d**] Est-il possible de diviser un triangle en trois parties équivalentes et isopérimètres?

(Je signale, à titre de curiosité, que les quadrilatères GNAP, GPBM et GMCN formés par les médianes AM, BN et CP du triangle ABC sont équivalents et presque isopérimètres.) LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

**3127.** **[U10a]** Où pourrais-je trouver une réponse élémentaire, précise et complète, aux deux questions suivantes que les ouvrages classiques n'abordent pas :

1° Avec quelle approximation peut-on obtenir la surface d'un polygone, quand on a mesuré ses côtés et ses angles avec une approximation déterminée et qu'on dispose d'une certaine Table?

2° Avec quelle approximation faudrait-il mesurer les côtés et les angles d'un polygone, et quelle Table faudrait-il employer, pour obtenir la surface de ce polygone avec une approximation déterminée?

LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

**3128.** **[U10a]** Existe-t-il et, dans l'affirmative, où pourrait-on consulter une traduction française du traité d'arpentage d'Al-Baghadadi « qui était si parfait qu'on l'avait attribué à Euclide » (colonel LAUSSEDAT, *Recherches sur les instruments, etc.*, Gauthier-Villars, 1898, p. 47)?

LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

**3129.** **[I18c]** Dans quels cas la somme des cubes de trois nombres entiers est-elle un carré, comme dans le cas suivant

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2 ?$$

E.-N. BARISIEN.

**3130.** **[I13bα]** La formule

$$(a^2 + b^2)^3 = [a(3b^2 - a^2)]^2 + [b(3a^2 - b^2)]^2$$

permet de déterminer des cubes qui soient sommes de deux

carrés, tels que

$$5^2 = 11^2 + 2^2 \qquad (a = 1,\ b = 2);$$

y a-t-il d'autres formules analogues? E.-N. Barisien.

3131. [P5b] Peut-on donner une représentation analytique unique de toutes les représentations d'une surface sur une autre? Lazzarini (Turin).

3132. [O6s] Je désirerais avoir quelques renseignements sur les surfaces qui ont une sphère pour développée moyenne. Lazzarini (Turin).

3133. [P6f] Connaît-on une interprétation géométrique de la correspondance dans laquelle au point $a$, $b$, $c$ correspond la sphère

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)(a^2 + b^2 + c^2 - 1) + 4ax + 4by + 4cz = 0?$$

Lazzarini (Turin).

# RÉPONSES.

**971.** (**1897**, 5; **1906**, 162) (G. Eneström). — Je ne trouve rien de bien catégorique à ajouter à ce que l'on sait du mathématicien Marc-Antoine-Parseval-Deschênes.

I. La liste de ses cinq Mémoires d'Analyse mathématique, parus au Tome I[er] (1806) du *Recueil des Savants étrangers*, a été donnée dans la Table générale dudit *Recueil*, et, antérieurement, dans la *France littéraire* de Quérard.

II. Je n'ai pu vérifier pour quel motif Quérard et Didot-Hœfer ont affirmé qu'il fut correspondant de l'Institut (Académie des Sciences). Comment expliquer alors l'omission de son nom dans l'Ouvrage si documenté de M. de Franqueville : *Le premier siècle de l'Institut de France* (Paris, 1895)? Ceci donne à croire qu'il aura été confondu avec son contemporain et presque son homonyme Parseval-Grand-Maison (1759-1834) qui, lui, a été de l'Institut (Académie française).

III. Pour l'énoncé du théorème de Parseval sur les séries, *voir* la *Grande Encyclopédie*, au nom précité.

IV. On trouve à la Bibliothèque nationale, Ln[27], n° 15797 : *Mémoire ou réfutation d'une inculpation calomnieuse pour le sieur Parseval-Deschênes.* Paris, Boulard (s. d.), in-4°. Pièce.

Il serait intéressant de savoir si ce Mémoire se rapporte au mathématicien Parseval-Deschênes.

V. Celui-ci était le frère de l'amiral Alexandre-Ferdinand (1790-1860), qui prit Bomarsund. *Voir* Edm. Texier : *Les hommes de la Guerre d'Orient.*

VI. Les détails biographiques sur Marc-Antoine paraissent avoir été tirés du *Moniteur universel,* dont il faudrait consulter la collection à l'époque de son décès à Paris, août 1836. H. Brocard.

992. (**1897**, 30; **1906**, 162) (DE ROCQUIGNY). — *Sur les méthodes de Fermat.* — Il existe sur les méthodes de Fermat un Ouvrage déjà un peu ancien, mais resté malgré tout excellent : *Précis des Œuvres mathématiques de P. Fermat et de l'Arithmétique de Diophante*, par E. Brassine. Paris, Mallet-Bachelier, 1853.

Il a paru dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse,* mais existe aussi à part. *H. Braid.*

2130. (**1901**, 187) (H. BROCARD). — *Canon de perspective* (**1902**, 280; **1905**, 176). — Cette question est posée et résolue très explicitement dans les Notes du *Cours de Perspective* de Louis Joblot à l'Académie royale de Peinture et de Sculpture en 1702-1703, dont la rédaction manuscrite, due à un de ses auditeurs, François Rohais, se trouve à la Bibliothèque de Troyes (MS. 2649, 2 vol. in-4°, 367 et 391 pages, etc.).

De ce manuscrit, à peine connu et demeuré inédit, il me paraît intéressant d'extraire quelques lignes se rapportant à l'objet de la question.

Tome I, p. 133 : « Du point de l'eloignement ou de la distance de laquelle on doit regarder l'ouvrage du peintre; de toute l'etendue de matiere qui se presente devant et a cote nos yeux et quon peut quasi renfermer dans un demy cercle nous n'en pouvons apercevoir qune partie quand mesme nous nous servirions des deux yeux pourveu que la tete demeure fixe ou immobile.

» Et si cette etendue est regardee d'un seul œil quelque mouvement quon luy fasse faire il en decouvrira un peu moins mais il est certain qu'il n'en peut voir distinctement et lune après lautre tout au plus que les parties qui sont comprises entre des Rayons de Lumier qui forment un angle droit cespourquoy pour voir le plan perspectif ABC, on ne doit pas se mettre ailleurs quen D, si l'on veut decouvrir facilement l'etendue BC car en s'aprochant davantage de la Base du tableau en conservant louverture de l'angle doit CDB, il est visible qu'on decouvrira un moindre espace || 134 || que BC, ce qui seroit un desavantage tres considerable puisque la perspective seroit toute fautive car ce qui devroit donner un quarré ne donneroit qu'un quarré long. Si au lieu de mettre le point d'éloignement en D, on le plaçoit en F, d'ou l'on supose qu'on voit les extremites de la baze du tableau BC, par des rayons qui forment un angle de soixante degrez il seroit placé dans l'endroit le plus avan-

tageux qu'on puisse trouver pour voir distinctement tout ce qui sera peint dans le tableau.

» C'est donc l'interval FG qu'il faut porter sur la ligne horisontal de part et d'autre du point de distance ou d'un seul costez, si l'on n'en veut qu'un comme on le voit dans la figure suivante », etc.

*Note.* — Le lecteur voudra bien suppléer aux défauts de rédaction, ainsi qu'à la figure, qu'il rétablira aisément : ABFC losange formé de deux triangles équilatéraux ABC, BCF (A en haut, F en bas). Le tableau représente la perspective d'un échiquier carré de front. Tracer AF, qui rencontre BC en G. Prendre sur GF le point D, tel que le triangle BDC soit rectangle en D.

Quant à Louis Joblot, il en a été parlé ici dans la réponse **1853** (**1902**, p. 15-16). H. Brocard.

**2254.** (**1902**, 3) (Espanet). — *Courbe du cinquième ordre analogue (?) à la strophoïde.* — Prenons comme axes coordonnés les droites BC et OY, et appelons $(a, b)$ les coordonnées de A, $2l$ la longueur BC et $\lambda$ l'ordonnée du point $\omega$. Alors l'équation du rayon $A\omega$ sera

$$(1) \qquad \lambda(x-a)-(bx-ay)=0,$$

tandis que les ordonnées des points $\Omega_1$, $\Omega_2$ seront données par la formule suivante :

$$\mu = \lambda \pm \sqrt{l^2+\lambda^2}.$$

Remarquons que de cette équation on tire

$$\lambda = \frac{\mu^2-l^2}{2\mu},$$

et nous verrons qu'entre les rayons du faisceau A et les cercles passant par les points B, C il y a une correspondance (2, 1); il s'ensuit que la courbe dont il s'agit appartient à la catégorie de celles qu'on peut engendrer par deux faisceaux de courbes en correspondance algébrique. Cette remarque fournit un moyen très aisé pour établir les propriétés caractéristiques de cette courbe; en effet, par une simple application du principe de correspondance de Chasles, on prouve qu'elle est du cinquième degré; elle passe une fois par le point A, car il y a un (seul) cercle qui passe par les points A, B, C;

au contraire, elle passe deux fois par le point B (ou C), car au rayon AB (ou AC) du faisceau de rayons considéré correspondent deux cercles du faisceau générateur de la courbe; pour des raisons analogues, on voit que la courbe passe deux fois par chaque point circulaire à l'infini. Il s'agit donc d'une quintique bicirculaire ayant deux autres points doubles à distance finie. Dans le faisceau de cercles que nous avons considéré, il y a un cercle décomposé en la droite BC et la droite à l'infini du plan; le rayon correspondant du faisceau A est normal à BC; donc la courbe passe non seulement par le pied de la normale abaissée de A sur BC, mais encore par le point à l'infini de OY.

On peut confirmer toutes ces propositions par la discussion de l'équation de la courbe, qu'on obtient comme il suit : les cercles du faisceau considéré, ayant comme centres les points $\Omega_1, \Omega_2$, ont, comme équations,

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda y - l^2 = \pm 2y\sqrt{l^2 + \lambda^2}.$$

L'élimination de $\lambda$ entre les équations (1), (2) donne

$$(3) \quad (x^2+y^2-l^2)^2(x-a) - 4y(x^2+y^2-l^2)(bx-ay) = 4l^2y^2(x-a);$$

c'est l'équation cherchée de la courbe; elle prouve de nouveau que A est un point simple, tandis que B, C en sont des points doubles (des *nœuds*); tout cercle coupant la courbe seulement en six points à distance finie, les points circulaires en sont des points doubles; la courbe n'a qu'un point réel à l'infini, l'asymptote correspondante ayant pour équation $x + 3a = 0$. Remarquons encore qu'un cercle passant par B, C, par exemple celui dont l'équation est

$$x^2 + y^2 - 2\rho y = l^2,$$

coupe la courbe, en dehors des points doubles, en deux points situés sur la droite

$$(\rho^2 - l^2)(x - a) = 2\rho(bx - ay),$$

passant, quel que soit $\rho$, par le point A; il s'ensuit que l'involution quadratique existant sur toute courbe du cinquième ordre à quatre points doubles [*comp.* J. DE VRIES, *Ueber fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten* (*Wiener Sitzungsber.*, 1895)], sur la courbe en question est particulière, car la conique enveloppée par les droites

joignant les couples de points correspondants se réduit (comme enveloppe) au point A compté deux fois.

Lorsque le point A tombe en B (ou C), ce point devient un point triple de la courbe, qui, par suite, est dégénérée; on trouve en effet que l'équation de la quintique se décompose dans ces deux :

$$(x-l)^2+y^2=0, \qquad (x+l)(x-l)^2=y^2(3l-x);$$

la première représente le point-cercle B, tandis que l'autre appartient à une strophoïde droite. La construction de cette courbe, à laquelle on arrive par cette voie, est autre et plus compliquée que la construction ordinaire, d'où l'on fait découler les plus belles propriétés de la strophoïde; par conséquent, il est raisonnable de douter que ces propriétés se conservent en passant d'une courbe unicursale du troisième ordre à une courbe du cinquième ordre hyperelliptique. GINO LORIA.

2683. (**1903**, 277) (N. QUINT). — *Construction du pentagone régulier* (**1904**, 292). — Un hasard de lecture m'a fait retrouver une indication bibliographique assez utile.

*Voir* H. BARRAL : *Construction du pentagone régulier d'après M. Staudt* (*N. A.*, 1852, p. 388-390). H. BROCARD.

2753. (**1904**, 71) (T. LEMOYNE). — *Propriété des cubiques nodales* (**1904**, 174; **1906**, 19, 104, 199). — M. Retali, à la fin de sa nouvelle réponse à la question 2753 (**1906**, 199), m'attribue une opinion que je n'ai ni eue ni exprimée dans celle que j'avais faite moi-même un peu auparavant (**1906**, 104), et je n'ai aucunement jugé *nécessaire* que la courbe unicursale d'ordre $m$, sur laquelle on considère une involution quadratique, possédât un point multiple d'ordre $m-1$, pour que l'enveloppe des cordes joignant les couples involutifs fût de classe $m-1$ : ce qui est exact, c'est que ma démonstration est formellement bornée à ce cas particulier.

Peut-être aurais-je pu négliger de faire cette simple observation : M. Retali voudra bien n'y voir que l'intérêt qui s'attache à tout ce qu'il écrit. E. MALO.

2825. (**1904**, 238) (H. BROCARD). — *Sur la géométrie d'Apollonius.* — M. H. Bosmans a bien voulu me signaler, comme étude sur les coniques d'Apollonius, le Mémoire de Housel, paru au *J. M.*,

2e série, t. III, 1858, p. 153-192, et la traduction allemande de l'Ouvrage d'Apollonius, par P.-H. Balsam : *Des Apollonius von Pergie sieben Bücher über Kegelschnitte,* Berlin, 1861.

Il croit que la traduction de Peyrard, mentionnée dans la question 2825, est demeurée inédite. H. Brocard.

**2856.** (**1905**, 5) (A. Mannheim). — *Sur le conoïde de Plücker* (**1905**, 182). — Comme contribution à l'étude proposée : *voir* J.-J. Chapelon, *Sur la surface* S *lieu des centres de courbure des courbes d'une surface* Σ *passant par un point* A *de cette surface* (*N. A.*, 1906, p. 180-185).

Cette surface S est une surface cerclée, dont la transformée par inversion par rapport au point A pris comme pôle est un conoïde de Plücker.

Toutefois, la Note de M. Chapelon paraît une réinvention de la propriété déjà indiquée par M. F. Michel (*I. M., loc. cit.*).

H. Brocard.

**2994.** (**1906**, 5) (H.-B. Mathieu). — *Solutions d'une équation en nombres entiers* (**1906**, 128). — J'ai rencontré l'équation dont il est question dans cette Note, en cherchant une démonstration du théorème de Bachet; je désirerais, si c'est possible, une vérification qui fût indépendante de ce théorème. Mathieu (Saïgon).

**3041.** (**1906**, 89) (E. Malo). — *Tout nombre est-il de la forme :* $p^2 + Aq^2 + Br^2 + ABs^2$? — Sur ce sujet *voir :* Liouville, *Sur les deux formes :* $x^2+y^2+z^2+t^2$ et $x^2+2y^2+3z^2+6t^2$ (*J. M.*, 1845, p. 169) et Liouville, *Sur la représentation des nombres entiers par la forme :* $x^2+ay^2+bz^2+abt^2$ (*C. R.*, 1856, t. XLII, p. 1145). Les conclusions de Liouville sont que la forme indiquée représente tous les nombres dans les sept cas suivants ($a$ et $b$, entiers positifs) :

$$a = 1, \quad b = 1, 2, 3,$$
$$a = 2, \quad b = 2, 3, 4, 5.$$

Les nombres 2 et 3 empêchent d'aller plus loin.

Voici quelques identités sur ce sujet :

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 = x^2 + y^2 + (z-t)^2 + (z+t)^2,$$
$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 = x^2 + (y+z)^2 + (y-z)^2 + (2t)^2,$$

et

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2 = x^2 + (y + 2t)^2 + (y - 2t)^2 + (2z)^2,$$
$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2 = x^2 + (y + z + t)^2 + (y - z - t)^2 + (2t - z)^2.$$

Cette dernière est donnée par Liouville. A. Boutin.

De 1859 à 1866, J. Liouville a publié, dans son Journal, une multitude d'articles au sujet des propriétés des nombres de diverses formes quadratiques.

Celles qui rentreraient dans les types

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2$$

ou

$$x^2 + Ay^2 + Bz^2 + ABt^2$$

se trouvent, par exemple, 1861, p. 135 ($A = 2$, $B = 3$); 1862, p. 153 ($A = 2$, $B = 8$); 1863, p. 239 ($A = 3$, $B = 4$); et, pour

$$x^2 + Ay^2 + Az^2 + A^2t^2,$$

*voir* : 1862, p. 1 ($A = 2$); 1862, p. 246 ($A = 8$). *Voir* aussi : 1856, p. 230. H. Brocard.

**3044.** (**1906**, 90) (*Nester*). — *Aire de courbes.* — En désignant respectivement par $S_1$ et $S_2$ les aires des deux courbes données il y a lieu de calculer les deux intégrales

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 - x^2}}\, dx,$$

$$S_2 = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{a - \sqrt{a^2 - x^2}}\, dx,$$

lesquelles, au moyen du changement de variable

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \lambda,$$

deviennent :

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^a \frac{\lambda^2\, d\lambda}{\sqrt{a - \lambda}},$$

$$S_2 = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^a \frac{\lambda^2\, d\lambda}{\sqrt{a + \lambda}}.$$

En posant $\sqrt{a-\lambda} = \mu$, on obtient

$$S_1 = \frac{4}{\sqrt{a}} \int_0^{\sqrt{a}} (a-\mu^2)^2 d\mu.$$

De même, la substitution $\sqrt{a+\lambda} = \mu$ donne

$$S_2 = \frac{4}{\sqrt{a}} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{2a}} (a-\mu^2)^2 d\mu;$$

or

$$\int (a-\mu^2)^2 d\mu = \mu\left(a^2 - \frac{2a\mu^2}{3} + \frac{\mu^4}{5}\right),$$

par suite

$$S_1 = \frac{4}{\sqrt{a}}\left[\mu\left(a^2 - \frac{2a\mu^2}{3} + \frac{\mu^4}{5}\right)\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{32a^2}{15},$$

et

$$S_2 = \frac{4}{\sqrt{a}}\left[\mu\left(a^2 - \frac{2a\mu^2}{3} + \frac{\mu^4}{5}\right)\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{2a}} = \frac{4a^2}{15}(7\sqrt{2}-8).$$

MICHEL.

Si l'on pose

$$x = a \sin 2\varphi,$$

les équations

$$y_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos 2\varphi \cos\varphi \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos 2\varphi \sin\varphi$$

donnent respectivement, lorsque $\varphi$ varie de o à $\frac{\pi}{4}$, les ordonnées des arcs de l'ovale et de la boucle, situés dans l'angle des coordonnées positives.

Par suite, les aires totales $\Omega$ et B de l'ovale et de la boucle sont déterminées par les relations

$$\tfrac{1}{4}\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{4}} y_1\,dx, \qquad \tfrac{1}{4}B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} y_2\,dx,$$

les termes sous les signes d'intégration étant exprimés en fonction de $\varphi$.

On a donc, en effectuant les calculs,

$$\Omega = 4a^2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{32}{15}a^2$$

$$B = 4a^2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \left(\frac{28\sqrt{2}}{15} - \frac{32}{15}\right)a^2.$$

On arrive au même résultat par les changements de variables

$$\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}} = u\sqrt{a} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}} = t\sqrt{a}.$$

J. Raibaud.

Réponses analogues de MM. Gleizes, Lefèvre, Livon, Gino Loria, Rose.

**3045.** (**1906**, 91) (*Crut*). — *Calcul des rayons d'une lentille biconvexe.* — On a généralement la relation

$$12V - 3eS + \pi e^3 = 0;$$

par suite il est impossible de donner arbitrairement V, S et $e$.

Si l'on choisit les données conformément à cette relation, il y a une infinité de solutions. En effet, en posant $R + R' = x$, $RR' = y$, on n'a à satisfaire qu'à la seule équation

$$(S + \pi e^2)x - 4\pi e y = Se,$$

d'où

$$y = \frac{(S+\pi e^2)x - Se}{4\pi e}.$$

Or, les racines R et R' de l'équation

$$t^2 - xt + \frac{(S+\pi e^2)x - Se}{4\pi e} = 0$$

étant positives, on devra choisir $x \geqq \dfrac{S}{\pi e}$.

W. Kapteyn (Utrecht).

Réponses analogues de MM. Barbarin, Berdellé, Dujardin, Gleizes, Mathieu, Pellet, Raibaud.

**3048.** (**1906**, 93) (*Neisirab*). — ***Problème d'élimination.*** — La question revient à éliminer $x$ et $y$ entre les trois équations

$$(1) \qquad Ax + By = C,$$

$$(2) \qquad \frac{D}{x} + \frac{E}{y} = F,$$

$$(3) \qquad x^4 + y^4 = 1.$$

L'élimination de $y$ entre les deux premières donne pour $x$ une équation de la forme

$$(4) \qquad x^2 = \alpha x + \gamma,$$

et de même, en éliminant $x$, on a, pour $y$,

$$(5) \qquad y^2 = \beta y + \delta,$$

d'où

$$(6) \qquad x^4 = \alpha' x + \gamma',$$

$$(7) \qquad y^4 = \beta' y + \delta',$$

et, en portant dans (3), on a l'équation

$$(8) \qquad \alpha' x + \beta' y = 1 - \gamma' - \delta'$$

qui, jointe à (1), donne

$$(9) \qquad x = a, \qquad y = b,$$

et finalement

$$(10) \qquad a^4 + b^4 = 1,$$

$a$ et $b$ sont des fractions rationnelles de A, B, C, D, E, F.

En chassant les dénominateurs, on a finalement une équation

$$f(A, B, C, D, E, F) = 0,$$

rationnelle par rapport à ces coefficients, et homogène du quarantième degré.

Le calcul n'offre d'autre difficulté que sa longueur.

P. HENDLÉ.

En multipliant entre elles les deux équations données on trouve

$$AD + BE - CF + BD\sqrt{\operatorname{tang}\varphi} + AE\sqrt{\cot\varphi} = 0,$$

ou bien, en posant

$$(1) \qquad \sqrt{\operatorname{tang}\varphi} = u,$$

on a

$$(2) \qquad (AD + BE - CF)u + BDu^2 + AE = 0.$$

Si, au contraire, on divise les deux équations données, on obtient

$$\frac{A\sqrt{\cos\varphi} + B\sqrt{\sin\varphi}}{E\sqrt{\cos\varphi} + D\sqrt{\sin\varphi}}\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{C}{F},$$

ou bien, à cause de la proposition (1),

$$\frac{A + Bu}{E + Du}\,u\cos\varphi = \frac{C}{F}.$$

Or, comme $\operatorname{tang}\varphi = u^2$,

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + u^4}},$$

et l'équation précédente devient

$$(3) \qquad \frac{(A + Bu)^2}{(E + Du)^2}\,\frac{u^2}{1 + u^4} = \frac{C^2}{F^2}.$$

La question est alors réduite à l'élimination de $u$ entre les équations (2) et (3), dont la première est du deuxième et la seconde du sixième degré; le résultat demandé peut donc s'exprimer facilement sous la forme d'un déterminant, en suivant le procédé dialytique de Sylvester. GINO LORIA.

Autres réponses de MM. AUBRY, DELAHAYE, LEMAIRE, et ROSE.

**3058.** (**1906**, 96) (E.-N. BARISIEN). — *Sur l'ordre d'une podaire.* — La première partie de la question (*podaires de même degré que les courbes de base*) a été posée autrefois par M. Barisien (quest. **2237**; **1901**, 282) et ma réponse (**1902**, 86-87) suffit aussi pour la deuxième. Voici quelques autres développements sur la ques-

tion. Comme la podaire d'une courbe est l'inverse de sa polaire réciproque, on déduit des règles connues de l'inversion circulaire que l'ordre $n'$ de la podaire par rapport à un point O, d'une courbe $C_n$, d'ordre $n$ et classe $m$ est

$$n' = 2m - f' - g,$$

où $f'$ désigne combien de fois $C_n$ est tangente à une droite isotrope issue de O, et $g$ combien de fois elle touche la droite à l'infini. Il s'ensuit que $n'$ sera égal ou inférieur à $n$ suivant que $2m - n \overset{=}{<} f' + g$. En particulier, si $C_n$ est générale en son ordre, $n(2n-3) \overset{=}{<} f' + g$.

On trouve aisément des courbes qui satisfont aux conditions requises, en dehors des cas simples connus (podaire de conique rapport à un foyer, podaire d'hypocycloïde triangulaire, etc.) : par exemple, la podaire d'une quartique tricuspidale circulaire, par rapport à son foyer singulier, est du quatrième ordre ; mais, si la quartique est en outre parabolique, sa podaire (par rapport au foyer singulier) est du troisième ordre. Comme autre exemple, considérons une courbe du sixième ordre avec neuf rebroussements : si elle ne touche aucun côté du triangle isotrope OIJ, sa podaire par rapport à O est du sixième ordre; dans le cas contraire elle est d'ordre inférieur.

V. RETALI.

Soit $\nu$ la classe d'une courbe $\Gamma$ de l'ordre $n$. Par une simple application du principe de correspondance de Chasles, on voit de suite que le podaire de $\Gamma$ est *en général* de l'ordre $2\nu$. Mais, si $\Gamma$ a la droite à l'infini comme tangente $\gamma$-tuple, il est aisé de voir que de ladite podaire la droite à l'infini se sépare $\gamma$ fois (par exemple la podaire d'une parabole est seulement du troisième ordre). De manière que l'ordre $n'$ de la podaire est donné par la formule

$$n' = 2\nu - \gamma$$

ou bien, en désignant par $d$ le nombre des points doubles et par $k$ celui des points de rebroussement de $\Gamma$,

$$n' = n(n-1) - 2d - 3k - \gamma.$$

On aura, par suite,

$$n' \leqq n$$

lorsque

$$2d + 3k + \gamma \geqq n(n-2).$$

Considérons, par exemple, une courbe rationnelle du quatrième ordre ayant trois points de rebroussement et bitangente à la droite à l'infini; on a, dans ce cas,

$$n = 4, \qquad d = 0, \qquad k = 3, \qquad \nu = 3, \qquad \gamma = 2,$$

et, par suite,

$$n' = 4;$$

dans ces conditions se trouve la célèbre hypocycloïde à trois rebroussements, dont plusieurs podaires sont des courbes remarquables. Comparer le Chapitre VIII de la 3e Section de mon Ouvrage : *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven* (Leipzig, 1902). G. LORIA.

Autres réponses de MM. BROCARD, HENDLÉ, *Majol*.

**3059.** (**1906**, 96) (E.-N. BARISIEN). — *Équation du sixième ordre à racines doubles.* — En posant

$$\frac{(x-a)^2}{x-b} = \frac{a}{z},$$

l'équation proposée devient

$$729z^3 - 432z + 128 = 0$$

ou

$$\left(z+\frac{4}{9}\right)^2\left(z-\frac{8}{9}\right) = 0,$$

donc l'équation demandée se ramène à la forme

$$[4(x-a)^2 + 9a(x-b)]^2[9a(x-b) - 8(x-a)^2] = 0$$

qui met en évidence toutes les racines, doubles et simples.

Pour $b = \frac{a}{2}$ on a

$\frac{a}{4}$ et $-\frac{a}{2}$ pour racines doubles,

$\frac{5}{2}a$ et $\frac{5}{8}a$ pour racines simples.

P. BARBARIN.

Il est très facile de montrer que l'équation de M. Barisien

(1) $128(x-a)^6+432a(x-b)(x-a)^4-729a^2(x-b)^2=0$

possède, non pas seulement *une*, mais *deux* racines doubles, et de calculer leur expression générale, ainsi que celle des racines simples.

Posons, en effet,

(2) $$(x-a)^2=a(x-b)y;$$

l'équation (1) se transforme en l'équation purement numérique

(3) $$128y^3+432y^2-729=0$$

qui admet la racine double $-\frac{9}{4}$ et la racine simple $+\frac{9}{8}$. Ces valeurs de $y$, portées successivement dans l'équation (2), donnent

(4) $$4x^2+ax+a(4a-9b)=0,$$

(5) $$8x^2-25ax+a(8a+9b)=0,$$

d'où l'on tire les expressions demandées :

Racines doubles de (1) ..... $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{-63a^2+144ab}}{8}$,

Racines simples de (1)...... $x=\dfrac{25a\pm3\sqrt{41a^2-32ab}}{15}$.

Lorsque $b=\frac{a}{2}$, les racines deviennent :

Racines doubles.... $\frac{a}{4}$, $-\frac{a}{2}$,

Racines simples.... $\frac{5a}{2}$, $\frac{5a}{8}$,

ce qui comprend les résultats partiels indiqués par M. Barisien.

R. Perrin.

Réponses analogues de MM. Aubry, W.-W. Beman, Brocard, Deuel, Gleizes, Livon, *Quilibet*, Vincent, *Véher*.

**3060.** (**1906**, 97) (E.-N. Barisien). — *Intersection d'une ellipse et de sa développée.* — Parmi les différentes méthodes qu'on peut

employer, la suivante me paraît la plus rapide, et elle fournit d'ailleurs un double résultat.

Soient $x$, $y$ les coordonnées du pied de la normale, tangente à la développée en un point $\alpha$, $\beta$ de l'ellipse, qui est le point cherché.

On a les relations

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{x}{a}\right)^3, \qquad \frac{\beta}{b} = -\frac{c^2}{b^2}\left(\frac{y}{b}\right)^3.$$

Posons $a = \lambda b$, $b$ étant supposé $> 1$.

Alors

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}, \qquad \frac{c^2}{b^2} = \lambda^2 - 1.$$

Enfin posons

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = u, \qquad \left(\frac{y}{b}\right)^2 = v.$$

Les deux points $(\alpha, \beta)$, $(x, y)$, étant sur l'ellipse, on a

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 = 1, \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Par suite

$$\frac{(\lambda^2 - 1)^2}{\lambda^4} u^3 + (\lambda^2 - 1)^2 v^3 = 1$$

et

$$u + v = 1.$$

L'élimination de $u$ donne, après réductions,

$$(\lambda^4 - 1) v^3 + 3 v^2 - 3 v - \frac{2\lambda^2 - 1}{(\lambda^2 - 1)^2} = 0;$$

on reconnait aisément que cette équation a une racine double qui est $-\frac{1}{\lambda^2 - 1}$; mais cette racine, qui est négative, conduit à une valeur imaginaire de $\frac{y}{b}$.

Mais la troisième racine, qu'on déduit aisément des relations entre les racines, $\frac{2\lambda^2 - 1}{\lambda^4 - 1}$, est positive.

On a donc

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2\lambda^2 - 1}{\lambda^4 - 1}, \qquad \frac{\beta}{b} = \mp (\lambda^2 - 1) \frac{(2\lambda^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{(\lambda^4 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\frac{\beta}{b} = \mp \frac{2\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\sqrt{\frac{2\lambda^2-1}{\lambda^4-1}}.$$

On trouverait de même

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{\lambda^2(\lambda^2-2)}{\lambda^4-1}, \qquad \frac{\alpha}{a} = \pm \frac{\lambda}{(\lambda^2+1)}\sqrt{\frac{\lambda^2-2}{\lambda^4-1}};$$

on a ainsi le point cherché $(\alpha, \beta)$ et le point $(x, y)$ pied de la normale double. Outre celle-ci, on peut mener par $(\alpha, \beta)$ une troisième normale, dont on trouve aisément, par l'hyperbole d'Apollonius, les coordonnées du pied, qui sont :

$$\frac{x_1}{a} = \mp \frac{\lambda^3}{(\lambda^2-1)}\sqrt{\frac{\lambda^2-2}{\lambda^4-1}}, \qquad \frac{y_1}{b} = \mp \frac{1}{\lambda^2-1}\sqrt{\frac{\lambda^2-2}{\lambda^4-1}}.$$

La quatrième normale, menée par $\alpha$, $\beta$, est normale à l'ellipse à ce point même. L. DUJARDIN.

Faisant disparaître les radicaux dans l'équation de la développée d'une ellipse, on obtient

$$a^6x^6+b^6y^6+3(a^2x^2+b^2y^2)(a^2b^2x^2y^2+c^8)-3c^4(a^4x^4+b^4y^4) + 21\,a^2b^2c^4x^2y^2-c^{12}=0.$$

Dans cette équation, remplaçant par exemple $x^2$ par sa valeur $\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$, tirée de l'équation de l'ellipse, on trouve d'abord

$$(a^4-b^4)^3y^6+3b^2[c^4(a^8+b^8+7a^4b^4)-a^4(a^4-b^4)^2]y^4 + 3b^4[(a^4-b^4)(a^8+c^8)-a^4c^4(2a^4+7b^4)]y^2-b^6(a^4-c^4)^3=0.$$

Remplaçant $c^2$ par sa valeur $(a^2-b^2)$, cette équation se transforme en

$$(a^2+b^2)^3(a^2-b^2)^3y^6+3b^4(a^2-b^2)^2(b^6+6a^4b^2-2a^6)y^4 + 3b^8(a^2-b^2)(b^6-3a^2b^4+9a^4b^2-5a^6)y^2-b^{12}(2a^2-b^2)^3=0$$

ou

$$(a^2+b^2)^3(a^2-b^2)^3y^6+b^4(a^2-b^2)^2[2(a^2+b^2)^3-(2a^2-b^2)^3]y^4 + b^8(a^2-b^2)[(a^2+b^2)^3-2(2a^2-b^2)^3]y^2-b^{12}(2a^2-b^2)^3=0.$$

Or, cette équation se décompose en produit de deux facteurs :

$$[(a^2-b^2)y^2+b^4]^2\,[a^2-b^2)(a^2+b^2)^3y^2-b^4(2a^2-b^2)^3]=0;$$

le premier donne des racines imaginaires, le second des racines réelles

$$y=\pm\frac{b^2(2a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a aussi

$$x=\pm\frac{a^2(a^2-2b^2)^{\frac{3}{2}}}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

H. Lez.

Autres solutions analogues de MM. Aubry, Barbarin, Brocard, Hendlé, *Majol.*

3063. (1906, 97) (*Onponale*). — *Intersection de deux courbes.* — Dans les équations

$$y=(x-1)^3,\qquad y=(x-2)^5,$$

remplaçons $x$ et $y$ par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$; il vient

$$yz^2=(x-z)^3,\qquad yz^4-(x-2z)^5=0;$$

et l'on voit que le point $x=0$, $z=0$ est un point double pour la première courbe et quadruple pour la seconde. Ce point compte pour 10 points d'intersection.

En effet, de la première on tire

$$\frac{z}{y}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}}f\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$f(t)$ représentant une série holomorphe qui ne s'annule pas avec la variable $t$. Transportant cette valeur de $\frac{z}{y}$ dans

$$yz^4-(x-2z)^5=\varepsilon y^5,$$

qui représente pour $\varepsilon$ infiniment petit une courbe infiniment voisine de la seconde aux environs du point $x=0$, $z=0$, on a une équa-

tion de la forme

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 f_1\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \varepsilon,$$

qui donne 10 valeurs infiniment petites pour $\frac{x}{y}$. A. Pellet.

La parabole cubique a un rebroussement au point à l'infini de l'axe des $y$, avec la droite à l'infini pour tangente cuspidale; l'autre parabole (du cinquième ordre et de la cinquième classe) a aussi au même endroit un rebroussement de première espèce ([1]), mais d'ordre plus élevé (quadruple), ayant aussi pour tangente cuspidale la droite à l'infini. C'est la coïncidence de ces deux rebroussements ayant même tangente cuspidale, qui fournit les $2 \times 4 + 2 = 10$ autres intersections des deux paraboles. Ceci est bien d'accord avec la théorie, car le nombre des intersections de deux courbes réunies en un point, d'après Halphen (*Étude sur les points singuliers, etc.*, § 72), est égal au produit des ordres de multiplicité de ce point sur les deux courbes, augmenté de la somme des ordres des contacts des branches de l'une avec les branches de l'autre en ledit point.

V. Retali (Milan).

Réponses analogues de MM. Aubry et Barbarin.

---

([1]) C'est-à-dire que, moyennant une projection convenable, cette singularité prend l'aspect d'un rebroussement ordinaire.

# TABLE DES QUESTIONS ET RÉPONSES.

Chacune des questions publiées dans le Tome XIII porte le numéro d'ordre avec lequel elle a été publiée. Les autres nombres de la Table indiquent les pages du Volume.

Nous avons cru inutile de continuer à signaler les Réponses ou Notes en portefeuille. L'indication des solutions reçues est, en effet, toujours mentionnée au fur et à mesure dans les *Avis divers* annexés aux numéros mensuels de l'*Intermédiaire* (troisième page de la couverture).

| Questions posées. Tome I (1894). | Pages. | Réponses. Tome XIII. Pages |
|---|---|---|
| 3. | 1 | 9. |
| 82. | 34 | 237. |
| 217. | 115 | 191. |
| 280. | 151 | 191. |
| 314. | 179 | 99. |

| Tome II (1895). | Pages. | Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|
| 541. | 149 | 237. |
| 561. | 164 | 99. |
| 569. | 165 | 143. |
| 653. | 316 | 99. |
| 685. | 401 | 99. |

| Tome III (1896). | Pages. | Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|
| 720. | 11 | 100. |
| 755. | 37 | 100, 191. |
| 788. | 58 | 101. |
| 824. | 101 | 101. |
| 837. | 107 | 39. |
| 845. | 128 | 193. |
| 853. | 150 | 39, 102. |
| 857. | 151 | 9. |
| 860. | 152 | 193. |
| 901. | 199 | 194. |
| 926. | 245 | 238. |
| 928. | 247 | 238. |

| Tome IV (1897). | Pages. | Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|
| 970. | 5 | 102. |
| 971. | 5 | 263. |
| 992. | 30 | 264. |
| 1087. | 146 | 195. |

| Questions posées. Tome V (1898). | Pages. | Réponses. Tome XIII. Pages. | Questions posées. Tome V (1898). | Pages. | Réponses. Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1212. | 6 | 39. | 1307. | 149 | 11, 195. |
| 1306. | 148 | 11. | 1410. | 269 | 39. |

| Tome VI (1899). | Pages. | Tome XIII. Pages. | Tome VI (1899). | Pages. | Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1432. | 4 | 103. | 1585. | 175 | 195. |
| 1475. | 54 | 239. | 1686. | 269 | 143. |

| Tome VII (1900). | Pages. | Tome XIII. Pages. | Tome VII (1900). | Pages. | Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1945. | 333 | 12. | 1969. | 358 | 143. |

| Tome VIII (1901). | Pages. | Tome XIII. Pages. | Tome VIII (1901). | Pages. | Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|---|---|---|
| 2022. | 36 | 63. | 2142. | 190 | 39. |
| 2074. | 108 | 239. | 2175. | 223 | 65. |
| 2090. | 131 | 240. | 2177. | 223 | 13. |
| 2097. | 133 | 13. | 2194. | 251 | 103. |
| 2130. | 187 | 264. | 2235. | 281 | 240. |
| 2134. | 188 | 64, 196. | 2236. | 282 | 242. |
| 2137. | 189 | 145. | 2241. | 309 | 196. |

| Tome IX (1902). | Pages. | Tome XIII. Pages. | Tome IX (1902). | Pages. | Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|---|---|---|
| 2254. | 3 | 265. | 2357. | 142 | 39. |
| 2285. | 36 | 13. | 2389. | 175 | 103. |
| 2299. | 66 | 103. | 2446. | 263 | 242. |
| 2309. | 90 | 15. | 2447. | 264 | 242. |

| Tome X (1903). | Pages. | Tome XIII. Pages. | Tome X (1903). | Pages. | Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|---|---|---|
| 2511. | 33 | 17. | 2575. | 104 | 18. |
| 2512. | 34 | 197. | 2612. | 156 | 197. |
| 2522. | 38 | 17. | 2664. | 256 | 18. |
| 2549. | 70 | 18. | 2683. | 277 | 267. |
| 2560. | 98 | 145. | 2694. | 300 | 198. |
| 2571. | 102 | 243. | | | |

| Tome XI (1904). | Pages. | Tome XIII. Pages. | Tome XI (1904). | Pages. | Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|---|---|---|
| 2706. | 4 | 19. | 2724. | 33 | 104. |
| 2719. | 9 | 198. | 2732. | 41 | 146. |

| Questions posées. Tome XIII (1906). | Pages. | Réponses. Tome XIII. Pages. | Questions posées. Tome XIII (1906). | Pages. | Réponses. Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|---|---|---|
| 2992. | 3 | 126. | 3031. | 61 | 207. |
| 2993. | 5 | 128, 157. | 3033. | 62 | 207, 225. |
| 2994. | 5 | 128, 268. | 3034. | 62 | 255. |
| 2995. | 5 | 128. | 3035. | 62 | 184. |
| 2996. | 6 | 130. | 3037. | 88 | 227. |
| 2999. | 7 | 130. | 3038. | 88 | 227. |
| 3001. | 7 | 131, 223. | 3041. | 89 | 268. |
| 3005. | 8 | 131. | 3042. | 90 | 160. |
| 3007. | 33 | 133. | 3043. | 90 | 228. |
| 3009. | 33 | 133, 223. | 3044. | 90 | 269. |
| 3010. | 34 | 165, 253. | 3045. | 91 | 271. |
| 3011. | 34 | 168. | 3048 | 93 | 272. |
| 3012. | 34 | 170. | 3048 *bis*. | 93 | 228. |
| 3013. | 35 | 173. | 3050. | 94 | 230. |
| 3014. | 35 | 174. | 3053. | 94 | 256. |
| 3015. | 35 | 176. | 3054. | 95 | 231. |
| 3018. | 36 | 254. | 3055. | 95 | 231. |
| 3019. | 36 | 179. | 3056. | 95 | 231. |
| 3021. | 38 | 159. | 3057. | 96 | 232. |
| 3022. | 38 | 135, 159. | 3058. | 96 | 273. |
| 3025. | 59 | 181. | 3059. | 96 | 275. |
| 3026. | 60 | 224. | 3060. | 97 | 276. |
| 3027. | 60 | 183. | 3061. | 97 | 232. |
| 3028. | 60 | 183. | 3063. | 97 | 279. |
| 3030. | 61 | 204, 224. | | | |

*Note.* — Dans ce Tableau nous n'avons indiqué, lorsqu'il y a plusieurs réponses à une même question qui se suivent immédiatement, que la page où se trouve la première de ces réponses consécutives.

### *Rappel de questions non résolues antérieurement et reproduites au Tome XIII* (1906) *ou rectifications.*

| Questions posées. Tome III (1896). | Pages. | Réimpression. Tome XIII. Pages. | Questions posées. Tome III (1896). | Pages. | Réimpression. Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|---|---|---|
| 854. | 150 | 57. | 867. | 173 | 83. |
| 855. | 150 | 57. | 876. | 175 | 84. |
| 856. | 151 | 57. | 877. | 175 | 85. |
| 858. | 152 | 81. | 887. | 177 | 85. |
| 860. | 152 | 82. | 894. | 197 | 85. |
| 864. | 154 | 83. | 897. | 198 | 86. |
| 866. | 154 | 83. | 901. | 199 | 86. |

| Questions posées. Tome III (1896). | Pages. | Réimpression. Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|
| 902. | 200 | 86. |
| 906. | 201 | 137. |
| 910. | 202 | 137. |
| 911. | 221 | 137. |
| 915. | 223 | 138. |

| Questions posées. Tome III (1896). | Pages. | Réimpression Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|
| 920. | 245 | 139. |
| 926. | 246 | 139. |
| 927. | 246 | 139. |
| 928. | 247 | 139. |

| Tome IV (1897). | Pages. | Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|
| 952. | 1 | 161. |
| 960. | 3 | 161. |
| 964. | 4 | 161. |
| 971 | 5 | 162. |
| 973. | 6 | 162. |
| 975. | 6 | 162. |
| 992. | 30 | 162. |
| 996. | 30 | 163. |
| 1000. | 31 | 163. |
| 1001. | 31 | 163. |
| 1003. | 32 | 163. |
| 1005. | 32 | 209. |
| 1007. | 49 | 210. |
| 1012. | 50 | 210. |
| 1015. | 51 | 210. |

| Tome IV (1897). | Pages. | Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|
| 1018. | 51 | 210. |
| 1021. | 73 | 211. |
| 1022. | 73 | 211. |
| 1025. | 74 | 211. |
| 1027. | 74 | 212. |
| 1029. | 75 | 212. |
| 1032. | 75 | 212. |
| 1034. | 76 | 213. |
| 1041. | 78 | 213. |
| 1046. | 97 | 233. |
| 1055. | 99 | 233. |
| 1056. | 100 | 234. |
| 1060. | 101 | 234. |
| 1061. | 101 | 234. |

| Questions posées. Tome XII (1905). | Pages. | Réimpression. Tome XIII. Pages. |
|---|---|---|
| 2932. | 146 | 87. |

A l'exemple déjà suivi dans plusieurs journaux mathématiques, la Rédaction continue à reproduire les énoncés de questions demeurées sans réponse depuis la fondation de l'*Intermédiaire*.

# TABLE DES QUESTIONS

CLASSÉES SUIVANT LES DIVISIONS DE L'INDEX DU RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

La Table qui suit fait connaître le sujet général des différentes questions proposées.

Les nombres de cette Table sont les *numéros* des questions auxquelles se rapporte la division de l'Index du Répertoire.

La lettre Σ désigne les sujets de recherches ou d'études pour lesquels une subdivision spéciale a été adoptée dans l'*Intermédiaire* (*voir* t. II, 1895, p. 177).

# TABLE PAR NOMS D'AUTEURS.

Les noms inscrits sont exclusivement ceux des auteurs de questions ou de réponses.

L'*italique* désigne les pseudonymes.

Les chiffres ordinaires indiquent les numéros des pages et se rapportent aux QUESTIONS POSÉES ; avec astérisque, ils désignent le rappel des questions au moment de la publication des réponses. Les **caractères gras** sont réservés aux RÉPONSES annoncées ou publiées dans le texte ; les caractères romains désignent les pages du Supplément.

Les Tables ont été établies, cette année, par M. A. Grévy et vérifiées par M. E. Maillet.

LA RÉDACTION.

# ERRATA.

## TOME III (1896).

**Page** 276, ligne 6 en remontant, *au lieu de :* p. 501, *lire :* p. 523.

## TOME XI (1904).

**Page** 180, ligne 4, *au lieu de :* $y_2^{r_2}$, *lire :* $p_2^{r_2}$.
» 208, ligne 17, *au lieu de :* R.-S. Rouse Ball, *lire :* R.-S. Ball.
» 224, ligne 8, *après :* l'*Hydrographie*, *ajouter :* (**1904**, XV, XVII).
» 296, ligne 5, *au lieu de :* $-\dfrac{2c^2xy}{ab}$, *lire :* $+\dfrac{2c^2xy}{ab}$.
» 305, *après :* 641, *ajouter :* 642, XXI.
» 306, *après :* 2153, *ajouter :* 2168, IX, XIII.
» 308, *après :* 2751, 71, 224, *ajouter :* XV, XVII.

## TOME XII (1905).

**Page** 19, ligne 2, *au lieu de :* Prottini, *lire :* Frattini.
» » ligne 11, *au lieu de :* Cr, *lire :* C.
» » ligne 18, *au lieu de :* Cr, *lire :* C.
» 35, ligne 19, *au lieu de :* *P. R. S. E.*, t. XII, 1885, *lire :* *P. R. S. E.*, t. XII, 1883-1884.
» 62, ligne 5 en remontant, *au lieu de :* $\dfrac{(x^2+y^2)^2}{ax}$, *lire :* $\left(\dfrac{x^2+y^2}{ax}\right)^2$.
» 80, ligne 14, *après :* on a, *ajouter :* quand $m+n+p$ est pair.
» 178, ligne 1, *au lieu de :* t. II, *lire :* t. I.
» » ligne 4, *au lieu de :* C. Lazzeri, *lire :* G. Frattini.
» » ligne 10, *au lieu de :* t. III, *lire :* t. II.
» 179, ligne 20, *au lieu de :* Omschenetzky, *lire :* Imschenetzky.
» 203, ligne 21, *au lieu de :* théorie, *lire :* méthode.
» 264, ligne 5, *au lieu de :* $a^{z}$, *lire :* $a^{2}$.
» 275, ligne 16, *au lieu de :* 1905, *lire :* 1904.
» 284, ligne 15, *avant :* $> 0$, *mettre :* rationnel.

TOME XIII (1906).

Page 36, ligne 14, *au lieu de :* $\sigma + i$, *lire :* $\sigma + it$.
» 85, ligne 9, *au lieu de* : podaires, *lire :* polaires.
» 89, ligne 7, *au lieu de :* $ax$, *lire :* $ax^2$.
» » ligne 8, *avant :* résolution, *mettre :* à la.
» 93, ligne 6 en remontant, *au lieu de :* 3048, *lire :* 3048 *bis*.
» 96, dernière ligne, *ajouter* le facteur $a$ aux deux derniers termes de l'équation.
» 153, au numérateur de $x^2$, *ajouter* le facteur $\sin^2(\alpha - A)$.
» » » $y^2$, » » $\sin^2(\beta - B)$.
» » » $z^2$. » » $\sin^2(\gamma - C)$.
» 165, ligne 1, *au lieu de :* 289, *lire :* 269.
» 222, équation (11), *au lieu de :* $-a^2$, *lire :* $-c^2$, et *mettre* dans le radical le terme $-4\Delta(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$.

Nous remercions ceux de nos Correspondants qui ont bien voulu nous signaler des *errata*.

LA RÉDACTION.

FIN DU TOME TREIZIÈME.

37800 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

L'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS.

N° 2. *SUPPLÉMENT.* SEPTEMBRE 1906.

## BIBLIOGRAPHIE.

**LES MATHÉMATIQUES ET LA MÉDECINE; par le Dr *G.-H. Niewenglowski,* chargé du service médical du P. C. N. à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — Paris, H. Desforges, 1906. Prix : 2fr.**

Dans cette intéressante et curieuse Etude, l'auteur se pose cette question : Peut-on appliquer les Mathématiques aux sciences biologiques? Il indique une série d'exemples où cela est possible : action des diastases, action des antitoxines sur les toxines, déformation élastique et électrisation du muscle, thermodynamique du muscle, mouvement et déformation des leucocytes, etc.; il cite des études mathématiques de MM. d'Arsonval, Gariel, A. Broca, J. Deschamps, V. Henri, M. Petrovitch, etc.

La conclusion de l'auteur c'est que les usages des Mathématiques dans les sciences biologiques sont encore peu développés; mais, en présence des progrès de la Physique biologique et de ses applications thérapeutiques, il considère, avec M. Appell, comme très utile de renforcer l'instruction mathématique des étudiants en médecine.

E. M.

**TABLEAUX LOGARITHMIQUES A ET B, équivalant à des Tables de logarithmes à 6 et à 9 décimales, avec notice explicative donnant la théorie et le mode d'emploi des Tableaux; par le Dr *A. Guillemin,* ancien élève de l'Ecole Normale, professeur de Physique à l'École de Médecine d'Alger. — 1 vol. in-8°. Paris, Félix Alcan. Prix : 4fr.**

Le premier intérêt, intérêt matériel mais incontestable, qu'offre ce travail du Dr Guillemin, est la faible dimension et la clarté pré-

cise des Tableaux dans lesquels, grâce à une ingénieuse disposition, il a fait entrer tous les éléments de calcul des Tables de 6 et de 9 décimales: éléments qui, jusqu'à présent, faisaient l'objet d'études volumineuses et compliquées.

Le second point important de ce petit livre est que son emploi n'entraîne pas aux longues opérations de calcul nécessitées par les Tables ordinaires (¹); on n'a plus besoin, pour compléter les éléments de logarithmes destinés à être additionnés, de se livrer à des multiplications sur leurs différences tabulaires. Les interpolations de nouveaux termes entre deux consécutifs de Tables se réduisent à des additions. Il suffit en effet de donner la première triade de la partie décimale d'un logarithme pour permettre, à l'aide de simples additions, de déterminer non seulement la triade suivante, mais encore toutes celles que l'on peut désirer.

Plus de clarté, moins de travail matériel, moins de causes d'erreurs, tels sont les avantages que présentent ces nouveaux Tableaux logarithmiques que tous ceux qui s'occupent de sciences mathématiques auront intérêt à posséder.

---

NOTICES SUR PAUL TANNERY (janvier 1906, p. IV).

On trouvera encore des Notices sur la vie et les travaux de Paul Tannery : 1° dans *Mathesis,* juin 1905, par M. H. Bosmans; 2° dans la *Revue de Philosophie,* 1905, par M. P. Duhem.

E. M.

---

LEÇONS D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE, à l'usage des élèves des classes de Mathématiques spéciales; par M. *J. Tannery.* — 2 vol. gr. in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1906. Prix : 12fr chaque volume.

La réforme des programmes de la classe de Mathématiques spéciales n'a pas été une simple modification de quelques paragraphes; les Instructions qui l'accompagnent insistent sur le caractère que doit avoir l'enseignement des Mathématiques. L'Ouvrage que publie M. Tannery ne pouvait manquer d'être accueilli avec intérêt par

(¹) Bien entendu, ceci s'applique aux calculs exigeant une exactitude assez grande, et non à ceux où l'interpolation à vue et l'usage de Tables très réduites suffisent.

tous ceux qui doivent donner cet enseignement; on sait la part qu'a prise l'auteur à la rédaction de ces nouveaux programmes, l'attention qu'il a toujours apportée à suivre l'évolution des cours de Mathématiques; d'autre part, l'expérience que lui ont donnée vingt années d'examens était un sûr garant que tous tireraient profit de la lecture de ces LEÇONS, qui ne ressemblent en rien à ce qui a été publié jusqu'ici.

Entrer dans le détail n'apprendrait rien au lecteur; ce que nous voudrions signaler, c'est le soin avec lequel M. Tannery a préparé l'élève à aborder les théories un peu délicates, la multiplicité des exemples numériques, traités et discutés complètement; faisant ainsi disparaître le vague qui se cache dans les formules trop générales.

Certes, à en juger par les dimensions, plus d'un élève sera effrayé de ce qu'il a à apprendre, plus d'un professeur se demandera comment, avec le peu de temps dont il dispose, il lui sera possible d'enseigner tout cela à ses élèves. Ces craintes disparaissent si cet Ouvrage est considéré comme un livre servant à illustrer le cours, à le compléter et à éclairer certains points obscurs.

Rien ne saurait être plus profitable à l'étudiant que de revoir son cours, réduit par la force des choses à un squelette, dans les LEÇONS de M. Tannery. Il y trouvera tout ce qui peut préciser les théories abstraites de l'Algèbre; il y apprendra ce qu'est une formule, quelle confiance il faut avoir dans un résultat numérique; il n'aura plus le fétichisme des symboles généraux et saura discerner ce qu'ils cachent de réel. A. G.

---

ŒUVRES DE CHARLES HERMITE, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences; par *E. Picard*, Membre de l'Institut. — Tome I, 1 vol. gr. in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1905. Prix : 18fr.

La publication des Œuvres d'Hermite comprendra trois volumes, dont le premier a paru; il est précédé d'une préface de M. Picard; nous ne saurions mieux faire que d'en détacher le passage suivant :

« ... L'œuvre d'Hermite se trouve dispersée dans un grand nombre de journaux scientifiques français et étrangers; elle grandira encore quand elle se trouvera rassemblée et qu'on pourra ainsi mieux juger de sa belle unité. A peu d'exceptions près, les Mémoires sont courts. La marche générale des idées y est toujours mise avec évidence; mais, surtout dans la première partie de la carrière d'Her-

mite, la rédaction se présente sous une forme synthétique, et le soin d'établir de nombreuses propositions intermédiaires, dont l'énoncé seul est indiqué, est laissé à la charge du lecteur. Quel fructueux exercice que la lecture d'un de ces Mémoires fondamentaux pour l'étudiant bien doué qui cherche à en rétablir tous les détails. »

Nul doute que cette publication ne reçoive du monde savant un accueil empressé. A. G.

---

**Tables des Intérêts composés, Annuités et Amortissements pour des taux variant de dixièmes en dixièmes et des époques variant de 100 à 400 suivant les taux; par *A. Arnaudeau*, Membre agrégé de l'Institut des Actuaires français. — 1 vol. in-4 (28 × 23), de xi-[15]-125 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1906. Prix : 10fr.**

Les nouvelles Tables d'intérêt composé calculées par M. Arnaudeau fournissent, pour 65 taux d'intérêt différents, les données suivantes : la valeur de 1fr placé à intérêts composés après un certain nombre d'années ou de mois; la valeur actuelle de 1fr payable après un certain nombre d'années; la valeur actuelle d'un certain nombre d'annuités de 1fr payables à la fin de chaque année; l'annuité par laquelle on peut amortir un capital de 1fr au bout d'un certain nombre d'années.

Ces Tables sont donc de nature à rendre les mêmes services que les Tables existantes; mais elles présentent, en outre, une particularité sur laquelle nous désirons appeler l'attention à cause de son importance pratique. L'auteur, au lieu de conserver la graduation traditionnelle des taux d'intérêt par $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{16}$ pour 100 (suivant le caractère plus ou moins usuel des taux considérés), a adopté un intervalle uniforme de $\frac{1}{10}$ pour 100 pour toute l'échelle des taux. Le taux le plus bas des Tables étant 0,5 pour 100, les suivants sont 0,6, 0,7 et ainsi de suite, sans aucune lacune, jusqu'au taux le plus élevé, 6,4 pour 100. Il résulte de cette uniformité dans les intervalles que l'interpolation, c'est-à-dire la détermination d'un résultat correspondant à un taux non mentionné dans les Tables, se trouve grandement facilitée et qu'on peut appliquer à cet effet la formule de Newton, en utilisant un ordre de différences en rapport avec l'approximation que l'on désire obtenir.

# L'INTERMÉDIAIRE

DES

# MATHÉMATICIENS.

PRIX DE L'ABONNEMENT ANNUEL (12 NUMÉROS) :

Paris.................... 7 fr. | Dép. et Union postale... 8 fr. 50

Les douze numéros forment chaque année un Volume de 300 pages au moins.

# L'INTERMÉDIAIRE
DES
# MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET É. LEMOINE,

DIRIGÉ PAR

**C.-A. LAISANT,**
Docteur ès Sciences,
*Examinateur à l'École Polytechnique.*

**Émile LEMOINE,**
Ingénieur civil,
Ancien Élève de l'École Polytechnique,

**Ed. MAILLET,**
Docteur ès Sciences,
Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

**A. GRÉVY,**
Docteur ès Sciences,
Ancien Élève de l'École Normale supérieur
Professeur au Lycée Saint-Louis.

---

Publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique.

---

## TOME XIV. – 1907.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
55, Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

Tous droits réservés.

# L'INTERMÉDIAIRE

DES

# MATHÉMATICIENS.



## QUESTIONS [1].

**1062.** (**1897**, 102) [**A4a**] M. Eugène Netto a posé, dans sa *Théorie des substitutions*, la question suivante : Soit $f(x)=0$ une équation dont deux racines $x_1$ et $x'_1$ sont liées par la relation rationnelle $x'_1=\theta x_1\,(\theta^{m-1}x=x)$. Chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux racines de l'équation dont les racines sont les valeurs distinctes de la fonction

$$\varphi_1=x_1+\theta x_1+\ldots+\theta^{m-1}x_1$$

soient liées de même par une relation rationnelle, et que l'équation, qu'on déduit de même que cette dernière, jouisse des mêmes propriétés, etc. Cette question a-t-elle été résolue dans toute sa généralité? *Ignazio Ludovisi.*

**1065.** (**1897**, 102) [**I3b**] Existe-t-il quelque rapport entre la plus petite valeur de $n$, dans les questions **1063** et **1064**, et le *gaussien* ou exposant auquel appartient un nombre donné par rapport à $p$ ou à N ?

GRACIANO RICALDE (Merida).

---

(1) Pour gagner de la place, nous supprimons cette année, comme nous l'avons déjà fait en 1896, 1903 et 1905, la Liste des abréviations conventionnelles. Nos collaborateurs pourront la consulter dans les Tomes précédents ou dans l'*Index du Répertoire de bibliographie des Sciences mathématiques* (Paris, Gauthier-Villars). Ils pourront également se reporter aux observations indiquées en tête du Tome XI (1904), observations que nous ne reproduisons pas ici. LA RÉD.

**1066.** (**1897**, 121) **[V8]** Le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes est indiqué dans son *Calcul différentiel* de 1755, t. I, § **225**. Or, je trouve dans de vieilles notes la remarque que le théorème nommé serait déjà énoncé dans la *Mécanique* d'Euler de 1736. Quoique je croie cette notice dénuée de fondement, ayant parcouru la *Mécanique*, sans y trouver ce que je cherchais, je voudrais pourtant demander si un confrère connaît un endroit antérieur à celui du *Calcul différentiel* comme source du théorème

$$\mu F = x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial F}{\partial x_n},$$

F étant fonction homogène de la dimension $\mu$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. M. Cantor (Heidelberg).

---

**3134** [Σ] (**1903**, 7, 39; **1904**, 1, 113, 260; **1905**, 6; **1906**, 1, 188).

## PRIX ACADÉMIQUES.

### Académie royale de Belgique.

*Sujet de prix pour* 1909.

Le *prix Lagrange* (1200fr) sera décerné, en 1909, au meilleur travail mathématique ou expérimental sur la Terre (faisant avancer la connaissance mathématique de la Terre).

La limite pour l'envoi des travaux est fixée au 31 décembre 1908.

### Académie des Sciences de Paris.

Comme dans la question **2991** (**1906**, 2), et de plus :

*Prix Bordin*, pour 1909 (3000fr). — L'invariant absolu qui représente le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce d'une surface algébrique dépend d'un invariant relatif $\rho$, qui joue un rôle important dans la théorie des intégrales de différentielles totales de troisième espèce et dans celle des courbes algébriques tracées sur la surface. On pro-

pose de faire une étude approfondie de cet invariant, et de chercher notamment comment on pourrait trouver sa valeur exacte, au moins pour des catégories étendues de surfaces [1].

*Prix Binoux,* pour 1908 (2000fr). — Travaux sur la Géographie ou la Navigation.

*Prix Binoux,* pour 1909 (2000fr). — Travaux sur l'Histoire des Sciences.

Il y a quelques autres prix intéressant les mathématiciens, mais comportant un programme moins précis (voir *C. R.*, t. CXLIII, 17 décembre 1906). LA RÉDACTION.

3135. **[Q1d]** Étant donnée la *pseudo-courbe* représentée par l'équation

$$\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy = 0,$$

on peut s'assurer que la formule générale établie par nous, à l'instar de celle de Taylor (*I. M.*, 1904, p. 204), se réduit, pour elle, à

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,dx^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx\,dy + \frac{\partial\psi}{dy^2}\,dy^2 + R_3 = 0.$$

Il s'ensuit que tout point singulier d'un tel lieu, satisfaisant, par définition, aux équations $\varphi = 0$, $\varphi = 0$ (et ayant, de ce fait, remarquons-le, ses *deux* coordonnées *mesurables*) ne peut être un point *isolé* que si l'on a, à son endroit,

$$\frac{\partial\varphi}{dx}\,\frac{d\psi}{dy} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 > 0.$$

Comme, d'autre part, cette condition doit être remplacée par la suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} > 0,$$

---

[1] Lire E. PICARD et G. SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* Paris, Gauthier-Villars.

Chaque concours est maintenant clos le 1er janvier de l'année du concours.

lorsqu'il s'agit d'un point isolé appartenant à la courbe *ordinaire* $f(x, y) = 0$ (*voir* SERRET I, p. 275), n'y a-t-il pas lieu, dès lors, d'étendre au premier cas la théorie *classique* du second ?

ISSALY.

**3136.** [**Q1d**] En admettant que, dans l'expression suivante :

$$V = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

$x, y, z$ désignent les coordonnées d'un point quelconque M de la *pseudo-surface*

$$dz = \mathfrak{p}\,dx + \mathfrak{q}\,dy,$$

on reconnait d'abord immédiatement que, pour que la distance du point fixe $P(a, b, c)$ au point M soit maximum ou minimum, il est *nécessaire* que P appartienne à la normale du lieu élevée en ce dernier point, savoir

$$\frac{X-x}{\mathfrak{p}} = \frac{Y-y}{\mathfrak{q}} = \frac{Z-z}{-1}.$$

La condition n'est toutefois suffisante que si l'on a, en sus :

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}\right)^2 > 0,$$

ce qui, en posant, pour abréger,

$$\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} = \mathfrak{r}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial x} = \mathfrak{s}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y} = \mathfrak{s}_1, \qquad \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial y} = \mathfrak{t},$$

revient à

$$(1') \left\{ \begin{array}{l} \left[\mathfrak{r}\mathfrak{t} - \frac{1}{4}(\mathfrak{s}+\mathfrak{s}_1)^2\right](z-c)^2 + [\mathfrak{r}(1+\mathfrak{q}^2) - \mathfrak{p}\mathfrak{q}(\mathfrak{s}+\mathfrak{s}_1) \\ \qquad + \mathfrak{t}(1+\mathfrak{p}^2)](z-c) + (1+\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2) > 0. \end{array} \right.$$

Lorsque $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1$ et, par suite, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$, on retombe sur le résultat bien connu concernant la distance maximum ou

minimum de P à la *surface* $z = f(x, y)$ (*voir* SERRET, t. II, p. 230 et 478).

Cela étant, voici notre question :

Les faits analytiques qui précèdent ne pourraient-ils servir à généraliser, notamment, la théorie du *potentiel newtonien?* ISSALY.

3137. [I] Où pourrais-je trouver des renseignements sur la résolution en nombres entiers ou simplement commensurables de l'équation

$$Ax + By + C = 0,$$

où A, B, C sont incommensurables?

Et, d'une façon générale, sur les points de coordonnées commensurables d'une courbe plane ou gauche, ainsi que d'une surface quelconque, et, en particulier, d'un plan?

L. BICKART.

3138. [V4a] Au Livre V de la *Mécanique céleste* (p. 417 de l'édition royale) Laplace mentionne l'invention des logarithmes, dans les termes suivants : « la découverte « des logarithmes, due à Neper, artifice admirable ajouté à « l'ingénieux algorithme des Indiens. »

Je présume que cet ingénieux algorithme des Indiens est aujourd'hui connu sous un autre nom et je désirerais savoir en quoi il consiste. *Altschuler*.

3139. [L²12b] Plusieurs communications ont été faites à l'*Intermédiaire* sur l'évaluation approchée de l'aire de l'ellipsoïde et de l'arc d'une conique ; l'évaluation approchée de l'arc de géodésique d'un ellipsoïde de révolution, à l'aide de la trigonométrie sphérique, me paraît aussi intéressante. Menons les cercles osculateurs aux sommets A et B d'une ellipse, et soit CD la plus courte distance de ces deux cercles ; le point E intersection des parallèles aux axes OA,

OB, menées par C et D, est situé sur l'ellipse. A un point de l'arc de l'ellipse BE faisons correspondre le point de l'arc BD situé sur la parallèle à OB menée par le premier; établissons une correspondance analogue entre les points de l'arc AE et de l'arc AC. Faisons tourner l'ellipse autour de OB; l'arc BE engendre une calotte ellipsoïdale dont les points correspondent à la calotte sphérique engendrée par BD. A un arc de grand cercle tracé sur la calotte sphérique correspond une courbe sur la calotte ellipsoïdale qu'on peut considérer comme géodésique. Pour l'ellipsoïde terrestre l'erreur est inférieure à une demi-minute dans les cas les plus défavorables. Mais la question reste ouverte. A. PELLET.

**3140. [O2e et O5f]** Les rayons de courbure des courbes

$$Ax^m + By^m + Cz^m = 0$$

et des surfaces

$$Ax^m + By^m + Cz^m + Dt^m = 0,$$

ainsi que le diamètre en un point, peuvent se construire, en s'appuyant sur le théorème suivant : Par un point T pris sur la tangente en M à une conique, on mène une perpendiculaire sur la polaire de ce point T, soit N sa rencontre avec la normale en M; par les points T et N, on mène des perpendiculaires sur la tangente et la normale, soit $\tau$ le point de rencontre de ces perpendiculaires; le lieu du point $\tau$ lorsque T se déplace sur la tangente en M est une droite qui passe par le centre de courbure en M, par le pôle de la normale MN, et coupe à angle droit la symétrique du diamètre de la conique qui passe en M; ce théorème a-t-il été remarqué?

A. PELLET.

**3141. [I9b]** Où trouve-t-on une table étendue de nombres premiers?

Quel est le plus grand nombre premier connu?

*Arcitenens.*

3142. [I18c] La formule d'identité

$$(a^2+b^2)^6 = [2ab(3a^4-10a^2b^2+3b^4)]^2 + [(a^2-b^2)(a^4-14a^2b^2+b^4)]^2$$

montre que *la sixième puissance d'une somme de deux carrés* est *toujours une somme de deux carrés*. Y a-t-il d'autres formules donnant une somme de deux carrés égale à une sixième puissance? E.-N. Barisien.

3143. [V] A-t-on éclairci le point d'histoire relatif à l'invention du cadran solaire?

Je pose la question parce que le rapprochement de certains passages de la Bible (Liv. II des *Rois*, Chap. XX, versets 9 à 11; Esaïe, Chap. XXXVIII, verset 8), de Pline l'Ancien (*Hist. nat.*, Liv. VI, Chap. XLVIII), de Faye (*Leçons de Cosmog.*, Paris, Hachette, 1852, p. 185) et de W.-W. Rouse Ball (*Récr. et probl. math.*, trad. Fitz-Patrick, Paris, Hermann, 1898, p. 317-319) fait apparaître des contradictions multiples.

Lemaire (Rachgia, Cochinchine).

3144. [Ub] L'ouvrage de Servois : *Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique, pour servir de supplément aux traités de cette science* (Metz et Paris, 1805) parle-t-il de questions topographiques? Si oui, où pourrait-on l'avoir et le consulter?

Lemaire (Rachgia, Cochinchine).

3145. [V] On m'obligerait en m'indiquant des ouvrages de Mathématiques élémentaires (anglais, français ou italiens) donnant l'histoire de chaque proposition et la biographie de chaque auteur.

Lemaire (Rachgia, Cochinchine).

3146. [X8] Je serais bien reconnaissant au correspon-

dant qui pourrait me dire les derniers progrès réalisés dans la construction des instruments topographiques de détail, français ou étrangers.

Je désirerais surtout savoir ce qu'on a fait depuis 5 ou 6 ans pour la légèreté et les mouvements différentiels de la planchette; pour la portée et la précision de l'alidade anallatique; pour la visibilité et le transport de la mire parlante.

LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

**3147. [L¹ 15a]** Soient deux circonférences quelconques K et K′ et un point P sur K; sur chaque droite passant par P et qui rencontre K en Q, K′ en Q′, on porte un vecteur $\overline{PS} = \overline{PQ'} - \overline{PQ}$, le point S décrit une podaire d'ellipse ou d'hyperbole (de parabole, si K′ dégénère en une droite). Cette génération cissoïdale des podaires de coniques est-elle connue et existe-il une démonstration géométrique de cette proposition?

H. WIELEITNER (Spire).

**3148. [V]** Qui a le premier introduit ou utilisé les symboles $\neq$, $\not>$, $\not<$, $\sim$ pour représenter les locutions « différent de », « non plus grand », « non plus petit » et « la différence entre »?

C.-A. MILLER (Urbana, Ill., U. S. A.).
[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

# RÉPONSES.

**675.** (**1895**, 386; **1904**, 234) (C. Rabut). — *Diderot et les Mathématiques.* — Il est certain que, durant une dizaine d'années, Diderot fut contraint de tirer des mathématiques ses moyens d'existence. Il avoue plaisamment qu'il donnait des leçons de Mathématiques « sans en savoir un mot, apprenant en montrant aux autres ». La vérité est qu'il aurait pu y réussir. Il enseigna les Mathématiques sans les savoir; d'Alembert les savait, mais n'a jamais voulu vendre une heure de son temps.

En 1748, Diderot publia un volume de Mémoires de Mathématiques. Je crois que ce furent ses seuls travaux mathématiques. J'ignore s'il en subsiste d'autres dans les manuscrits de l'Ermitage, parmi lesquels un Mémoire scientifique, l'*Introduction à la Chymie*, composé de 1754 à 1758, a été restitué par Ch. Henry en 1887.

Les Mémoires susmentionnés de 1748 retiendront notre attention. Parus sous le titre de *Mémoires sur différens sujets de Mathématiques* (Paris, Durand et Pissot, quay des Augustins), ils furent annoncés au numéro de juillet des *Mémoires pour l'Histoire des Sciences et des Beaux-Arts* (Trévoux), puis au numéro d'août du *Journal des Savans* et analysés au cahier de janvier 1749 dudit journal. En voici brièvement l'indication :

I. Sur les cordes vibrantes.

II. Examen de la dévelopante du cercle.

III. Sur la tension des cordes.

IV. Projet de nouvel orgue. (Le souhait qu'il exprimait est aujourd'hui complètement réalisé.)

V. Sur la résistance de l'air au mouvement du pendule.

Le rédacteur termine par cette réflexion : « M. D. (à en juger par cet essai) est fort en état de donner des solutions sçavantes sur les difficultés qui requèrent un calcul épineux et délicat. »

Dans la suite, Diderot délaissa les Mathématiques et paraît n'y avoir eu que des idées indécises.

Voici quelques opinions qu'il a formulées, rapportées dans l'Ouvrage : *Les grands écrivains français : D'Alembert,* par J. Bertrand (Paris, 1889), p. 46. L'accord dans la théorie de la Lune n'a pas été immédiat, et l'observation, en démentant d'abord le calcul, a éveillé de grandes émotions et provoqué d'ardentes discussions.

Diderot ne faisait qu'en rire et, sans rien entendre à la question, se faisait lire en la discutant. « Ce qu'il y a d'utile en Géométrie peut, disait-il, s'apprendre en six mois. Le reste est de pure curiosité.

» Il n'existe dans la nature, ajoute Diderot, ni surface sans profondeur, ni ligne sans largeur, ni points sans dimensions, ni aucun corps qui ait cette régularité hypothétique du géomètre. Dès que la question qu'on lui propose le fait sortir de ses suppositions, dès qu'il est forcé de faire entrer dans la solution d'un problème l'évaluation de quelques causes ou qualités physiques, il ne sait plus ce qu'il fait.

» Si le calcul s'applique si parfaitement à l'Astronomie, — c'est toujours Diderot qui parle, — c'est que la distance immense à laquelle nous sommes placés des corps célestes réduit leurs orbes à des lignes presque géométriques. Mais, prenez le géomètre au toupet et approchez-le de la Lune d'une cinquantaine de diamètres terrestres : alors, effrayé du balancement énorme et des terribles alternatives du globe lunaire, il trouvera qu'il y a autant de folie à lui proposer de tracer la marche de notre satellite dans le ciel que d'indiquer celle d'un vaisseau dans nos mers quand elles sont agitées par la tempête. »

Cette rhétorique fantaisiste fait songer à celle que d'autres écrivains ont employée pour exprimer une idée analogue. Il est vrai qu'ils étaient moins qualifiés que Diderot pour parler de Mathématiques. Je veux nommer Bernardin de Saint-Pierre et Chateaubriand (*voir* J.-B. Biot, *Mélanges scientifiques et littéraires,* t. II, 1858).

L'œuvre mathématique de Diderot est demeurée très limitée. Lui-même n'a pas collaboré à la partie mathématique de l'*Encyclopédie;* l'Arithmétique et la Géométrie, confiées primitivement à l'abbé de Gua de Malves, furent rédigées par l'abbé de la Chapelle; les jeux mathématiques (et jeux de sociétés) par J. Lacombe, puis les hautes Mathématiques par d'Alembert, l'abbé Bossut, Lalande, Condorcet, Charles, etc. (dans l'*Encyclopédie méthodique,* 1784-1789, 3 vol.).

Diderot avait depuis longtemps cessé toute recherche mathéma-

tique lorsque survint un dernier épisode, assez burlesque, mais probablement apocryphe et imaginé par quelque gazetier. Le voici, d'après K. Waliszewski : *Autour d'un trône. Catherine II de Russie.* Paris, Plon, 1894, p. 211 : « Nous ne savons ce qu'il faut croire du récit de Thiébaut au sujet d'une petite conspiration ourdie contre le philosophe par les gens de cour, qui l'aurait définitivement engagé à demander son congé. On l'aurait prévenu qu'un savant du pays se proposait d'entrer en discussion avec lui devant la cour assemblée pour lui prouver l'existence de Dieu. A l'heure indiquée, on fit cercle, et Diderot se vit en présence d'un personnage inconnu qui, sans autre préambule, lui dit :

» Monsieur, $\frac{a-l-b^n}{3} = x$, donc Dieu existe.

» L'anecdote est peu vraisemblable. » Toujours est-il qu'à peu de temps de là, en octobre 1774, Diderot était de retour à Paris, où il résida jusqu'à son décès, survenu le 31 juillet 1784. Il était né à Langres le 5 octobre 1713.

H. Brocard.

**1018.** (**1897**, 51; **1906**, 210) (*Rosace*). — La généralisation demandée peut être faite de la manière suivante :

Soit $\Delta$ le discriminant d'une forme quadratique à $n$ variables :

$$\begin{aligned} f = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{22}x_2^2 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2. \end{aligned}$$

Le déterminant fonctionnel, à $\frac{n(n+1)}{2}$ lignes :

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{11}^2} & \frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{11}\partial a_{12}} & \ldots & \frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{11}\partial a_{nn}} \\ \frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{12}\partial a_{11}} & \frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{12}^2} & \ldots & \frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{12}\partial a_{nn}} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{nn}\partial a_{11}} & \frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{nn}\partial a_{12}} & \ldots & \frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{nn}^2} \end{vmatrix}$$

a pour valeur :

$$H = (-1)^{n+p}(n-1)\,\Delta^p,$$

où

$$p = \frac{(n-2)(n+1)}{2}, \qquad n+p = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Cette proposition peut être établie en remarquant : 1° qu'elle a lieu dans le cas où l'on a $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, c'est-à-dire

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2;$$

et 2° que II constitue un invariant de la forme $f$.

Cette dernière propriété n'est qu'un cas particulier d'une autre plus générale, d'après laquelle, si l'on a une forme algébrique $f$ à $n$ variables et d'ordre $m$ par rapport à ces variables, et que l'on désigne par

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_N \qquad \left(N = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots m}\right)$$

les divers coefficients de cette forme, le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial b_1^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial b_1 \partial b_2} & \ldots & \frac{\partial^2 I}{\partial b_1 \partial b_N} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial^2 I}{\partial b_N \partial b_1} & \frac{\partial^2 I}{\partial b_N \partial b_2} & \ldots & \frac{\partial^2 I}{\partial b_N^2} \end{vmatrix},$$

dérivé d'un invariant quelconque I de la forme $f$, sera aussi un invariant de cette forme.

Ainsi, par exemple, le déterminant fonctionnel déduit de l'invariant

$$J = a_0a_2a_4 - a_0a_3^2 + 2a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_2^3$$

d'une forme binaire quadratique

$$a_0x_1^4 + 4a_1x_1^3x_2 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 + a_4x_2^4,$$

est aussi un invariant de cette forme, égal au produit de 8J par l'invariant $I = a_0a_4 - 2a_1a_3 + a_2^2$ de la même forme.

Cyp. Stephanos (Athènes).

1960. (1900, 357) (G. Ricalde) (1901, 204). — *Transcendance des nombres* $e^e$, $\pi^\pi$, $e^\pi$, $\pi^e$. — Dans un Mémoire intitulé : *Ueber die arithmetischen Eigenschaften der algebraischen und transzendenten Zahlen* (*D. V. M.*, t. XIV, 1905, 545-558). M. K. Hensel a de

nouveau démontré la transcendance de $e$ et $\pi$, par un procédé arithmétique qui donne au surplus la transcendance de $e^e$, $e^{e^e}$, .... Il est très vraisemblable que par un pareil procédé la transcendance des autres nombres, cités dans la question de M. G. Ricalde, pourra être démontrée.

*Voir* encore les deux travaux du même auteur : *Neue Grundlagen der Arithmetik* (*Cr.*, t. 127, 1904, p. 51-84) et *Uber eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen* (*Cr.*, t. 128, 1904, p. 1-32). H. Wieleitner (Spire).

**2948.** (**1905**, 172) (A. Grévy). — *Vie de Gaspard Monge* (**1906**, 47, 118, 202). — Additions diverses.

XII. *Voir* F.-A. Aulard, *Recueil des actes du Comité de Salut public*, t. I, 1889, etc.

Lettre de Monge, porté sur la liste des émigrés, publiée par le département des Ardennes (11 frimaire, an II, 1er décembre 1793).

Monge élu pour le Ministère de la Marine par 154 voix de l'Assemblée législative. Séance du 10 août 1792.

Rapport du ministre de la Marine sur l'état des armements de la Marine (14 août 1792).

Monge président du Conseil des ministres (17 septembre 1792).

XIII. Monge a collaboré à l'*Encyclopédie méthodique* pour les articles de Physique, avec Bertholon, Cassini, Hassenfratz (1793-1822), 4 vol.

XIV. Une Notice, de Monge, sur Meusnier, a été publiée dans la *Revue rétrospective*, t. IX, p. 77.

XV. Monge a occupé le fauteuil I de la Section de Mécanique de l'Institut (20 novembre 1795). Maintenu par l'arrêté du 28 janvier 1803 dans la Classe; exclu de l'Institut par l'ordonnance royale du 21 mars 1816. C'est Cauchy qui lui a succédé

Pour une appréciation de cette exclusion, *voir* J.-B. Biot, *Mélanges scientifiques et littéraires*, t. III, 1858, p. 147.

XVI. Autres manuscrits de G. Monge.

Archives nationales. — 24 (AA. 38). Mémoires transmis à la Convention par le citoyen Monge, ministre de la Marine, sur les dangers de l'immoralité des bagnes (19 décembre 1792).

Papier. 18 feuillets. Broché.

Bibliothèque de Tours. — N° 1724. Recueil de copies, de documents, lettres, rapports et mémoires signés de G. Monge (et d'autres), concernant la vie du général Meusnier.

Archives du département des Affaires étrangères. — Dossier 1538 (P. F., Corse, 121). Société des amis du peuple. — Dossier 1965 (France). Lettre de Monge à l'administrateur de l'armée d'Italie (an V).

XVII. Un problème dit de Monge. — *Voir* A. de Saint-Germain, *Étude sur le problème des déblais et des remblais* (*Mém. de l'Acad. de Caen,* 1886, p. 23-84; 3 pl.).

Le problème de Monge n'est pas une question de travaux techniques; c'est pour simplifier le langage que l'auteur y a proposé les noms de déblais et de remblais.

*Voir* aussi P. Appell, *Mémoires sur les déblais et les remblais des systèmes continus ou discontinus* (Mémoire couronné) (*Mém. des savants étrangers,* 2e série, t. XXIX, 1887, 208 pages).

La question des déblais et des remblais a été étudiée par Monge (*Mém. de l'Acad. des Sc.,* 1781) et par Dupin (*Applic. de Géom. et de Méc.*).

L'auteur reprend et complète à divers titres plusieurs questions traitées par ses illustres devanciers.

XVIII. Parmi diverses pièces imprimées, dues à Monge, déposées à la Bibliothèque nationale, et inscrites au Catalogue de l'Histoire de France, voir :

Lettre à la Convention (11 mars 1793).

Discours au divan général d'Égypte (brumaire an VII) (en arabe).

Discours prononcé aux obsèques du sénateur Petiet (27 mai 1806).

Réponse à Laurent Lecointre (25 janvier 1793).

A la Société des amis de la liberté et de l'égalité de La Rochelle (31 décembre 1792).

Circulaire aux matelots, canonniers et soldats de la marine française (15 février 1793).

Culture des chanvres.

Sur la fabrication de l'acier.

XIX. Le nom de Monge s'est rencontré sous la plume de Sainte-Beuve (*Nouveaux lundis*), mais d'une façon sommaire qui ne paraît pas devoir retenir l'attention.

XX. Pour un souvenir du passage de Monge à l'École de Mézières,

*voir* Cochard, *Restitution de la méridienne et de la courbe du temps moyen tracées par Monge sur le mur de l'École du Génie de Mézières, aujourd'hui la Préfecture des Ardennes* (*C. R.*, t. CIX, 1889, p. 134). H. Brocard.

**2971.** (**1905**, 265) (E.-N. Barisien). — *Distance de deux points en coordonnées normales.* (**1906**, 74, 152, 253). La réponse se trouve dans mon livre : *Vorlesungen über die Vektorenrechnung*, Leipzig, 1905, Teubner, p. 50, 51. E. Jahnke.

**2974.** (**1905**, 266) (G. Lemaire). — *Problème de la carte* (**1906**, 122, 219). — Le problème de la carte est de Pothenot, qui l'a publié dans les Mémoires de l'Académie en 1692. Les Anglais réclament la priorité pour John Collins, dont la solution se trouve dans les *Transactions philosophiques* de 1671, mais le problème avait déjà été traité par Snellius dans son *Eratosthenes Batavus*, publié en 1624 (1617, indic. de Max Simon); puis il a été traité par Chr. L. Gesling en 1840 à Marburg; Gottfr. Wagenn a écrit une dissertation sur le problème de Pothenot, à Göttingue. Il y a aussi une solution par van Swinden dans les *Éléments de Géométrie* traduits par Jacobi (1894). Gauss et Bretschneider se sont occupés du même problème et Schlömilch l'a envisagé au point de vue algébrique dans son Journal, 1864, p. 433. Bauernfeind imagina un appareil pour résoudre mécaniquement cette question (*Grun.*, 1872, p. 81; encore D. Fellini, *Torino atti*, 1897, p. 320; V. Laska, *Pragsr. Ber.*, 1898).

Enfin, au point de vue de l'arpentage, *voir* Winkler v. Brückenbrand, *Systematische Abhandlungen über die Pothenotsche Aufgabe.* Toutes ces indications bibliographiques ont été tirées de Max Simon; *Ueber die Entwicklung der Elementar Geometrie im XIX. Jahrhundert.* N. Plakhowo.

**2999.** (**1906**, 7) (Nazarewsky). — (**1906**, 130). — Pour l'étude annoncée de M. A. Gérardin, *voir N. A.*, 1906, p. 222-226; *M.*, 1906, p. 218-220.

Dans le même ordre d'idées, *voir* aussi J. Liouville : Sur l'équation $1.2.3\ldots(p-1)+1=p^m$ (*J. M.*, 1856, p. 351-352).

H. Brocard.

**3062.** (**1906**, 97) (*Nester*). — *Antipodaire de la développée d'une parabole.* — En posant dans les formules de Cayley (Salmon, *C. planes*, p. 134 de la traduction française)

$$m = n = 3, \quad g = g' = 2, \quad p = 1, \quad f = f'_1 = q = 0,$$

on obtient

$$M = N = 4, \quad F = 0, \quad F' = 2, \quad G' = 1, \quad \ldots;$$

donc l'antipodaire en question est une courbe *du quatrième ordre et de la quatrième classe, non circulaire, passant (une fois) par l'origine, etc.*

On trouve d'ailleurs aisément l'équation de cette antipodaire. Les équations paramétriques de la développée de parabole étant $x = t^2$, $y = t^3$, et celle de la perpendiculaire à l'extrémité $(\alpha, \beta)$ du vecteur mené par le rebroussement (origine) $\alpha x + \beta y = \alpha^2 + \beta^2$, il s'agit de trouver l'enveloppe de la droite

$$t^4 + t^2 - ty - x = 0.$$

On obtient l'équation ponctuelle de cette enveloppe, qui est évidemment de la quatrième classe, en égalant à zéro le discriminant du premier membre, considéré comme fonction de $t$, et, comme le discriminant de

$$at^4 + 6ct^2 + 4dt + e = 0$$

est

$$a^3e^3 + 81ac^4e - 18a^2c^2e^2 - 27a^2d^4 + 54a^2cd^2e - 54ac^3d^2,$$

ou bien, sous la forme que lui ont donnée Boole-Cayley,

$$(ae + 3c^2)^3 - 27(ace - ad^2 - c^3)^2,$$

on trouve l'équation de la courbe en question sous les deux formes suivantes :

$$y^2(27y^2 + 144x + 4) + 16x(4x + 1)^2 = 0,$$
$$(27y^2 + 72x + 2)^2 + 4(12x - 1)^3 = 0.$$

Comme la courbe est du quatrième ordre et de la quatrième classe, elle doit posséder un point double ordinaire et deux rebroussements de la première espèce : l'avant-dernière équation donne sur-le-champ les coordonnées $x = -\frac{1}{4}$, $y = 0$ du point double (isolé); la dernière

met en évidence les deux rebroussements (imaginaires conjugués) qui, étant les intersections de la parabole $27y^2 + 72x + 2 = 0$ avec la droite $12x - 1 = 0$, ont pour coordonnées $x = \frac{1}{12}$, $y = \pm i\sqrt{\frac{8}{27}}$. Les deux tangentes cuspidales vont se couper au pôle $\left(-\frac{5}{36}, 0\right)$ de la droite par rapport à la parabole. Les tangentes au point double sont $y = \pm i\sqrt{2}$, ....

V. Retati (Milan).

L'antipodaire d'une courbe d'ordre $m$ est de classe $2m - f - g - h$ ($f$, $g$, $h$ étant respectivement les ordres de multiplicité du pôle fixe et des points cycliques, pour toute courbe réelle on a nécessairement $g = h$) : elle admet la droite à l'infini comme tangente d'ordre $m$ et les droites issues du pôle fixe comme tangentes d'ordre $m - f - g$, et $m - f - h$ respectivement.

Dans le cas d'espèce on a $n = 4$, et la seule singularité tangentielle de l'antipodaire est la tangente triple à l'infini dont les points de contact coïncident, ce qui fait qu'elle équivaut à une tangente double ordinaire et à deux tangentes inflexionnelles : donc, par une formule de Plücker, on trouve pour le degré

$$4.3 - 2.1 - 3.2 = 4.$$

Le calcul conduit à la même conclusion, car l'équation de la développée de parabole, rapportée à son point de rebroussement comme origine et à sa tangente de rebroussement comme axe, est de la forme

$$x^3 = ay^2,$$

c'est-à-dire, en coordonnées polaires,

$$\rho = a\frac{\sin^2\omega}{\cos^3\omega};$$

l'équation de la tangente à l'antipodaire est donc

$$x\cos^4\omega + y\sin\omega\cos^3\omega = a\sin^2\omega = a\sin^2\omega(\cos^2\omega + \sin^2\omega),$$

ou bien, en prenant pour variable paramétrique $\theta = \operatorname{tang}\omega$,

$$x + \theta y = a\theta^2(1 + \theta^2).$$

Par différentiation, on en tire d'abord

$$y = 2a\theta(1 + 2\theta^2),$$

puis, tout aussitôt,

$$-x = a\theta^2(1+3\theta^2);$$

il s'agit donc d'une unicursale du quatrième ordre comme de la quatrième classe. E. **Malo.**

Autre réponse de M. **Brocard.**

3065. (**1906**, 140) (G. Lemaire). — *Sur le constructeur Le Maire.* — I. C'est certainement de Le Maire, opticien parisien, qu'il est fait mention dans le fragment que voici, faisant partie des Manuscrits de Besançon. Recueil 603. Papiers de Louis de Puget, physicien lyonnais (1629-1709).

Extrait d'une Note intitulée : *Déboursés pour Monsieur de la Valette :*

Pour auoir fait dérouiller toutes les montures de fer de ses aimans, tous les portans, et autres instruments a faire des expériences.

Auoir fait raccomoder la monture de la pierre armée.

Auoir fait six petites boules d'acier.

Auoir fait la machine de cuivre propre a suspendre tous les aimans et les balances, et y avoir adjouté des écrous payé à Mr Lemaire cy : 21# 12s.

Ce décompte, non daté, n'est pas de l'écriture de Puget, mais son attribution à des travaux exécutés par Le Maire me paraît absolument fondée.

II. C'est lui aussi qui a inventé une méthode d'aimantation qui a permis de construire des aimants artificiels d'une grande force portative.

Consulter à ce sujet : *Hist. et Mém. de l'Ac. des Sc.* pour 1745, *Hist.*, p. 1-4, et *Mém.*, p. 181-193 : relation d'expériences faites sur la demande de M. du Hamel.

On en trouve un résumé au *Dictionnaire de Physique* du P. Paulian (Avignon, 1761), au *Dictionnaire raisonné de Physique* de J. Brisson (Paris, an VIII), t. I, p. 115-116, et aux *Mém. de la Soc. des let., sc. et arts de Bar-le-Duc* pour 1894 (t. IV, 1895. W. Konarski. Notice sur Louis Joblot, p. 307-310). Ce dernier article rappelle que Le Maire avait, dès 1740, construit un aimant artificiel sur les indications de l'abbé Nollet.

III. On voit au *Journal des Savans* d'avril 1743 que Le Maire

venait de mettre en vente un calendrier perpétuel, gravé avec le Privilège du Roi, au prix de 3 livres, sans bordure.

IV. L'*Hist. de l'Ac. des Sc.* pour 1747 cite encore Le Maire au sujet de son nouveau compas de variation.

V. Je n'ai rencontré aucune biographie de Le Maire, mais aux manuscrits de la Bibliothèque nationale [*Anc. petits fonds français,* Papiers de l'abbé Jean-Paul Bignon, bibliothécaire du roi, membre de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres et des Sciences (1718-1741)], on trouvera des papiers de Le Maire, « ingénieur pour les instruments de Mathématiques », notamment les Mémoires, sans doute inédits, 22230, f$^{os}$ 332-348 :

« Au sujet d'une nouvelle découverte sur l'optique » et « Sur une nouvelle construction d'éguille aimantée, à trois cercles ».

L'objet de ce dernier Mémoire est précisé par une autre référence. *Voir,* en effet, *Arsenal,* Ms. 6130 :

« Pages 1-11 : Extrait d'un Mémoire, lu dans la Société des Arts le 6 juillet 1732, au sujet d'une nouvelle construction d'éguille aimantée à 3 cercles, qui se trouve sans déclinaison ni inclinaison, inventée par Jacques Le Maire, ingénieur pour les instrumens de Mathématiques, présentée à M. le comte de Maurepas, le 15 may 1734, par le s$^{r}$ Le Maire, de la Société des Arts.

» Pages 12-15 : Explication d'un support qui sert à faire voir diverses expériences de l'aimant, par Pierre Le Maire ».

*Note.* — Les expériences de 1740 et 1745, ci-dessus rapportées, donnent à penser que Pierre pouvait être aussi un des prénoms de Jacques Le Maire. H. Brocard.

3067. (**1906**, 140) (G. Lemaire). — *Sur la découverte des lois de la réfraction.* — Toutes les notices biographiques sont d'accord pour attribuer à Snellius la priorité de la loi de la réfraction, au témoignage de Huygens et de Vossius. Voir *Correspondance de Descartes,* t. I, p. 236, édit. C. Adam et P. Tannery. Lettre de Descartes à Golius, de janvier 1632. Extrait des *Remarques* de Leibniz sur l'abrégé de la vie de M$^{r}$ des Cartes (1692) (édit. Gerhardt, t. IV, 1880, p. 318); D.-J. Korteweg : Descartes et Snellius, d'après quelques documents nouveaux (*Revue de Métaphysique et de Morale,* juillet 1896, p. 489-502). — P. Kramer : *Descartes*

*und das Brechunggesetz des Lichtes* (*Abh. zur Gesch. der Math.*, t. IV, 1882, p. 273).

Vossius a affirmé que Snellius avait trouvé la loi en 1621, mais ce ne serait, dit M. Violle (*Cours de Physique*, t. II, 1892, p. 388), qu'en 1632 que le professeur Hortensius l'aurait divulguée. Cependant, Descartes était en possession de la loi déjà en 1627, 10 ans avant la publication de sa Dioptrique. H. Brocard.

*Découverte des lois de la réfraction par Willebrord Snellius.* — Je crois que cette assertion est fondée. Si mes souvenirs sont exacts, les mathématiciens hollandais du XIXe siècle ont revendiqué cette découverte eu faveur de Snellius. Toutefois Descartes ne doit pas avoir eu connaissance des travaux de Snellius sur cette matière et les lois de la réfraction continueront à s'appeler *lois de Descartes*, de même que la théorie des nombres complexes restera l'œuvre de Gauss. Consulter :

I. Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius par P. Van Geer (*Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, t. XVIII, Haarlem, 1883, p. 453-468).

II. Bibliographie néerlandaise historico-scientifique du Dr Bierens de Haan (*Bullettino di Bibliographia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche* du prince B. Boncompagni. Rome, t. XV, p. 366).

III. Het geboorte jaar van W. Snellius door P. van Geer. Overgedrukt nit het Album der Natuur, Leiden, 1883 (Snellius est né à Leyde en 1581 et y est mort en 1626). J. Rose.

3072. (**1906**, 141) (E.-N. Barisien, H.-B. Mathieu). — *Quadrilatère maximum inscrit et circonscrit à deux cercles.* — L'aire du quadrilatère circonscrit étant le demi-produit du périmètre par $r$, celui d'aire et celui de périmètre maximum se confondent; la double question de M. Barisien ne comporte qu'une même réponse.

Soit ABCD le quadrilatère inscrit dans le cercle de centre O, de rayon R, circonscrit au cercle de centre I, de rayon $r$, $OI = d$; soient A′, B′, C′, D′ les points de contact. L'enveloppe des diagonales AC et BD est un cercle de rayon nul, de centre K, tel que

$$OK = \frac{4R^2r^2d}{(R^2-r^2)^2}$$

(*voir* Poncelet, *Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. I, p. 343). Le point fixe K de OI est le pôle de l'axe radical des deux cercles, par rapport à chacun d'eux; cet axe radical est la troisième diagonale commune des quadrilatères ABCD complétés. Les droites A′C′, B′D′ passent aussi par ce point K (théorème connu). On constate aisément que ces droites A′C′, B′D′ qui joignent les points de contact situés sur les côtés opposés se coupent en K à *angle droit*. (Sans que cela importe à la question posée, on peut encore remarquer que ces droites sont les bissectrices des angles des diagonales). Si P et M sont les points de l'axe radical des deux cercles où les côtés opposés AB et CD, AC et BD se coupent, les droites PI et MI, perpendiculaires à A′C′ et B′D′, sont également à angle droit; cette condition est nécessaire et suffisante pour que le quadrilatère circonscrit à I et déterminé par des couples de tangentes issues de P et M soit inscriptible.

Ceci posé, soit I le centre d'un cercle de rayon $r$, rapporté à des axes rectangulaires passant ce centre; prenons un point P sur l'axe des $x$, un point M sur l'axe des $y$, de manière que la droite PM soit extérieure au cercle, menons les couples de tangentes issues de P et M, le quadrilatère convexe ainsi formé est inscriptible. Soit $\mathrm{PI} = a$, $\mathrm{MI} = b$, et $\delta$ la distance de I à la droite PM. On a

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Il est aisé de former les équations des tangentes, d'en déduire les coordonnées des sommets, de calculer les longueurs des côtés (les calculs sont un peu longs, mais les simplifications sont nombreuses). On trouve, pour le périmètre $2p$,

$$2p = \frac{8r\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{\delta^2} + \dfrac{r^4}{a^2b^2}}}{1 - \dfrac{r^2}{\delta^2}}.$$

Le minimum a lieu pour $a$ ou $b = \infty$, alors $2p = \dfrac{8r\delta}{\sqrt{\delta^2 - r^2}}$, ce qui correspond, dans la figure primitive, au cas où deux côtés du quadrilatère sont parallèles entre eux et perpendiculaires à la ligne des centres.

Le maximum a lieu pour $a = b$, alors $2p = \dfrac{4r(2\delta^2 - r^2)}{\delta^2 - r^2}$, ce qui

dans la figure primitive répond au cas où deux sommets opposés sont sur OI, cette droite étant encore axe de symétrie.

La somme des diagonales est

$$\mathrm{AC}+\mathrm{BD}=\frac{4r\sqrt{2-\frac{r^2}{\delta^2}}\sqrt{1-\frac{r^2}{\delta^2}+\frac{r^4}{a^2b^2}}}{1-\frac{r^2}{\delta^2}},$$

elle est maximum ou minimum, dans les mêmes circonstances que l'aire ou le périmètre.

Le produit des diagonales et le rapport

$$\frac{\mathrm{AC}+\mathrm{BD}}{2p},$$

qui ont respectivement pour expressions :

$$\frac{4r^2(2\delta^2-r^2)}{\delta^2-r^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\sqrt{2-\frac{r^2}{\delta^2}},$$

sont constants pour tous ces quadrilatères. A. Boutin.

Autres réponses de MM. Brocard, *Gem*, *Majol*.

3076. (1906, 142) (E.-N. Barisien). — *$a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$ divisible par $abc$, si $a+b+c=0$.* — Soient $s_{2n+1}$ la somme en question; $ab+ac+bc=p$, $abc=q$; $a$, $b$, $c$ peuvent être considérés comme les racines de l'équation

$$X^3+pX-q=0.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par $X^{2n-2}$; qu'on remplace X successivement par $a$, $b$, $c$; et qu'on ajoute les résultats obtenus, on a

$$s_{2n+1}=-ps_{2n-1}+qs_{2n-2}.$$

On constate aisément que $s_3$, $s_5$ sont divisibles par $q$; si l'on admet la proposition pour $s_{2n-1}$, comme le second terme du second membre contient $q$ en facteur, il en résulte que la proposition est vraie aussi pour $s_{2n+1}$; donc elle est générale. A. Boutin.

On a, par hypothèse,

$$a+b=-c;$$

en élevant à la puissance $2n+1$

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}+ab[(2n+1)(a^{2n-1}+b^{2n-1}) + n(2n+1)ab(a^{2n-2}+b^{2n-2})+\ldots]=-c^{2n+1},$$

d'où

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=-ab[(2n+1)(a^{2n-1}+b^{2n-1})+\ldots]$$

$a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$ est donc divisible par $ab$, $ac$ et $bc$. Si $a$, $b$ et $c$ sont premiers entre eux, $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$ sera aussi divisible par $abc$; si $a$, $b$, $c$ ont un diviseur commun $p$,

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$$

sera divisible par $p^{2n+1}>p^3$ et le théorème subsiste dans ce cas.

PEDRO M. GONZALEZ QUIJANO (Xérès).

Réponses analogues de MM. V. AUBRY, BARBARIN, BINI, GLEIZES, HAYASHI, JERROLD, LIVON, MALO, PLAKHOWO, NAZAREVSKY, RETALI, RICALDE.

3079. (**1906**, 163) (*Onponale*). — *La strophoïde droite, ou logocyclique.* — Le nom de *logocyclique* a été proposé par J. Booth (*Q. J.*, novembre 1858, n° 9, p. 38, et mai 1859, n° 10, p. 107) d'après B. Tortolini (*A. D. M.*, t. III, 1860 et *N. A.*, 1861, 2e partie, p. 82), pour rappeler à la fois les relations de la strophoïde droite avec le cercle et avec la logarithmique.

Pour plus de détails, *voir* S. GÜNTHER, *Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie,* Leipzig, 1882; et un résumé dans *Mathesis,* 1891 : H. BROCARD, *Sur une classe particulière de triangles,* p. 153-157 et Note de P. MANSION, p. 157-158.

H. BROCARD.

Réponse analogue de M. G. LORIA.

3080 (**1906**, 164) (*Nester*). — Soient, dans un triangle ABC, $m_a$, $m_b$, $m_c$ les médianes, avec

$$m_a=\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}, \quad \ldots.$$

Il s'agit d'établir la relation

$$m_b+m_c>m_a.$$

Élevant au carré, il vient

$$2m_b m_c > (b^2 + c^2 - 5a^2)^2.$$

Élevant encore au carré, on a

$$18(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) > 9(a^4 + b^4 + c^4),$$

ou

$$2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4) > 0.$$

Or, le premier membre est égal à $16S^2$, S étant l'aire du triangle; mais, du moment que S est $> 0$, le triangle existe, et par suite $a < b + c$, etc. H. Brocard.

Désignons pour plus de commodité par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les médianes du triangle S de côtés $a$, $b$, $c$ et posons

$$S = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a) = \Sigma 2b^2c^2 - a^4,$$
$$\Sigma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\gamma+\alpha-\beta)(\beta+\gamma-\alpha) = \Sigma 2\beta^2\gamma^2 - \alpha^4.$$

Si l'on substitue dans la première $a^2, b^2, c^2$ exprimés en fonction de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, on trouve, aisément,

$$S = \frac{16}{9}\Sigma;$$

or S est positif, puisque le triangle $(abc)$ existe. Donc $\Sigma$ est positif également et, comme deux facteurs tels que $\alpha+\beta-\gamma$, $\gamma+\alpha-\beta$ ne pourraient être ensemble négatifs que si $\alpha$ était négatif, ce qui est absurde, tous les facteurs de $\Sigma'$ sont positifs; donc enfin le triangle $(\alpha\beta\gamma)$ existe, ce que vérifie la construction classique bien connue. P. Barbarin.

Réponses analogues de MM. Bini, Boutin, *Majol*.

# QUESTIONS.

3149. [I 17 b et Σ] *On sait que tout nombre rationnel positif est la somme d'au plus quatre carrés de nombres rationnels.*

Existe-t-il de ce théorème une démonstration qui ne fasse pas intervenir la notion de nombre premier ni celle de divisibilité des nombres entiers, par exemple une démonstration analogue à une de celles indiquées par Le Besgue (*Exercices d'Analyse numérique,* Paris, Leiber et Faraguet, 1859, p. 147) pour cet autre théorème :

*Tout nombre rationnel positif est la somme d'au plus quatre cubes de nombres rationnels positifs?*

La première démonstration de Le Besgue pour les cubes s'étend de suite à certaines catégories de nombres transcendants réels de Liouville, plus généralement à tous les nombres d'un ensemble quelconque de nombres positifs, comprenant les nombres rationnels et formant un groupe par rapport aux quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique. De là l'intérêt de ma question pour les carrés.

E. Maillet.

3150. [I 19 b et Σ] D'après le dernier théorème de Fermat, non encore complètement établi, l'équation indéterminée

(1) $$x^n + y^n = z^n$$

($n$ entier $> 2$) n'aurait aucune solution en nombres entiers $\neq 0$.

A-t-on cherché à démontrer ce théorème moins précis :

*L'équation* (1) *ne peut avoir une* infinité *de systèmes de solutions en nombres entiers différents de zéro et sans diviseur commun?*

La solution de cette dernière question devient intéressante quand on cherche à résoudre l'équation (1) en nombres rationnels ou transcendants de Liouville appartenant à des catégories convenables de pareils nombres. En effet, une équation indéterminée

$$F(x, y, z, \dots) = 0, \tag{2}$$

à coefficients entiers, ne peut admettre un système de solutions formées avec ces nombres de Liouville (un au moins) et des nombres rationnels que si l'équation (2) admet une *infinité* de systèmes de solutions en nombres rationnels [1].

E. MAILLET.

**3151. [I 19 c]** Trouver les solutions en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$11x^2 = y^2 - 3z^2 - w^2 + 2(u^2 + s^2 + 5t^2),$$
$$x \neq y \neq z \neq \dots \neq t \neq 0.$$

MEHMED NADIR (Alep, Syrie).

**3152. [U 10 b et V 9]** D'après le *Recueil des lois et instructions sur les contributions directes* (Paris, Paul Dupont, 1836, p. 139), « à la fin de 1807, le Ministre des finances forma une réunion de directeurs des contributions et de géomètres en chef, présidée par M. Delambre, secrétaire perpétuel de la classe des Sciences exactes de l'Institut, à

[1] Il en résulte en particulier une extension, pour une série connue de valeurs de $n$, du théorème de Fermat au cas où $x$, $y$, $z$ appartiennent à certains ensembles formés avec des nombres rationnels ou des nombres de Liouville.

l'effet de délibérer sur le mode d'exécution du cadastre parcellaire. »

Le Rapport de Delambre doit être très intéressant. A-t-il été publié? G. LEMAIRE.

3153. [T 3 a] En pleine mer et sous toute orientation, l'horizon médian me paraît plus rapproché que les horizons latéraux; autrement dit, je me figure au centre d'une ellipse dont le demi-petit axe est la ligne de visée.

Cette illusion d'optique est-elle générale ou particulière? Voudrait-on avoir l'obligeance de me l'expliquer?

G. LEMAIRE.

3154. [V] Quels étaient dans l'antiquité et quels sont aujourd'hui les *patrons* des mathématiciens? des astronomes? des topographes? G. LEMAIRE.

3155. [I 19 c] L'équation

$$x^4 + 2y^4 = z^4 + 2t^4$$

est-elle possible en nombres entiers?

E. FAUQUEMBERGUE.

3156. [Σ] Peut-être pourrait-on chercher à obtenir, au moins dans des cas étendus, certaines relations entre les quotients incomplets du développement en fraction continue arithmétique d'un nombre transcendant de Liouville positif et de sa puissance $p^{\text{ième}}$. *Voir* à ce sujet A. HURWITZ, *Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft* (Zürich), 1896, p. 55 et suiv., et mon *Introduction à la théorie des nombres transcendants,* Paris, 1906. E. MAILLET.

3157. [A 3 c] Je désirerais qu'un correspondant voulût bien démontrer si l'équation

$$C^2\omega^6 + 2C(B+2C)\omega^4 - 2AC\omega^3 + (B+2C)^2\omega^2 - 2A(B+2C)\omega + A^2 = 0$$

[dans laquelle $A = \varphi\theta(m+p) - m$, $B = p\varphi + m\theta$, $C = m\varphi$] contient une racine double, et si elle est décomposable en produit de deux facteurs du troisième degré.

Dans le cas particulier où $\varphi\theta = -1$, l'équation ci-dessus devient

$$m^2\varphi^4\omega^6 + 2m\varphi^2[(p+2m)\varphi^2 - m]\omega^4$$
$$+ 2m(p+2m)\varphi^3\omega^3 + [(p+2m)\varphi^2 - m]^2\omega^2$$
$$+ 2(p+2m)[(p+2m)\varphi^2 - m]\varphi\omega + (p+2m)^2\varphi^2 = 0$$

et admet pour racine double $\omega = -\frac{1}{\varphi}$. H. Lez.

3158. [**E 5**] Dans les *Vorlesungen über natürliche Geometrie* de E. Cesàro (Leipzig, B. G. Teubner, 1901) on trouve (p. 17) les deux intégrales définies

$$u = 4k^2 a \int_0^\infty \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2} = \frac{\pi a}{e^{\frac{\pi}{2k}} - e^{-\frac{\pi}{2k}}},$$

$$v = 4k^2 a \int_0^\infty \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2} = \frac{\pi a}{2\left(e^{\frac{\pi}{4k}} + e^{-\frac{\pi}{4k}}\right)}.$$

Comment obtient-on les valeurs indiquées?

H. Wieleitner (Spire).

3159. [**E 5**] Calculer les valeurs des intégrales définies

$$x = 2a \int_0^\infty \frac{\cos\tau\, d\tau}{e^{\frac{a}{r}\tau} + e^{-\frac{a}{r}\tau}},$$

$$y = 2a \int_0^\infty \frac{\sin\tau\, d\tau}{e^{\frac{a}{r}\tau} + e^{-\frac{a}{r}\tau}}.$$

H. Wieleitner (Spire).

3160. [**E 5**] Calculer les valeurs des intégrales dé-

finies

$$x = a \int_0^{\frac{r}{\alpha}} \frac{\cos\tau \, d\tau}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}\tau^2}},$$

$$y = a \int_0^{\frac{r}{\alpha}} \frac{\sin\tau \, d\tau}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}\tau^2}}.$$

H. Wieleitner (Spire).

**3161.** **[Q1d]** De l'expression connue de l'élément linéaire soit d'une surface, soit d'une pseudo-surface, savoir :

$$dS^2 = A^2\, du^2 + A'^2\, du'^2 + 2B''\, du'\, du,$$

on tire, pour l'angle des lignes coordonnées,

$$\cos\varphi = \frac{B''}{AA'};$$

d'où

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{A^2 A'^2 - B''^2}}{AA'} = \frac{H}{AA'}.$$

Cela étant, a-t-on jamais observé que, *dans les deux cas, l'aire* du lieu admet la forme très simple

$$\Sigma = \int\int H\, du\, du',$$

la fonction $H^2$ pouvant, si bon semble, être mise sous la forme classique d'une somme de trois carrés?

Issaly.

**3162.** **[K8b]** Existe-t-il des quadrilatères inscriptibles dont les côtés et les diagonales soient mesurés par des nombres entiers? E.-N. Barisien.

**3163.** **[L¹18c]** On sait que le lieu des centres des co-

niques inscrites dans un quadrilatère est la droite qui joint les milieux des diagonales. En connaît-on une démonstration géométrique simple? E.-N. Barisien.

3164. [**K8b**] M. Hayashi a rappelé dans *Mathesis*, 1906, p. 257-260, la proposition suivante des anciens mathématiciens chinois et japonais :

*Dans un quadrilatère inscriptible* ABCD, *la somme des rayons des cercles inscrits aux triangles* BAC *et* DAC *est égale à la somme des rayons des cercles inscrits aux triangles* ABD *et* CBD.

N'y a-t-il pas une propriété analogue relative aux cercles exinscrits? *Arcitenens.*

3165. [**A3g**] Où pourrais-je trouver le développement d'une méthode d'approximation analogue, par exemple, à celle de Newton ou des parties proportionnelles pour la résolution d'un système de *n* équations, algébriques ou non, à *n* inconnues. *Zed.*

# RÉPONSES.

**2853.** (**1904**, 285) (E. Maillet). — *Erreurs des mathématiciens* (**1905**, 275; **1906**, 65, 110, 150, 200, 248). — Je considère comme un des faits les plus remarquables de l'histoire de la Science l'erreur qu'a commise Cauchy en croyant démontrer le théorème d'Euler ($F + S = A + 2$) sans introduire aucune hypothèse sur la nature du polyèdre étudié (1).

C'est, en effet, un principe d'une importance primordiale qui lui a ainsi échappé et qu'il a laissé à Riemann la gloire de découvrir : le rôle fondamental de l'*Analysis situs* dans les Mathématiques.

Cette erreur de Cauchy est aujourd'hui corrigée. Il n'en est pas de même des lacunes graves que renferme la démonstration par laquelle il a voulu établir le théorème sur l'égalité des polyèdres convexes : *Deux polyèdres convexes qui ont les faces égales chacune à chacune et assemblées de la même façon sont égaux ou symétriques*. L'avenir montrera sans doute que, cette fois, il n'y a pas erreur à proprement parler, en ce sens que le théorème est probablement exact. Mais, jusqu'à présent, on ne doit point le considérer comme démontré, et la réfection de cette démonstration serait une tâche digne de tenter les chercheurs.

Jacques Hadamard.

M. Lemaire signale une erreur due à Francœur en réponse à [**2855** (**1906**, p. 151)]. D'abord le vernier et le nonius ne sont pas des *appareils*, mais des organes d'instruments. Ensuite, ils sont tout à fait distincts (*voir* Laussedat, etc.), et M. Poggendorff, dans son *Histoire de la Physique* (édit. allemande, Leipzig, 1879), dit que l'instrument n'a pas été imaginé par lui et porte à tort son nom, et « Die wahre Gefinder des Instruments ist Pierre Vernier geb. 1580 und gest. 1637 zu Ornans in der Franche-Comté. Die Franzosen

(1) *Voir* le *Traité de Géométrie élémentaire*, de Rouché et de Comberousse, où cette démonstration est citée entre guillemets.

haben also recht das Instrument nach ihm zu nennen, ab sie aber der Urheber zugleich als ihren Landeman betrachten dürfen ist zweifelhaft ». Qui des deux a raison? Est-ce M. Lemaire ou M. Poggendorff? N. PLAKHOWO.

**2868.** (**1905**, 10) (A. CLAUSE). — *Détermination d'une date* (**1906**, 252). — M. Brocard regrette que Lucas n'ait pas eu occasion de présenter les formules simples qui ont servi à l'établissement de son calendrier à roulette.

Ces formules sont implicitement contenues dans le texte des *Récréations mathématiques*, t. IV, p. 11. H. DELANNOY.

**3034.** (**1906**, 62) (H.-B. MATHIEU). — *Résolution de l'équation*

$$z^2 = (x^2+y^2)^2 + 8x^2y^2 - 4xy(x^2-y^2)$$

(**1906**. 255). — La résolution publiée dans le numéro de novembre 1906, p. 255, est inexacte. Contrairement à la conclusion de M. Malo, l'équation admet une infinité de solutions.

En effet, soit d'abord à résoudre en nombres rationnels l'équation

$$u^4 - 4u^3 + 10u^2 + 4u + 1 = v^2.$$

Posons

$$v = u^2 - 2u + t;$$

l'équation devient

$$2(t-3)u^2 - 4(t+1)u + t^2 - 1 = 0,$$

ou

$$t^2 + 2u(u-2)t - (6u^2 + 4u + 1) = 0.$$

Dans la première, la somme de deux racines $u$, $u'$ est

$$u + u' = \frac{2(t+1)}{t-3};$$

dans la seconde,

$$t + t' = -2u(u-2).$$

On obtiendra donc, de proche en proche, une infinité de solutions à l'aide des formules

$$u' = \frac{2(t+1)}{t-3} - u, \qquad t' = -2u'(u'-2) - t.$$

En partant de la solution évidente $u = 0$, $t = 1$, on trouve

$$u = 0,\ -2,\ \frac{18}{5},\ \frac{252}{155},\ -\frac{7868}{10819},\ \ldots,$$
$$t = 1,\ -17,\ \frac{137}{5^2},\ -\frac{4097}{31^2},\ \frac{34712281}{10819^2},\ \ldots,$$
$$v = 1,\ 9,\ \frac{281}{5^2},\ \frac{117041}{155^2},\ \frac{96633441}{10819^2},\ \ldots.$$

On en déduit, pour l'équation proposée,

$$x = -2,\ 18,\ 252,\ 7868,\ \ldots,$$
$$y = 1,\ 5,\ 155,\ -10819,\ \ldots,$$
$$z = 9,\ 281,\ 117041,\ 96633441,\ \ldots.$$

De plus, comme l'équation se transforme en elle-même par le changement de $x$ en $-y$ et de $y$ en $x$, on a aussi les solutions

$$x = 1,\ 5,\ 155,\ 10819,\ \ldots,$$
$$y = -2,\ -18,\ -252,\ 7868,\ \ldots,$$

avec les mêmes valeurs de $z$ que ci-dessus.

E. FAUQUEMBERGUE.

**3043.** (**1906**, 90) (E. MAILLET). — *Développement en fraction continue de* $\pi$ (**1906**, 228). — Sans pouvoir indiquer le développement demandé, ni même la loi asymptotique des coefficients, voici ce que je puis dire : Tout étant posé comme dans ma Communication du 3 décembre 1906 (*C. R.*, p. 873), soit I un nombre de Liouville satisfaisant à l'inégalité (2) : $e^{I}$ est transcendant [1]. On ne peut donc avoir $I = \pi i$, puisque $e^{\pi i} = -1$; donc $\pi$ ne peut être un nombre transcendant de Liouville satisfaisant à (2); par suite l'ordre du développement en fraction continue arithmétique de $\pi$ est limité, comme celui des fractions continues réelles positives qui ne satisfont pas à (2). La même conclusion s'applique à

$$\log \text{nép.} (1 + \sqrt{2}).$$

E. MAILLET.

Autre réponse de M. LEZ, communiquée à M. Maillet.

---

[1] *Mém. Assoc. franç. pour l'avanc. des Sc.*, Congrès de Lyon, 1906, et *Bull. Soc. math.*, 1906-1907.

3056. (**1906**, 95) (G. TARRY). — *Tables de diviseurs* (**1906**, 231). — La réponse de M. le Dr Prompt fait voir que mon procédé ne réalise pas assez d'économie d'espace.

En conséquence, j'ai imaginé une nouvelle Table qui ne dépasse pas en étendue celle d'Inghirami et donne, jusqu'à 1 million, tous les facteurs premiers d'un nombre non divisible par 2, 3, 5 ou 7.

En doublant l'étendue de ma Table, je dépasserais le troisième million. G. TARRY.

3071. (**1906**, 141) (A. BOUTIN). — *Enveloppe.* — Les pôles P et P' décrivent deux ponctuelles $P^2$, $P'^2$ du deuxième ordre, qui sont projectives, car elles sont projectives du faisceau A de la deuxième classe décrit par la droite Δ. L'enveloppe de la droite |PP'|, qui joint deux points correspondants de $P^2$, $P'^2$, est donc *une courbe de la quatrième classe*. Appelons XYZ le triangle conjugué commun de B et B' et ξ, ξ' les tangentes de A issues du point X; soit, en outre, 1 le point de la droite |YZ| qui est le pôle de ξ par rapport aux deux coniques B, B', et 2 le pôle de ξ' par rapport aux mêmes coniques : la droite |12| = |YZ| est évidemment une tangente double de l'enveloppe cherchée et 1, 2 en sont les points de contact. On reconnaît de même que les deux autres côtés du triangle XYZ sont es deux autres tangentes doubles de l'enveloppe, et l'on peut en déterminer les points de contact. L'enveloppe cherchée étant rationnelle, de la quatrième classe, et ayant trois tangentes doubles, est donc une courbe *du sixième ordre*. On reconnaît aussi aisément qu'elle a un contact quadruple avec chacune des deux coniques $P^2$, $P'^2$.

Autrement : les droites Δ et |PP'| étant conjuguées par rapport aux deux coniques B, B' et par suite par rapport aux coniques du faisceau tangentiel (*schiera, schaar*) qu'elles déterminent, l'enveloppe de |PP'| est la courbe correspondante à A dans la transformation quadratique involutive (tangentielle) définie par ledit faisceau tangentiel, etc.

On reconnaît ainsi aisément, d'après les règles de la transformation indiquée, les modifications qui surviennent lorsque la conique A n'est pas en situation générale par rapport au triangle XYZ, conjugué commun de B et B'. Si, par exemple, les trois coniques A, B, B' ont un triangle conjugué commun, les côtés de ce triangle deviennent tangentes doubles cuspidales de l'enveloppe en question

qui est, par suite, une *astroïde projective* (polaire réciproque de lemniscate projective). Suivant que la conique A touche un, deux ou les trois côtés du triangle XYZ, l'enveloppe se réduit à une courbe de la troisième classe, à une conique ou à un point. Par exemple, si B, B' sont deux hyperboles équilatères concentriques et A une parabole ayant pour foyer leur centre, les droites |PP'| vont concourir en un même point, etc.

On peut aussi généraliser la question en substituant à la conique A une courbe rationnelle de la classe $n$. L'enveloppe est alors une courbe rationnelle de la classe $2n$ ayant trois tangentes $n$-ples qui sont les côtés du triangle XYZ; elle doit avoir d'autres singularités tangentielles qui équivalent ensemble à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ tangentes doubles.

V. Retali.

L'équation tangentielle d'une conique étant prise sur la forme

$$\Sigma \equiv A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + 2F\mu\nu + 2G\nu\lambda + 2H\lambda\mu = 0,$$

les coordonnées du pôle de la droite $(l, m, n)$ relativement à cette conique sont

$$\Sigma_1 = Al + Hm + Gn, \quad \Sigma_2 = Hl + Bm + Fn, \quad \Sigma_3 = Gl + Fm + Cn,$$

et, si l'on considère, par rapport à une seconde conique $\Sigma'$, le pôle de la même droite, les coordonnées de la droite de jonction des deux pôles sont

$$\lambda = \Sigma_1\Sigma'_3 - \Sigma'_2\Sigma_3, \qquad \mu = \ldots, \qquad \nu = \ldots.$$

En écrivant que ces coordonnées doivent vérifier l'équation d'une troisième conique,

$$\Sigma'' \equiv A''\lambda^2 + B''\mu^2 + \ldots = 0,$$

on a une condition homogène et du quatrième degré en $l$, $m$, $n$ : l'enveloppe est donc de la quatrième classe.

Il en est encore de même si l'on suppose que c'est la droite $(l, m, n)$ qui soit tangente à la troisième conique, car alors, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant des fonctions entières et homogènes du second degré de $l$, $m$, $n$, qui peuvent être considérées comme des trinomes du second degré d'un paramètre variable, sont des polynomes entiers du quatrième degré de ce même paramètre.

*Géométriquement,* la question posée par M. Boutin conduit à envisager une intéressante variété de la transformation birationnelle quadratique. Etant données deux coniques U et V, toute droite de leur plan a une conjuguée obtenue comme la droite de jonction de ses deux pôles par rapport aux coniques U et V respectivement, et de laquelle elle résulte réciproquement de la même manière. Les droites autohomologues de la transformation sont les quatre tangentes communes à U et à V, et les droites exceptionnelles, les trois diagonales du quadrilatère des tangentes autohomologues : à chacune de ces diagonales correspond l'infinité des droites enveloppant le point commun aux deux autres. A un point (enveloppe de droites) correspond une conique naturellement inscrite dans le triangle des droites exceptionnelles. En effet, les pôles, relativement à U et à V de la droite, pivotant autour du point considéré, décrivent deux divisions linéaires homographiques. De là suit que la classe de la transformée d'une courbe de classe $n$ est $2n$ : en particulier, la transformée d'une conique est une quartique tangentielle unicursale admettant les droites exceptionnelles comme tangentes doubles.

Si l'on suppose que les coniques U et V sont des paraboles, on retombe sur la *transformation par droites isotomiques réciproques.* E. Malo.

3074. (**1906**, 142) (G. Lemaire). — Comme première indication, je pense qu'il conviendra de consulter l'Ouvrage de MM. A.-M. d'Almeida et R. Guimaraes, *Curso de Topographia,* t. I, Lisboa, 1899, où l'on trouvera cités les trois auteurs italiens mentionnés dans l'énoncé, avec les titres de leurs principaux écrits et l'exposé de leurs méthodes et inventions topographiques.

*Voir* notamment Jadanza, p. 306, 411, 416; Porro, p. 319, 376, 409; Salmoiraghi, p. 415; etc. H. Brocard.

3077. (**1906**, 142) (E.-N. Barisien). — *Sur l'expression* $x^n+y^n+z^n$. — La question manque de précision.

Si $x+y+z=0$, $x^n+y^n+z^n$ est une fonction de deux variables $x$ et $y$; donc elle est fonction de deux fonctions quelconques de $x$ et $y$, soit

$$xyz = -xy(y+x) \qquad \text{et} \qquad xy+yz+zx = xy-(x+y)^2.$$

En second lieu, s'il n'existe pas de relations entre $x, y, z$, $x^n + y^n + z^n$ ne peut être fonction de $xyz$ et $xy + yz + zx$, car le déterminant fonctionnel de $x^n + y^n + z^n$, $xyz$, $xy + yz + zx$,

$$\begin{vmatrix} nx^{n-1} & ny^{n-1} & nz^{n-1} \\ yz & zx & xy \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

Voici comment il conviendrait de poser la question :

$x^n + y^n + z^n$ est-il fonction entière de $xyz$, $xy + yz + zx$ quand $x + y + z = 0$? Alors si l'on pose

$$xy + yz + zx = a, \qquad xyz = b,$$

$x, y, z$ sont racines de

$$t^3 + at - b = 0$$

et il clair que la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de cette équation ou $x^n + y^n + z^n$ est fonction entière de $a$ et $b$; la formule de Waring donne la réponse. *Taupin.*

En posant $xy + yz + zx = a_2$, $xyz = -a_3$, nous pouvons considérer $x, y, z$ comme racines de l'équation $t^3 + a_2 t + a_3 = 0$, donc $x^n + y^n + z^n$ peut s'exprimer en fonction *rationnelle et entière* de $a_2$ et $a_3$. On obtient la formule générale demandée, en mettant 0 à la place de $a_1$ et des coefficients dont l'indice est $> 3$, dans la formule connue

$$\Sigma x_p^n = (-1)^n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ na_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

qui donne en fonction des coefficients la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Nous avons donc pour expression de $x^n + y^n + z^n$ le déterminant

$$
-1)^n \begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3a_3 & a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_3 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & .. & \dots & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_3 & a_2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_3 & a_2 & 0
\end{vmatrix}.
$$

*Autrement :* Si $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$ et si $s_r$ désigne la somme $x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r$ on trouve aisément :

$$-\log \frac{f(x)}{x^n} = \frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{2x^2} + \frac{s_3}{3x^3} + \dots$$

Donc, $\frac{s_r}{r}$ est égal au coefficient de $\frac{1}{x^r}$ dans le développement de $-\log \frac{f(x)}{x^n}$ suivant les puissances décroissantes de $x$.

Dans le cas particulier de $f(x) = t^3 - at + a_3 = 0$, ce qui revient à poser $xy + yz + zx = -a$, $xyz = -a_3$, on trouve pour $n$ pair et égal à $2m$ :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2m}(x^{2m} + y^{2m} + z^{2m}) \\
&= \frac{a^m}{m} + \frac{(m-2)}{2!} a^{m-3} a_3^2 + \frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{4!} a^{m-6} a_3^4 \\
&\qquad + \dots + \frac{(m-\lambda-1)(m-\lambda-2)\dots(m-3\lambda+1)}{(2\lambda)!} a^{m-3\lambda} a_3^{2\lambda} + \dots
\end{aligned}
$$

et pour $n$ impair :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m+1}(x^{2m+1} + y^{2m+1} + z^{2m+1}) \\
&= a^{m-1} a_3 + \frac{(m-2)(m-3)}{3!} a^{m-4} a_3^3 + \dots \\
&\qquad + \frac{(m-\lambda-1)(m-\lambda-r)\dots(m-3\lambda)}{(2\lambda+1)!} a^{m-3\lambda-1} a_3^{2\lambda+1} + \dots
\end{aligned}
$$

Nous avons donc

$$s_2 = 2a, \qquad -s_3 = 3a_3,$$
$$s_4 = 2a^2, \qquad -s_5 = 5aa_3,$$
$$s_6 = 2a^3 + 3a_3^2, \qquad -s_7 = 7a^2a_3,$$
$$s_8 = 2a^4 + 8aa_3^2, \qquad -s_9 = 9a^3a_3 + 3a_3^3,$$
$$s_{10} = 2a^5 + 15a^2a_3^2, \qquad -s_{11} = 11a^4a_3 + 11aa_3^3,$$
$$s_{12} = 2a^6 + 24a^3a_3^2 + 3a_3^4, \qquad -s_{13} = 13a^5a_3 + 26a^2a_3^3,$$
$$s_{14} = 2a^7 + 35a^4a_3^2 + 14aa_3^4, \qquad -s_{15} = 15a^6a_3 + 50a^3a_3^3 + 5a_3^5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dont les six premières coïncident avec celles données par M. Barisien.

V. Retali.

Solutions analogues de MM. V. Aubry, Bini, Boutin, Gleizes, Quijano, Hayashi, Kapteyn, Livon, Loria, Malo, Pellet, Plakhowo, Vincent.

3078. (**1906**, 163) (*Onponale*). — Un cas particulier des développantes successives d'un arc de courbe convexe, tangent à une droite fixe et arrêté normalement à une autre droite, parallèle à la première, a été indiqué par Jean Bernoulli (*Œuvres*, t. IV). La limite de ces développantes est une demi-cycloïde disposée de la même façon par rapport aux deux droites fixes.

Si l'arc primitif est un quart de cercle, on peut obtenir par ce moyen des valeurs approchées de $\pi$.

Sur le même sujet, voir *J. E. P.*, 18e Cahier, t. XI, 1820, p. 417-489 : S.-D. Poisson, *Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions par des séries de quantités périodiques*. — L'auteur rappelle le problème de Jean Bernoulli. Euler est le premier qui l'ait résolu (*Mém. de Pétersb.*, 1764). Legendre en a donné une démonstration plus simple (*Exercices de Calcul intégral*). Lagrange en a laissé aussi une solution manuscrite qu'il paraît avoir lue à l'Académie de Berlin mais qu'il n'a point fait imprimer. Poisson expose une solution générale, très simple.

H. Brocard.

Les développantes successives du cercle ont fait le sujet de plusieurs travaux qui se trouvent cités p. 616 de mon Ouvrage *Spezielle alg. und transcendente ebene Kurven* (Leipzig, 1902).

Gino Loria (Gênes).

J'ai établi en 1898 (*Bulletin de la Société mathématique*) la propriété suivante :

« Parmi toutes les développantes d'une même développante de cercle, il y en a une dont le rayon de courbure est partout égal au rayon polaire issu du centre du cercle. Pour une autre quelconque de ces courbes, située à la distance $h$ de la première, la différence entre le carré du rayon de courbure et le carré du rayon polaire est constante et égale à deux fois le produit du rayon du cercle par l'écartement $h$. » L. Lecornu.

**3081.** (**1906**, 164) (G. Lemaire). — *Répétition ou réitération?* — Dans sa Note sur *la Méthode et les Instruments d'observation*, etc., annexée à la *Géodésie* de Francœur (6e édit., 1879, p. 501-546). Perrier, chef d'escadron d'état-major, a exposé les avantages comparatifs des deux méthodes de répétition et de réitération.

Nous devons y renvoyer le lecteur. H. Brocard.

**3082.** (**1906**, 164) (G. Lemaire). — *Etymologie de théodolite.* — Cette question a été posée par Terquem (*N. A.*, 1861, 2e partie, p. 13) et résolue (*Ibid.*, p. 37-38) d'après l'autorité d'August de Morgan.

Le mot *theodelitus* se rencontre déjà dans un Ouvrage anglais publié à Londres en 1571 et réimprimé en 1591 de Digges père et fils.

De Morgan rattache ingénieusement *theodolite* à *alidade* d'après un Ouvrage de W. Bourn, paru en 1578, où *alidade* est constamment écrit *athelida*. Breton de Champ a pensé aussi que l'article anglais *the* a été réuni au mot *halidade*, ce qui a donné *thehalidade* et ensuite *théodolite*.

Les hypothèses de Morgan, Breton et Terquem rendent cette explication très concluante : *théodolite* viendrait de l'arabe et de l'anglais.

Il a été fait aussi de louables tentatives pour établir que *théodolite* est tiré du grec (voir *Intermédiaire de l'A. F. A. S.*, 1897), mais elles sont factices, et aucune d'elles n'est pleinement satisfaisante. On a tour à tour proposé θεως, λιθος, θεωμαι, δολιχος, δολιοτες, θεαω, δολοεις, λιτος, οδος, δικη, θεοτης, διαυλιτος, sans parvenir à fixer de choix.

En résumé, si la question n'est pas élucidée, l'hypothèse de Morgan est singulièrement plausible. H. Brocard.

Autre réponse de M. Plakhowo.

**3084.** (**1906**, 164) (*Neisirab*). — Question résolue par la réponse **2801** (**1904**, 272) : Le carré de tout nombre somme de trois carrés est lui-même somme de trois carrés dont aucun n'est zéro.

D'ailleurs, en particulier, toute puissance entière de 3 est la somme de trois carrés premiers avec 3 (E. CATALAN, *Mathesis*, question **23** ; S. Realis, 1881, p. 73, 87).

Voir aussi d'autres résultats énoncés par Catalan (*M.*, question **855**, 1893, p. 256) ; F. Proth (*N. C.*, question **294**), Ed. Lucas (1878, p. 120, question 331) ; etc. H. BROCARD.

En multipliant membre à membre les identités

$$(\sqrt{a^2+b^2}-i\sqrt{c^2+d^2})^2 = a^2+b^2-c^2-d^2-2i\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)},$$
$$(\sqrt{a^2+b^2}+i\sqrt{c^2+d^2})^2 = a^2+b^2-c^2-d^2+2i\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)},$$

on a

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = (a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

D'où, pour l'identité eulérienne

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = (a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ac\pm bd)^2+4(ad\mp bc)^2,$$

qui donne tous les carrés qui sont une somme de trois carrés.

UMBERTO BINI (Rome).

Tout nombre N, de la forme

$$N = x^2 \pm xy + y^2,$$

$x$ et $y$ étant des nombres entiers quelconques, est tel que son carré est la somme de trois autres carrés. Cela ressort de l'identité

$$N^2 = (x^2 \pm xy + y^2)^2 = x^2y^2 + x^2(x\pm y)^2 + y^2(x\pm y)^2.$$

Ainsi en prenant $x = 3$, $y = 5$, avec le signe supérieur, nous avons

$$\overline{49}^2 = \overline{15}^2 + \overline{24}^2 + \overline{40}^2.$$

Tous les carrés jouissant de la propriété énoncée sont sans doute contenus dans cette formule. Il suffit que $x \gtrless 0$, $y \gtrless 0$, $x \gtrless y$.

LIVON.

Réponses analogues de MM. BOUTIN, GLEIZES, *Majol*, PLAKHOWO, TERRACINI, VINCENT.

3085. (**1906**, 185) (*Hergé*). — Il s'agit sans doute de l'*Argus de la Presse,* fondé en 1879 (Paris, 14, rue Drouot, IX^e).

Ce Bureau se charge de découper les articles se rapportant à tel sujet déterminé.

A partir de mai 1901, il a créé un bulletin mensuel, l'*Argus des Revues,* destiné à servir de catalogue signalant aux chercheurs dans quelles Revues ils devraient puiser les premiers documents utiles à leurs études.

En juin 1901, il a commencé une Tribune d'Intermédiaire (questions et réponses).

Il publie aussi l'*Argus de l'Officiel,* relatant les actes des personnages politiques. H. BROCARD.

3087. (**1906**, 185) (A. WERERBRUSOW). — *Développement en fraction continue.* — *Voir :* Méthode d'approximation des racines de Lagrange dans l'*Algèbre supérieure* de J.-A. Serret, t. I.

PELLET.

3088. (**1906**, 186) (E. FRANCKEN). — *Sur un champ magnétique.* — Le champ magnétique dans le voisinage d'un élément de circuit *ds* est dû tout entier à l'élément *ds*. (Il n'est pas la moitié du champ dû à tous les autres éléments.)

Considérons un point M infiniment voisin de *ds*, et dont la distance à *ds* soit infiniment petite par rapport à la longueur *ds*. Considérons la ligne de force passant par M. Elle contourne *ds* à une distance toujours infiniment petite.

On sait que, lorsqu'une masse magnétique se déplace dans le champ dû à un circuit, le travail de la force électromagnétique est égal à l'augmentation du flux émis par cette masse à travers le circuit.

Sur la sphère de rayon égal à l'unité ayant pour centre le milieu de *ds*, cet élément se projette suivant un demi-grand cercle, le reste du circuit suivant une courbe fermant ce demi-grand cercle.

Quand M se déplace sur la ligne de force, cette courbe reste immobile; la projection de *ds* décrit au contraire la sphère à chaque tour de M. Donc la variation du flux est due seulement à *ds*, donc tout le champ sur la ligne de force considérée est dû à *ds*.

Voici au surplus l'explication précise de ce qui se passe :

Considérons deux positions infiniment voisines du circuit, 1 et 2.

Soient L le coefficient de self-induction de la première, $L + dL$ celui de la seconde, M le coefficient d'induction mutuelle des deux circuits 1 et 2.

Transportons de la première à la deuxième position une fraction du courant identique comme forme au courant I, mais d'intensité $I\,du$. Le courant restant sur le circuit 1 aura, à un instant quelconque du transport des fractions successives, une intensité $I(1-u)$, et le courant sur le circuit 2, une intensité $Iu$; $u$ variant de 0 à 1.

Le travail des forces électromagnétiques sera, pour le transport de la totalité :

1° Par suite du champ créé par 1,

$$d\mathfrak{T}_1 = \int_0^1 I(1-u)(M-L)I\,du = I^2(M-L)\int_0^1 (1-u)\,du;$$

2° Par suite du champ créé par 2,

$$d\mathfrak{T}_2 = I^2(L+dL-M)\int_0^1 u\,du = I^2(L-M)\int_0^1 u\,du + I^2\,dL\int_0^1 u\,du;$$

3° Le travail de la self-induction de $I\,du$ est d'ordre supérieur, donc négligeable.

Si l'on observe que

$$\int_0^1 (1-u)\,du = \int_0^1 u\,du = \tfrac{1}{2},$$

on a, en faisant la somme pour le travail total,

$$d\mathfrak{T} = d\mathfrak{T}_1 + d\mathfrak{T}_2 = \tfrac{1}{2}\,I^2\,dL.$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ est dû à l'accroissement progressif de l'intensité du courant produisant le travail; c'est tout à fait analogue au travail de charge d'un condensateur du potentiel O au potentiel U.

MESNAGER.

3091. (**1906**, 187) (L. GODEAUX). — *Problème de Malfatti.* — Je n'ai pas connaissance de l'étude bibliographique de M. Derousseau. Je pense qu'elle renferme entre autres indications celles de Gergonne, H. Ahlborn, F. Binder, A. Quidde, Schellbach, A. Cayley, Pelletreau, E. Lebon, Pampuch, C. Adams, Simons, etc.

Pour la période postérieure à 1895, je signalerai : Pampuch (*Z.S.*, 1904 ; *Z. H.*, 1905) ; E.-N. Barisien (*N. A.* et *M.*, 1902).

D'autres monographies ont paru antérieurement à celle de M. Derousseau ; elles sont dues à Marcus Baker, à Wittstein et à F. Talbot.

H. Brocard.

Je ne connais pas la publication de M. Derousseau, je ne puis donc savoir ce qu'il a oublié, mais, parmi les articles sur le problème de Malfatti, je mentionnerai :

Hall. — Program 384, Watterscheid (1898).

Derousseau. — Dans *M. S. L.*, (2), t. XVIII, 1895, n° 1, Histoire (pas complète).

Jacques Bernoulli. — Œuvres complètes (1747), pour le triangle équilatéral.

A. Cayley. — *Cambridge and Dublin Mathem. Journal*, t. IV, p. 270.

Dessoves. — Applications de trigonométrie (1871), trois méthodes de solution.

Pelletreau (1888). — Nouvelle solution (*Assoc. franç. Av. Sc.*).

Bellachi. — Periodico di Matematica, 1895, p. 11 ; 1896, p. 56.

A. Pampuch (1897). — Par inversion, 1900 (géométrie de position); ces deux Ouvrages sont dans le Program Strasbourg in Els (édition 1902).

Barisien. — *Mathesis*, 1902, p. 82 ; *N. A.*, 4e série, t. II, 1902, p. 411. — Il trouve 20 solutions au lieu de 32.

Enfin Fontené et L. Gérard, dans le *Bull. des Sc. math. et ph. élémentaires*, 1900, n° du 1er juillet et n° du 15 avril, p. 209, 297.

Pampuch. — Les 32 solutions du problème de Malfatti (*Grun. Archiv*, 3e série, t. VIII, 1904, p. 36).

La bibliographie est tirée de Max Simon (*Ueber die Entwickelung der elementar Geometrie im* XIX. *Jahrhundert*).

N. Plakhowo.

3093. (**1906**, 187) (G. Lemaire). — Le premier planimètre a été inventé et construit en 1814 par Hermann, ingénieur à Munich. Puis est venu le planimètre à cône, inventé en 1826 par Oppikoffer, ingénieur à Berne, perfectionné en 1837 par Ernst, constructeur parisien.

Après avoir mentionné le planimètre de Gonella (1828) et le plani-

mètre sommateur de Beuvière (1846), nous arrivons au planimètre polaire imaginé en 1854 par Amsler-Laffon, de Schaffhouse, qui paraît avoir pris le premier rang et compte aujourd'hui une importante bibliographie.

Je ne mentionnerai que les principales Notices où soit exposée la théorie élémentaire de cet instrument :

C.-N. Peaucellier (Note de 1863). — *Mémorial de l'Officier du Génie*, n° **22**, 1874.

C.-A. Laisant. — Note sur le planimètre polaire de M. Amsler (*Mém. de la Soc. des Sc. ph. et nat. de Bordeaux*, 2e série, t. I, 1876, p. 385-400, et *N C.*, t. V, 1879, p. 39-44, 71-76, 117-121 et 166-168).

A. Thiré. — Sur la théorie du planimètre d'Amsler (*N. A.*, 1886, p. 353-364).

G. de Longchamps. — Exposition de la théorie des intégrateurs (*P. M. S.*, t. I, 1891, p. 73-75, 97-101).

A.-M. d'Almeida et R. Guimaraes — Curso de Topographia, 1899, t. I, p. 131-169.

Autres références. *Voir* aussi :

Trunck. — Die Planimeter, deren Theorie, Praxis und Geschichte, 1865.

Amsler-Laffon. — Neuere Planimeterkonstruktionen, dans *Zeitschrift für Instrümentendunde*, 1884.

Abdank-Abakanowicz. — Les intégraphes. Étude sur un nouveau système d'intégrateurs mécaniques, 1886.

Enfin, la Grande Encyclopédie. H. Brocard.

3094. (**1906**, 187) (G. Lemaire). — Les dénominations de quadrangle, quadrilatère, polygone, multilatère, etc., doivent être maintenues. Elles répondent à des définitions distinctes.

*Voir* L. Cremona, *Eléments de Géométrie projective*, traduct. E. Dewulf, Paris, 1875, p. 23-25 :

« Un polygone ($n$-gone) complet est le système de $n$ points ou sommets considérés avec les $\frac{n(n-1)}{2}$ droites ou côtés qui les joignent deux à deux.

» Un multilatère ($n$-latère) complet est le système de $n$ droites ou côtés considérés avec les $\frac{n(n-1)}{2}$ points ou sommets où ils se coupent deux à deux. »

Cette nomenclature est indispensable et de continuel emploi dans la Géométrie des figures, propriétés et propositions corrélatives.

H. Brocard.

3100. (**1906**, 189) (A. Aubry). — Question traitée à diverses reprises dans *Mathesis* depuis 1889.

*Voir M.*, 1889, 161, 181; 1890, 34; 1892, 230; 1896, 84; 1897, 129, 153, 183; 1906, 89; et *P. M. S.*, 1900, 273 (article de M. A. Aubry).

M. E. Lampe a fait connaître (*loc. cit.*, 1897) d'autres formules donnant des résultats non moins curieux.

C'est lui aussi qui a rappelé (*Ibid.*, 1892) le passage du tome II des *Vorlesungen* de M Cantor justifiant l'attribution de la formule à Nicolas de Cusa.

H. Brocard.

Cette rectification est de Moritz Cantor, qui dit avoir trouvé la formule $x = \frac{3\sin x}{2+\cos x}$ déjà chez Nicolas Cusanus. C'est ce qui a été rapporté par Max Simon à la page 226 de son *Entwickelung der elementar Geometrie im* XIX. *Jahrhundert.*

N. Plakhowo.

3109. (**1906**, 236) (A. Boutin). — *Sur une identité.* — Soient $f(n)$ une fonction de la variable $n$, $\Delta$ le symbole des différences finies en sorte que $\Delta f = f(n+1) - f(n)$, $a$ une indéterminée et $b = \frac{a}{1-a}$, $m$ un entier arbitraire; je dis qu'on a l'identité

$$f + \frac{m}{1} a\Delta f + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2\Delta^2 f + \ldots$$
$$= (1-a)^m \left[ f(n) + \frac{m}{1} bf(n+1) + \frac{m(m-1)}{1.2} b^2 f(n+2) + \ldots \right].$$

En effet, les deux membres étant linéairement composés avec les quantités $f(n), f(n+1), \ldots f(n+m)$, il suffit de prouver que les coefficients de ces diverses fonctions sont égaux de part et d'autre, ou, ce qui revient au même, vérifier l'identité dans le cas $f(n) = c^n$. L'équation se réduit alors à

$$[1 + a(c-1)]^m = (1-a)^m (1+bc)^m,$$

ce qui est juste d'après les valeurs de $a$ et $b$.

La formule du texte s'obtient en faisant

$$f(n) = \frac{1}{n+1}, \qquad a = \frac{1}{2}, \qquad b = 1 \qquad \text{et} \qquad m = n;$$

on peut, comme on voit, écrire beaucoup d'autres résultats analogues.

C. CAILLER.

Autre réponse de M. MALO.

3110. (**1906**, 236) (E.-N. BARISIEN). — *Courbes connues transcendantes dont la développée est une courbe algébrique.* — Soient $x$, $y$ les coordonnées d'une courbe algébrique, $s$ son arc; les équations d'une développante seront

$$(1) \qquad X = x + s\frac{dx}{ds}, \qquad Y = y + s\frac{dy}{ds};$$

en général, $s$ est une transcendante; donc, $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ étant algébriques en $x$ et $y$, l'élimination de $x$ et $y$ entre (1) et les équations de la courbe donnera une équation transcendante en X et Y pour la développante. Donc, *en général,* les développantes des courbes algébriques seront transcendantes.

Il y a naturellement des exceptions à cette règle : les développées des courbes algébriques sont en effet algébriques. Ces exceptions seront fournies par les courbes algébriques dont l'arc est rectifiable, courbes que A. Serret a fait connaître dans le XXXV[e] Cahier (1853) du *Journal de l'École Polytechnique,* et qui ont été étudiées par Euler; voici la solution d'Euler :

$$x = \psi''(\theta)\cos\theta + \psi'(\theta)\sin\theta,$$
$$y = \psi''(\theta)\sin\theta + \psi'(\theta)\cos\theta,$$
$$s = \psi''(\theta) + \psi(\theta) + \text{const.};$$

$\psi$ doit être choisi fonction rationnelle de $\sin\theta$ et $\cos\theta$;

Laissant de côté ces courbes très particulières et les développées des courbes algébriques, on peut dire que les développantes des courbes algébriques sont transcendantes.

E. LEMOINE.

3111. (**1906**, 236) (G. LEMAIRE). — *Sur la tétralogie allégorique* (*arc, corde, flèche, sinus*). — Je suppose qu'il ne peut y avoir de date, ni d'auteur dans la terminologie rapportée par M. Wargny, d'après

Todhunter, puisque, d'après M. Schidlowsky, qui a écrit dans le *Journal de Mathématiques élémentaires,* en russe, un précis historique sur le développement de la trigonométrie sphérique, c'étaient les Indous qui employaient les cordes de leurs arcs (armes) au lieu des sinus. Et ce n'est qu'Albatani, originaire de la ville de Syrie, *Butena,* mort vers l'an 929 après J.-C., qui a introduit les *sinus*, de même *sinus verse* et les cosinus, et ce serait Abul Wefa qui a introduit tang comme une fonction trigonométrique ; c'est encore lui qui a introduit cot, séc et coséc, mais les travaux d'Abul Wefa ont été oubliés, de sorte que, vers le XV$^e$ siècle, Regiomontanus a réinventé la *tangente*. N. PLAKHOWO.

3121. (**1906**, 259) (*Trinitario*). — Voir *N. A.*, 1859. partie bibliographique, p. 60, où Terquem rappelle que le théorème pythagoricien, étendu par Gudermann au triangle sphérique, a été mentionné dans ce Journal, 1852, p. 409-412 et 1853, p. 67. L'article de 1852 est intitulé : *Théorème de Pythagore sphérique,* d'après Chr. Gudermann (*Cr.,* B. **42**, 1851, p. 280).

A la fin de l'Extrait, Terquem ajoute : « Ce beau théorème est le travail ultime du célèbre professeur de l'Université de Munster, qui a fait faire tant de progrès à la Géométrie de la sphère. Il a écrit ce théorème la veille de sa mort, et a été enlevé subitement à la science qu'il cultivait avec tant d'ardeur et de succès, le 21 septembre 1851. »

Le théorème est que, dans un triangle sphérique rectangle de côtés $\alpha$, $\beta$ et d'hypoténuse $\gamma$, si l'on construit sur chaque côté un carré sphérique, dont l'aire soit représentée par $a$, $b$, $c$, on aura

$$\mathfrak{L}\left(\frac{c}{4}\right) = \mathfrak{L}\left(\frac{a}{4}\right) + \mathfrak{L}\left(\frac{b}{4}\right),$$

la notation $\mathfrak{L}(z)$ désignant l'arc dont la tangente hyperbolique est $z$.

Un carré sphérique est un quadrilatère sphérique ayant ses quatre côtés égaux et les quatre angles égaux.

*Voir* aussi S. GÜNTHER, *Die Lehre von ... Hyperbelfunktionen,* Halle, 1881. p. 193-194.

Le *fac simile* du manuscrit (*novissima verba*) de Gudermann a été publié dans le *Journal de Crelle* (*loc. cit.*).

H. BROCARD.

# QUESTIONS.

**3166. [L¹5b]** Je trouve que si ABC est le triangle des pieds des normales issues d'un point M($\alpha$, $\beta$) à la parabole $y^2 - 2px = 0$, l'aire de ce triangle est

$$S = \tfrac{1}{2}\sqrt{p[8(\alpha - p)^3 - 27p\beta^2]}.$$

Il doit y avoir une formule analogue dans le cas de l'ellipse, pour l'aire du quadrilatère des pieds des normales. Je serais reconnaissant au correspondant qui me la signalerait.

E.-N. Barisien.

**3167. [L¹5d]** Je trouve que le lieu des points du plan de l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \qquad (c^2 = a^2 - b^2),$$

pour lesquels les quatre normales issues de ces points forment un faisceau harmonique, est la courbe

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 54a^2b^2c^4x^2y^2 = 0.$$

Or, je trouve la même courbe pour le lieu des points pour lesquels les quatre projections des pieds des normales sur l'un des axes forment une division harmonique.

Il doit y avoir une raison *géométrique* à cet accord? Laquelle?

E.-N. Barisien.

**3168. [K1c]** Je désire avoir les distances du point de Lemoine d'un triangle aux quatre centres des cercles tritangents à ce triangle, en fonction des côtés.

E.-N. Barisien.

3169. [I19c] Les deux équations

$$x + y + z = u + v + w,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

sont satisfaites pour

$$x = 7, \quad y = 18, \quad z = 23, \quad u = 9, \quad v = 14, \quad w = 25.$$

J'en voudrais connaître d'autres solutions.

E.-N. Barisien.

3170. [I] Je trouve que

$$2 = \frac{1^2 + 3^2}{1^2 + 2^2},$$
$$2^3 = \frac{18^2 + 26^2}{2^2 + 11^2}.$$

Peut-on exprimer, en général, $2^n$ par le rapport de deux sommes de deux carrés? E.-N. Barisien.

3171. [J1] On a dans une urne $n$ boules numérotées de 1 à $n$.

Combien y a-t-il de manières de retirer trois boules dont la somme des numéros soit inférieure à un nombre $n'$?

Cas où $n = 100$, $n' = 50$. E.-N. Barisien.

3172. [I] La formule

$$n^{2p+1} = \left[\frac{n^p(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n^p(n-1)}{2}\right]^2$$

montre que *tout nombre entier a ses puissances impaires égales à une différence de deux carrés.*

Peut-on avoir une formule analogue pour les puissances paires? *Arcitenens.*

3173. [J2c] Bibliographie d'Ouvrages traitant au point de vue du calcul des probabilités, et sérieusement, les jeux

suivants : *Roulette, Trente-et-Quarante, Baccarat, Écarté, Manille, Piquet, Whist, Bridge.*

R. DE MONTESSUS.

**3174.** [C2e] Je voudrais savoir si l'intégrale suivante, donnée dans le *Cours d'Analyse* de M. Goursat, peut être résolue au moyen des transcendantes connues : $\int x^{\mu} \tan x$.

$\mu$ est un nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$.

A. SIMIONOV.

**3175.** [V] Le mot *Almanach* est d'origine arabe d'après Savérien (*man*, lune) et Larousse (*manach*, compter).

*A priori*, la première étymologie paraît rationnelle, puisque l'Almanach d'autrefois n'était guère qu'une Table des mouvements de la Lune. Au surplus, les qualificatifs maniaque et lunatique sont tout à fait parents. Mais je n'insiste pas, surtout après les déclarations de M. P. Tannery (**1901**, 31).

Ce que je désirerais savoir, c'est si d'autres étymologies ont été proposées.

G. LEMAIRE.

**3176.** [V] Dans quelle série du Répertoire bibliographique se trouvent ou se trouveront groupés les Ouvrages relatifs à la Topographie?

Je pense que les fiches donnent tous les renseignements nécessaires à un achat (éditeur et prix) ou à une consultation (localité et bibliothèque)?

G. LEMAIRE.

**3177.** [V9] Dans la Notice biographique qui précède la 6e édition de l'*Uranographie* (Paris, Mallet-Bachelier, 1853), il est dit que Francœur avait préparé une Histoire des Mathématiciens, dont le premier volume était prêt à livrer à l'impression.

Cette Histoire a-t-elle paru?

G. LEMAIRE.

**3178.** [V] Existe-t-il des journaux français s'occupant exclusivement de Topographie?

G. LEMAIRE.

3179. **[V]** Qui a imaginé le premier d'attribuer un signe aux aires? G. LEMAIRE.

3180. **[K7]** Dans un plan, on donne six points $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $x$ et l'on mène les droites $aa'$, $bb'$, $cx$.

Désignons par $\gamma$ le point d'intersection des droites $ab$ et $a'b'$, par $\beta$ le point d'intersection de $ac$ et $a'x$, et enfin par $\alpha$ le point d'intersection de $bc$ et $b'x$. Soient aussi $o$ le point de concours des droites $aa'$ et $bb'$, $o'$ celui des droites $aa'$ et $cx$, et $o''$ celui des droites $bb'$ et $cx$.

On demande :

1° Le lieu du point variable $x$, lorsque l'on suppose que les points $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$ soient fixes, et que l'aire du triangle $\alpha\beta\gamma$ soit égale à une quantité donnée;

2° L'enveloppe de la droite $cx$.

Dans le cas où l'aire du triangle $\alpha\beta\gamma$ est égale à zéro, on retombe sur le théorème de Desargues. *Trinitario.*

3181. **[H11d]** Un correspondant pourrait-il me donner la bibliographie des travaux relatifs à l'itération?

*Ygrec.*

3182. **[O5q]** Je désire connaître les invariants du second ordre d'une surface en fonction des coefficients des deux formes fondamentales, calculés par rapport au groupe linéaire projectif de l'espace. G. DE SANTIS.

3183. **[A1c]** Peut-on démontrer que la puissance $n^{\text{ième}}$ de

$$a_s + \sum_{s=1}^{n} m_s a_s$$

est de la même forme? G. DE SANTIS.

3184. **[I19c]** Résoudre en nombres entiers l'équation

$$y^2 + z^2(1 - x^2) = z^3.$$

G. DE SANTIS.

**3185.** **[I 19c]** Résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^2 - x(y-z) + (y-z)^2 = t^3.$$

G. DE SANTIS.

**3186.** **[K 11 C]** Je désirerais une Bibliographie aussi complète que possible sur le quadrilatère inscrit à un cercle et circonscrit à un autre. H. BINI (Rome).

**3187.** **[I 3]** Je puis trouver une infinité de solutions en nombres entiers positifs et négatifs des congruences de la forme

$$\text{(G)} \qquad ax^m \pm cy^m \equiv 0 \pmod{M},$$

par une méthode de Wronski, que j'ai légèrement modifiée et généralisée.

Exemple :

$$\text{(A)} \qquad 5x^3 + 14y^3 \equiv 0 \pmod{M},$$

$$\text{Fact.}\,[5.14(n)^3 + 1] = 5.14(2)^3 + 1 = 561 = 3.11.17\ (^1).$$

Prenons par exemple $n = 17$, la congruence (A) devient

$$\text{(B)} \qquad 5x^3 + 14y^3 \equiv 0 \pmod{17}.$$

Posons

$$\text{(C)} \qquad 5x \equiv u \pmod{17},$$

on obtient

$$u^3 + 350y^3 \equiv 0 \pmod{17},$$

ou bien

$$u^3 + 10y^3 \equiv 0 \pmod{17},$$

$$\left.\begin{aligned} 10t^3 &\equiv -1 \\ t^3 &\equiv \phantom{-}5 \\ t &\equiv -6 \equiv 11 \end{aligned}\right\} \pmod{17}.$$

(1) Le nombre ($n$) est arbitraire.

Le calcul de la fonction aleph, effectué d'après les règles connues, donne

$$\aleph\left[\frac{17}{11}, 4\right]^{s} = 3.$$

On aura les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} u \equiv h + 3 \\ y \equiv 11h - 1 \end{array}\right\} \pmod{17}.$$

En posant

$$h = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm \ldots$$

et en tenant compte de la congruence (C), on trouve, pour la congruence (A), toutes les solutions en nombres entiers positifs et négatifs.

Je donne quelques solutions

$$\left.\begin{array}{lllllllll} x \equiv 4, & -6, & -3, & 1, & 7, & 8, & 0, & -2, & \ldots \\ y \equiv -1, & -7, & 5, & 4, & -6, & -2, & 0, & -8, & \ldots \end{array}\right\} \pmod{17}.$$

Il est évident que, en changeant le nombre arbitraire ($n$), on obtiendra de nouveaux modules M, et de nouvelles racines de la congruence (A).

Je désirerais savoir s'il y a une autre méthode plus simple, permettant d'obtenir toutes les racines en nombres entiers positifs et négatifs des congruences (G).

Mehmed Nadir (Alep).

# RÉPONSES.

755. (**1896**, 37; **1905**, 100) (H. Bourget). — *Biographie et Ouvrages de Legendre* (**1906**, 100, 191). — Additions diverses.

IX. Une courte biographie de Legendre et une liste de ses Ouvrages ont été données *N. A.*, 1845, p. 546-551 (extraits d'un article de Parisot, collaborateur de la *Biographie universelle* de Michaud).

X. La discordance est le moindre défaut des recueils biographiques. Aussi ne manque-t-elle pas de se produire ici à l'occasion de Legendre. Parisot (qui vient d'être mentionné), L. Grégoire, Didot-Hœfer, Léon Michaud et la *Grande Encyclopédie* le disent originaire de Toulouse; suivant d'autres, Legendre serait né à Paris, comme le rapportent Quérard, Dezobry et Bachelet (1857), Larousse et M. de Franqueville (*Le premier siècle de l'Institut de France,* Paris, 1895).

Pour décider cette question, il conviendrait, je crois, de faire des recherches aux archives de la mairie du XVI^e arrondissement de Paris (Auteuil) où, sans doute, on retrouvera l'extrait mortuaire de Legendre.

XI. Un portrait de Legendre est donné dans l'Ouvrage de Rebière : *Pages choisies des savants modernes.*

Au cimetière d'Auteuil, où il a été inhumé, il existe un monument commémoratif.

Enfin, une statue de pierre, par Lanson, lui a été élevée à l'Hôtel-de-Ville de Paris.

XII. On trouve à la Bibliothèque Nationale, Manuscrits, Anc. suppl. fr., n° 9118, la correspondance de Sophie Germain avec plusieurs mathématiciens, entre autres Legendre. Peut-être y existe-t-il quelques lettres de lui.

XIII. L'Académie des Sciences avait choisi comme sujet du grand prix des Sciences mathématiques en 1858 d'établir une proposition de Legendre sur la *Théorie des nombres* (1820, t. II, p. 76). Aucun Mémoire ne remporta de prix; il n'y eut qu'un encouragement donné à Ath. Dupré. Malheureusement la proposition était erronée; ce n'est qu'en 1873 que son inexactitude fut reconnue. (*Voir* C. Moreau, *N. A.*, p. 323-324.)

XIV. Les thèses de Mathématiques de Legendre, de 1770, ont été conservées aux Archives de l'Académie des Sciences, comme l'a fait connaître I.-J. Bienaymé (voir *N. A.*, 1857, Partie bibliog., p. 56-59). Le même article reproduit, pages 53-55, l'ode de Cosson à Legendre (seize strophes de quatre vers), qui se trouve ainsi plus accessible que le recueil cité de Fréron (**1906**, 101).

XV. Le rapport de Legendre cité ici, § V (**1906**, p. 193), a été réimprimé dans les *Œuvres complètes de Cauchy*, 1re série, t. I, p. 321-327 (7 novembre 1814).

XVI. La correspondance scientifique de Legendre paraît difficile à reconstituer. Je crois que plusieurs de ses lettres à Monge doivent exister dans les archives de la famille Eschassériaux, à Thénac. H. Brocard.

817. (**1896**, 85) (P. Tannery). — *Liste des courbes ayant reçu des noms particuliers* (**1897**, 103; **1898**, 13, 37; **1900**, 271). — En raison de l'intérêt qui s'attache au nom de Leibniz, je rappellerai une courbe oubliée ou écartée par M. Brocard : la courbe analytique du visage de l'homme.

Voici ce qu'en dit Savérien (*Dict. univ. de Math. et de Phys.*, 1753, t. I, p. 242) : « Ligne singulière inventée par M. Hudde, par laquelle il tâche d'exprimer tous les linéamens du visage d'un homme connu et de les définir par une équation algébrique. Une idée si extraordinaire a été communiquée à M. Leibniz dans les *Actes de Leipsic*, ann. 1700, p. 196; et il assure là, fort sérieusement, qu'il était en état de construire une pareille courbe. Cette construction n'a cependant jamais paru. » G. Lemaire.

837. (**1896**, 107; **1905**, 217) (E. Francken). — *Théorème sur la réversibilité des propositions* (**1906**, 39). — (Réponse complémen-

taire). Le Traité de F.-C. Hauber a paru à Reutlingen (Würtemberg), 1829. Le théorème en question se trouve dans le Chap. VII, § 287. Quant à son application et son extension par M. W. Drobisch (*Neue Darstellung der Logik mit Rücksicht auf Mathematik und Naturwissenschaften,* Leipzig, L. Voss, 1863; Anhang II, 2, p. 227), *voir* le Mémoire de S. Günther : *Ueber einige Anwendungen und Erweiterungen des Hauberschen Theorems* (*A. Gr.*, t. LVI, 1874, p. 26-40). H. Wielbitner (Spire).

**1477.** (**1899**, 74) (Émile Borel). — *Sur certaines fonctions entières* (**1905**, 14). — Voici quelques résultats pouvant se rattacher à la question **1477** :

I. D'après M. Wiman (*Arkiv. för Mathematik,* t. II) :

Soit $F(z)$ une fonction entière d'ordre $\rho$ fini $> 0$ et $< \frac{1}{2}$; on peut trouver une infinité de cercles, de rayons $r$ indéfiniment croissants, sur chacun desquels on a, dans le plan des $z$ :

$$|F(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}},$$

si petit que soit le nombre fixe positif $\varepsilon$. On sait que, dès que $r = |z|$ est assez grand, on a toujours $|F(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$. *Voir* encore : Ruben Mattson, *Contribution à la théorie des fonctions entières* (Thèse), p. 71 et suivantes. Upsal, Almqvist et Wiksell, 1905.

J'ai établi, d'autre part, les deux propriétés suivantes :

II. Si $f(z) = e^{iz^\rho} - e^{-iz^\rho}$ ($\rho$ entier), la fonction $f(z)f(ze^{i\psi})$ a son module $\geqq e^{\mu r^\rho}$ ($\mu$, $\psi$ constantes, $r = |z|$) pour une infinité de valeurs de $\psi$, dès que $r$ est assez grand.

III. Le produit canonique

$$\Phi(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^p}{pa_n^p}},$$

d'ordre fini $\rho$ non entier, a son module $\leqq 1$ dans un secteur fini S du plan des $z$, quand toutes les racines $a_n$ sont comprises dans un certain secteur fini S'. Ainsi, lorsque $p = 1$ et que l'angle de S' est $90° - 2\varepsilon$ ($\varepsilon$ fixe $> 0$), l'angle de S est $\geqq 2\varepsilon$.

Ces deux propriétés peuvent offrir quelque intérêt au point de vue

de l'étude des séries divergentes sommables (*A. E. N.*, 1903, p. 506).

IV. *Voir* encore le Mémoire de M. Leau : *Etude sur les fonctions entières orientées, d'ordre réel non entier* (*A. E. N*, 1906, p. 33-120).

E. MAILLET.

1515. (**1899**, 127) (H. BROCARD). — *Didier Dounot* (**1900**, 33, 150; **1901**, 115). — Le hasard m'a fait trouver, relié avec le Traité d'Oronce Fine sur les cadrans solaires, un Ouvrage rare qui a pour titre :

« *Confutation de l'invention des longitudes ou de la mecometrie de l'eymant. Cy devant mise en lumiere souz le nom de Guillaume le nautonnier sieur de Castel-franc au haut Languedoc.* Par Dounot de Bar-Leduc Docteur ès droicts, et professeur en la divine Mathematique aux academies du Roy. Dediee a Sa Maiesté. A Paris, Par François Huby, ruë S. Iaques au Soufflet vert, devant le College de Marmoutier, Et en sa boutique au Palais en la gallerie des prisonniers. MDCXI Avec privilege du Roy. »

Ce livre de 4-42 feuillets est, d'un bout à l'autre, une réfutation énergique et savoureuse de l'œuvre de Castelfranc : il faudrait avoir celle-ci pour bien juger. Je me borne à détacher quelques passages propres à donner la signification exacte du mot *mécométrie*.

« Guillaume le Nautonnier sieur de Castelfranc, ayant leu dans Jean Baptiste de la Porte, Michel Cognet, Livius Sanutus, Toussaincts Bessard et autres, que l'on pouvoit trouver les longitudes de la geographie par les declinaisons du compas Nautique ou Bussolle, et principallement dans les deux derniers : il s'est imaginé qu'il en pourroit venir à bout s'il entreprenoit ce travail, et qu'il ne pourroit trouver plus belle occasion pour s'obliger la posterité... Ce n'est pas que la chose soit tant laborieuse, qu'il faille un temps infiny pour la conduire à fin; mais les observations sont tant differentes, qu'il est impossible de les rapporter souz une seule regle. Guillaume Gilbert et Simon Stevin doctes personnages de ce siecle, se sont à ce que j'entens fort exercez à ceste luitte, sans proffit : sinon que l'un a trouvé une nouvelle façon de trouver les ports de mer par les declinaisons de l'aiguille, et l'autre a produit une infinité de belles observations sur la pierre d'eymant. Et mesme ce jeu n'a point

despleu à Monsieur Alleaume vray Archimede François, lequel m'a communiqué ce qu'il a trouvé sur cette recherche de la longitude par les declinaisons de l'aiguilles... [Castel-franc] s'estant imaginé que l'aiguille declinoit tousjours vers un certain point, qu'il appelle Pol de l'eymant... il a posé ceste distance de 23. degrez, et suyvant les maximes de Toussainct Bessard, il a calculé ses tables qu'il appelle Mecographiques, pour tous les degrez de longitude et latitude du monde. » [Feuillet 1.]

» Toute sa doctrine est divisée en six livres, outre le livre de Geographie, et le livre de la Mecometrie Arithmetique... Au cinquiesme, et au livre de la Mecometrie Arithmetique, il apprend à practiquer sa doctrine par les triangles spheriques. » [Feuillet 2.]

» Voicy comment je conçois ceste doctrine Mecometrique, puisqu'il plaist à Dieu que je l'appelle ainsi.

» Premierement il falloit prouver que l'aiguille ne se destourne et ne tend qu'à un seul point, en quelque part du monde qu'elle soit.

» Secondement, il falloit demonstrer la distance d'iceluy poinct au pol du monde, et monstrer comment on en pouvoit avoir la cognoissance.

» Tiercement, comment par la distance d'iceluy poinct au pol du monde, par la latitude du lieu, et la declinaison de l'aiguille en iceluy, on pouvoit trouver la longitude pour chacun lieu : Et en convertissant, que par la longitude, latitude, et distance des polles. on pouvoit trouver la declinaison de l'aiguille pour chacun lieu. » [Feuillet 3, verso.]

Dounot s'appuie sur l'autorité de Stevin qu'il semble avoir lu avec soin, et qui d'après lui condamne indirectement Castel-franc, lequel lui aurait envoyé par l'*Escalle* une copie de son ouvrage. [Feuillet 25.]

Dounot fait aussi ressortir d'une façon pittoresque la mauvaise foi de Castel-franc, qui « tire aux dens toutes les observations, pour les faire convenir à sa doctrine » [feuillet 11, verso], et qui, si on lui apporte une observation contraire à ses maximes, répond « qu'une hirondelle ne fait pas le Printemps » [feuillet 3, recto].

G. Maupin.

**2283.** (**1902**, 36) (W. Ahrens). — *Au sujet de J. Liouville* (**1902**, 215; **1906**, 13). — I. Il est vivement à regretter que J. Bertrand n'ait

pas donné de notice biographique sur J. Liouville. Nul n'était mieux documenté que lui sur la carrière scientifique de ses confrères et sur l'histoire anecdotique de l'Académie des Sciences. Il suffit, pour s'en convaincre, de parcourir les Notices qu'il a publiées. C'est ainsi que, dans un article de la *Revue des Deux Mondes*, je relève un témoignage relatif à J. Liouville : « Candidat à une chaire du Collège de France, Libri, tout récemment, sur le rapport de Biot et avec l'appui chaleureux de Michelet, avait été préféré à l'un des géomètres les plus marquans d'alors, Joseph Liouville. » [Souvenirs académiques. Un article anonyme de la *Revue des Deux Mondes* (15 septembre 1896).] (Il s'agit d'un article de G. Libri, paru le 15 mars 1840.)

II. J. Liouville a joué un rôle politique, mais de courte durée, au sujet duquel on trouve les renseignements suivants dans le *Dictionnaire des Parlementaires français*, de Robert, Bourloton et Cougny :

Liouville (Joseph), représentant du peuple en 1848. Connu pour ses opinions démocratiques, il se mêla, en 1848, au mouvement politique et fut élu le 23 avril représentant de la Meurthe à l'Assemblée constituante, le deuxième sur 11, par 96687 voix (100120 votants). Il siégea parmi les membres du parti démocratique modéré, fit partie du Comité des finances et vota *pour* le bannissement de la famille d'Orléans, *contre* les poursuites contre L. Blanc et Caussidière, *pour* l'abolition de la peine de mort, *contre* l'impôt progressif, *contre* l'incompatibilité des fonctions, *contre* l'amendement Grévy, *contre* la proposition Rateau, *contre* l'expédition de Rome. Non réélu à la Législative, il reprit ses études,

III. Il a eu pour gendre M. Célestin de Blignières (10 mars 1874).

IV. Dans l'Ordre national de la Légion d'honneur, J. Liouville a été nommé chevalier le 29 avril 1838, officier le 13 août 1861, commandeur le 4 août 1875.

V. J'ignore si des écrits de J. Liouville ont été conservés dans les bibliothèques publiques. Tout récemment, le Catalogue de la librairie Hermann, à Paris, faisait mention de deux recueils manuscrits de J. Liouville, inédits et très importants pour l'histoire des Sciences :

1° Le *Cours de Physique de l'École Polytechnique*, par Dulong (environ 100 pages in-4°);

2° Sept cahiers (sur huit; manque le cinquième) du *Cours de Physique mathématique*, professé au Collège de France par A.-M. Ampère. 1826-1827 (environ 300 pages in-4°).

Personnellement, J. Liouville n'a publié aucun Ouvrage d'enseignement. Il a annoté la *Géométrie* de Monge et les *Leçons d'Analyse* de Navier à l'École Polytechnique (1840). Il a édité les *Œuvres de Galois* et collaboré à l'*Encyclopédie du XIX^e Siècle*.

VI. A l'Académie des Sciences, J. Liouville a occupé le fauteuil IV de Pingré.

VII. Sur la tombe de Sturm, J. Liouville a pris la parole au nom de l'Académie des Sciences (décembre 1855).

VIII. *L'Intermédiaire des Chercheurs et Curieux* a inutilement demandé (t. XIX, 1886, col. 235) la profession de foi de J. Liouville aux élections de 1848. Ce document se trouve à la Bibliothèque Nationale. H. Brocard.

**2601.** (**1903**, 152) (G. Ricalde). — *Trouver quatre nombres tels que leur somme, la somme des produits deux à deux, la somme des produits trois à trois, et le produit des quatre soient des carrés.* — Ce problème se trouve résolu dans les *Commentationes Arithmeticæ* d'Euler, t. I, p. 450-458. E. Fauquembergue.

**2716.** (**1904**, 8) (E. Maillet). — *Fonctions entières* (**1904**, 130, 202). — *Voir* ma réponse à 1477 (**1907**, 57). E. Maillet.

**2747.** (**1904**, 68) (P.-F. Teilhet). — *Impossibilité en nombres entiers de l'équation* $x(x^2-1)=3y^2$ (**1904**, 182). — Les facteurs $x$ et $x^2-1$ étant premiers entre eux, l'un doit être un carré et l'autre le triple d'un carré. Or, $x^2-1$ ne peut être un carré; donc la seule hypothèse à faire est

$$x=z^2,\qquad x^2-1=3u^2,$$

d'où

$$z^4-1=3u^2\quad\text{ou}\quad(z^2+1)(z^2-1)=3u^2.$$

Si $z$ était pair, les facteurs $z^2+1$ et $z^2-1$ seraient impairs et premiers entre eux. L'un d'eux devrait être un carré et l'autre le triple d'un carré. Or, ni l'un ni l'autre ne peut être un carré.

Supposons donc $z$ impair. Dans ce cas, $z^2+1$ est le double d'un

impair; $u = 2pq$. La seule décomposition à essayer est

$$z^2 + 1 = 2p^2, \qquad z^2 - 1 = 6q^2,$$

d'où

$$(1) \qquad z^2 = p^2 + 3q^2,$$

$$(2) \qquad 1 = p^2 - 3q^2.$$

Toutes les solutions de l'équation (1) sont données par les formules

$$z = m^2 + 3n^2, \qquad \pm p = m^2 - 3n^2, \qquad q = 2mn.$$

L'équation (2) devient

$$1 = m^4 - 18m^2n^2 + 9n^4$$

ou

$$8m^4 + 1 = 9(m^2 - n^2)^2 = 4r^2 + 4r + 1,$$

$$m^4 = \frac{r(r+1)}{2}.$$

Or, Euler et Legendre ont démontré qu'aucun nombre triangulaire, excepté l'unité, n'est égal à un bicarré.

Donc l'équation proposée n'admet que les solutions $x = 0$, $x = \pm 1$, $y = 0$. E. FAUQUEMBERGUE.

2868. (**1905**, 10) (A. CLAUSE). — *Incidence d'une date* (**1906**, 252; **1907**, 31). — Cette question a été posée sous différentes formes (**274**, **275**, **1181**, **1182**); son objet est double :

I. Jour de la semaine correspondant à une date donnée.

II. Date de la fête de Pâques dans une année donnée.

La résolution de ces problèmes se trouve partout, sous forme de Tableaux, calendriers perpétuels, etc. Il ne s'agit donc, à mon sens, que de trouver les moyens de les résoudre, quand on n'a sous la main aucun document, et même de pouvoir le faire par calcul mental, à l'instar d'Inaudi et disciples.

C'est pour répondre à ce desideratum, qui semble intéresser quelques lecteurs, que je présente les formules suivantes que j'ai souvent éprouvées. Je me borne à les donner, sans rappeler les règles bien connues du comput, et sans la démonstration que tout le monde refera sans peine.

I. *Jour de la semaine correspondant à une date donnée.* — Une date donnée comprend : le quantième $q$ du mois; le mois $m$;

le millésime $A = 100s + a$, $s$ étant la partie séculaire, $a$ la partie complémentaire variant de 0 à 99.

Ces éléments, ainsi que le jour J de la semaine, entrent dans le calcul sous forme de nombres représentatifs, donnés par le Tableau ci-après :

| ÉLÉMENTS. | CALENDRIER GRÉGORIEN (nouveau style) depuis le 15 octobre 1582. | CALENDRIER JULIEN (ancien style) encore en vigueur en Orient. |
|---|---|---|
| Jours. | D, L, Ma, Me, J, V, S | |
| Nombres J. | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 0 | |
| Mois. | Janv. Févr. Mars Avr. Mai Juin Juil. Août Sept. Oct. Nov. Déc. | |
| Nombres $m$. | 1 4 4 0 2 5 0 3 6 1 4 6 (1) | |
| Quantième. | $q$, tel qu'il est donné. | |
| Partie séculaire. | $5R\frac{s}{4} - 1$ (2). | $4 - s$ (2). |
| Partie complémentaire. | $a + E\frac{a}{4}$. | $a + E\frac{a}{4}$. |
| Formule donnant J cherché. | $J = q + m + 5R\frac{s}{4} - 1 + a + E\frac{a}{4} \pmod 7$. | $J = q + m + 4 - s + a + E\frac{a}{4} \pmod 7$. |
| Correction. | Dans les années bissextiles, sauf les années centenaires, dont la partie séculaire n'est pas divisible par 4, on retranchera 1 au nombre J pour les mois de janvier et de février. | Dans les années bissextiles, y compris toutes les années centenaires, on retranchera 1 au nombre J pour les mois de janvier et de février. |

(1) Les nombres $m$ sont faciles à retrouver, car ils représentent, dans une année commune, le 1er de chaque mois, quand le 1er janvier est un dimanche ou 1. Mais voici un moyen mnémonique qui m'a toujours réussi. Si l'on considère la suite des nombres formés par la réunion des trois nombres de chacun des trimestres, on obtient

$$12^2, \quad 5^2, \quad 6^2, \quad 12^2 + 2,$$

qui les fixent dans la mémoire.

(2) Je représente, d'une manière générale, par $E\frac{P}{Q}$, $R\frac{P}{Q}$ le quotient entier et le reste de la division des entiers P et Q.

La formule $5R\frac{s}{4} - 1$, compliquée en apparence, ne donne que la suite périodique décroissante

$$6, \quad 4, \quad 2, \quad 0, \quad 6, \quad \ldots,$$

pour les valeurs de $s$,

$$16, \quad 17, \quad 18, \quad 19, \quad 20, \quad \ldots,$$

ce qui est facile à retenir.

$4 - s$ est ainsi une expression très simple.

II. *Date de la fête de Pâques dans une année donnée.* — La fête de Pâques est fixée au dimanche de mars ou d'avril qui suit la

| ÉLÉMENTS. | CALENDRIER GRÉGORIEN (nouveau style) depuis le 15 octobre 1582. | CALENDRIER JULIEN (ancien style) depuis le concile de Nicée (325). |
| --- | --- | --- |
| Nombre d'or $\nu$ | $\nu = R\frac{A+1}{19}$, | $\nu = R\frac{A+1}{19}$, |
| Épacte $\varepsilon$. | $\varepsilon = R\dfrac{11 \times R\frac{A}{19}}{30} + \gamma$ (1).<br>$\gamma =$ 1 de 1582 à 1699 ;<br>0 de 1700 à 1899 ;<br>$-1$ de 1900 à 2299, .... | $\varepsilon = R\dfrac{11\left(R\frac{A}{19}+1\right)}{30}$.<br>Sans correction $\gamma$. |
| Quantième L de la pleine Lune. | $L = 44 - \varepsilon$ $\begin{cases} \text{mars si } L \leqq 31, \\ \text{avril si } L > 31, \end{cases}$<br>si $44 - \varepsilon$ est $\geqq 21$.<br>$L = 44 - \varepsilon - 1$ (avril),<br>si $44 - \varepsilon$ est $< 21$. | $L = 47 - \varepsilon$ $\begin{cases} \text{mars si } L \leqq 31, \\ \text{avril si } L > 31. \end{cases}$<br>si $47 - \varepsilon$ est $\geqq 21$.<br>$L = 47 - \varepsilon - 1$ (avril),<br>si $47 - \varepsilon$ est $< 21$. |
| J, jour de la semaine correspondant au quantième L. | Suivant la formule du problème I. | Suivant la formule du problème I. |
| Date P du jour de Pâques. | $P = L + 1 - J$ ou $L + 1$ si $J = 0$,<br>$P = L + 8 - J$ pour les autres valeurs de J. | $P = L + 1 - J$ ou $L + 1$ si $J = 0$,<br>$P = L + 8 - J$ pour les autres valeurs de J. |
| Exceptions et cas particuliers provenant des règles d'intercalation des épactes. | 1° Si $\varepsilon = 25$, on y substituera 24, si $\nu$ est $\leqq 11$, 26, si $\nu$ est $> 11$.<br>2° Si le calcul donne $P = 26$ A, on y substituera $P = 19$ A (correction due à la définition donnée). | Sans aucune exception, ni cas particulier. |

(1) L'expression $R\frac{A}{19}$ peut se simplifier, car on a

$$A = 100s + a \equiv 5s + a \equiv -5(19 - s) + a \pmod{19}.$$

Pour $s = 19$ : $R\frac{A}{19} = R\frac{a}{19}$.

pleine Lune survenant au plus tôt le 21 mars. Cette définition, un peu différente du texte officiel, mais plus simple pour le calcul, conduit aux mêmes résultats, sauf une exception unique indiquée au Tableau ci-dessus.

Ce Tableau fait connaître la suite des calculs conduisant à la date de Pâques.

*Type de calcul* (comprenant les deux problèmes). — Année 1907 :

$$\gamma = -1, \qquad R\frac{7}{19} = 7, \qquad R\frac{77}{30} = 17, \qquad \varepsilon = 17 - 1 = 16,$$

$$44 - 16 > 28 + 21, \qquad L = 28\,M,$$

$$J = 28 + 4 + 0 + 7 + 1 \equiv 5 \pmod 7 \qquad (\text{jeudi}),$$

$$8 - 5 = 3, \qquad P = 28\,M + 3 = 31\,M.$$

Les éléments des Tableaux précédents ne sont nullement inédits. Mon modeste travail a consisté à les disposer et à les grouper de manière à donner le plus possible un caractère mnémonique aux formules.

Je ne vois pas comment on pourrait en trouver de plus simples. Celles qui touchent à la fête de Pâques le sont déjà plus, me semble-t-il, que celles de Gauss (**274**, **1895**, 81). Mais je ne connais pas les formules de Delambre (**275**, **1894**, 150), et je ne suis pas à même de consulter les références indiquées par M. Brocard (**1899**, 119; **1906**, 252). En faisant cette réserve, je serais heureux qu'un correspondant pût fournir explicitement ces renseignements.

L. Dujardin.

*Calendrier donnant l'incidence d'une date quelconque.*

I.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| GREGOR. | Réforme grégor. le V 5/15 octobre 1582. | | | 1700 | 1800 | 1500 1900 | 1600 2000 |
| JULIEN | 100 | 300 | 500 | 0 | 200 | 400 | 600 |
| | 800 | 1000 | 1200 | 700 | 900 | 1100 | 1300 |
| | 1500 | 1700 | 1900 | 1400 | 1600 | 1800 | 2000 |
| | D | V | M | L | S | J | N |
| | L | S | J | N | D | V | M |
| | N | D | V | M | L | S | J |
| | M | L | S | J | N | D | V |
| | J | N | D | V | M | L | S |

II.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Juillet, Avril. | | | | | |
| Septembre, Déc. | | | | | |
| Juin. | | | | | |
| Févr., Mars, Nov. | | | | | |
| Août. | | | | | |
| Mai. | | | | | |
| Janvier, Octobre. | | | | | |
| 1 | 8 | 15 | 22 | 29 | QUANTIÈMES. |
| 2 | 9 | 16 | 23 | 30 | |
| 3 | 10 | 17 | 24 | 31 | |
| 4 | 11 | 18 | 25 | | |
| 5 | 12 | 19 | 26 | | |
| 6 | 13 | 20 | 27 | | |
| 7 | 14 | 21 | 28 | | |

III.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 05 | 11 | 16 | 22... |
| 00 | 06 | 12 | 17 | 23... |
| 01 | 07 | 12 | 18 | : |
| 02 | 08 | 13 | 19 | : etc. |
| 03 | 08 | 14 | 20 | |
| 04 | 09 | 15 | 20 | |
| 04 | 10 | 16 | 21 | |

*Mode d'emploi.* — Le Tableau II est mobile; le tirer jusqu'à ce que le mois considéré (par exemple août) se trouve à la hauteur de l'année considérée (par exemple ..09), dont on lit les deux derniers chiffres au Tableau III.

Le quantième du mois (par exemple 15) se trouve alors à la hauteur du jour correspondant, qu'on lira dans le Tableau I à la colonne où le millésime considéré est indiqué : par exemple, s'il s'agit de 1809, on lira, dans la cinquième colonne s'il s'agit d'une date grégorienne : mardi ; dans la sixième colonne s'il s'agit d'une date julienne : dimanche.

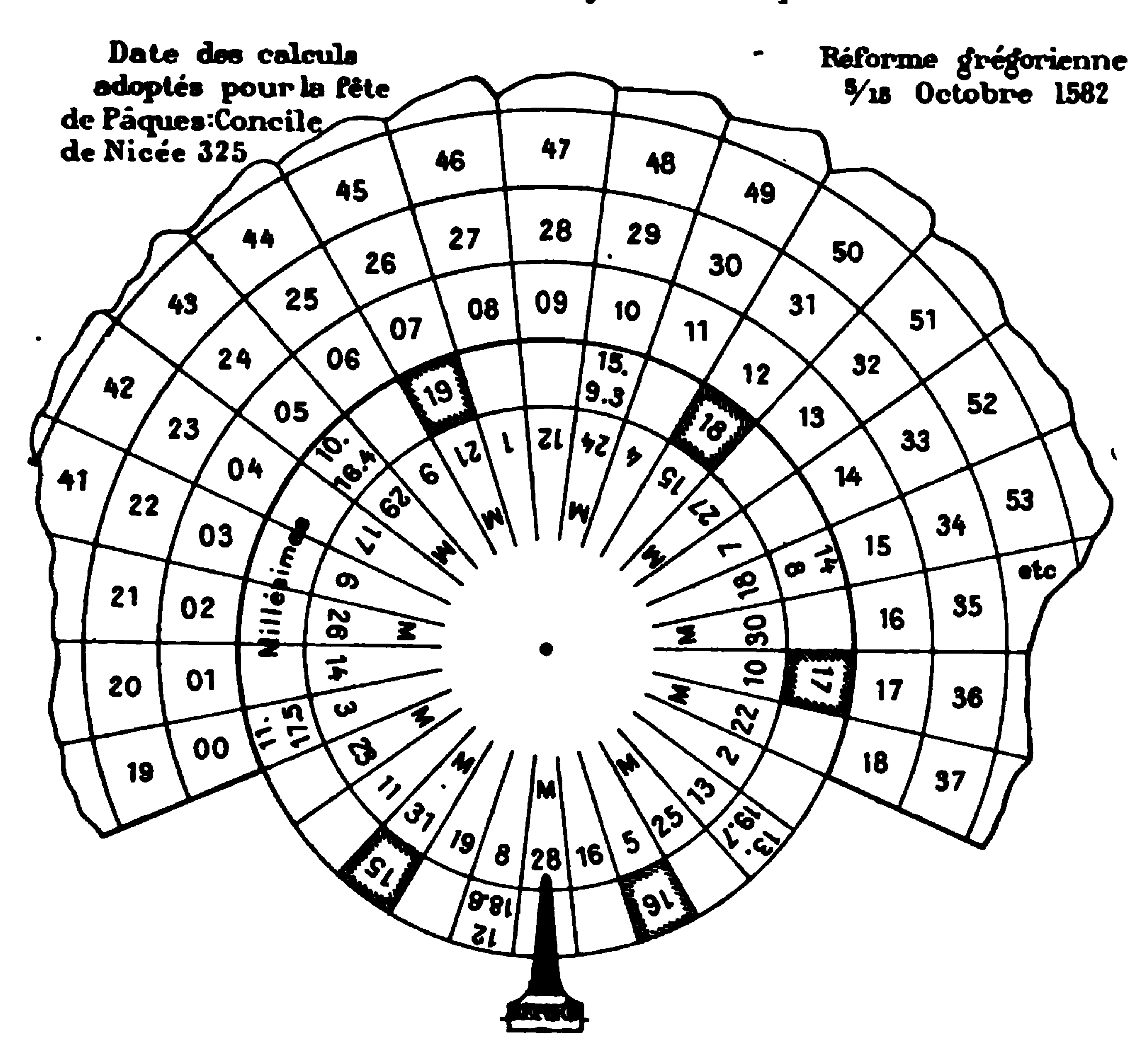
Le 15 août 1809 grégorien fut un mardi ; la même date julienne fut un dimanche.

*Note.* — Certaines années (les bissextiles) sont répétées deux fois au Tableau III; elles sont soulignées la première fois.

Se servir des années soulignées *seulement pour les mois soulignés* (janvier et février).

Pour l'année séculaire 00 soulignée deux fois, ne s'en servir que pour janvier et février, et seulement si le millésime correspondant qui figure au Tableau I est souligné également (il l'est toujours en calendrier julien).

*Incidence de la fête de Pâques.*




*Mode d'emploi.* — Le cercle central est mobile autour de son centre; le faire pivoter jusqu'à ce que le millésime considéré (par exemple, 19...) vienne en face du secteur de la couronne extérieure où est écrite l'année considérée (par exemple, ...07).

Le repère (qui est fixe) indique alors la date 28 mars, qui est celle de la lune pascale.

On cherche alors au calendrier l'incidence du 28 mars 1907 : on trouve jeudi. La fête de Pâques tombera le dimanche suivant, 31 mars 1907.

*Note.* — 1° Les dates des lunes pascales surmontées de M sont du mois de mars ; les autres, du mois d'avril.

2° Au calendrier, il faudra toujours prendre le dimanche *qui suit* la lune pascale, *même si* la lune pascale est elle-même un dimanche.

3° Pour le calendrier grégorien, se servir des millésimes entourés de hachures ; se servir des autres pour le calendrier julien.

DECERF.

M. Decerf n'a pas cru devoir décrire les calendriers ci-dessus en détail ; il est prêt à en fournir une description détaillée aux correspondants de l'*Intermédiaire* qui le désireraient ; écrire à M. Decerf, 57, rue Esquermoise, à Lille (Nord). LA RÉDACTION.

**2890.** (**1905**, 52) (E. MAILLET). — *Voir B. D.*, 1905, Ire Partie.

G. DARBOUX. — Sur les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution (109-119).

E. ESTANAVE. — Construction de surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution, définies par M. G. Darboux (225-236).

H. BROCARD.

**2937.** (**1905**, 149) (G. LEMAIRE). — *Marées fluviales* (**1906**, 27, 202). — *Voir* aussi :

COMOY. — Étude pratique sur les marées fluviales et notamment sur le mascaret, 2 vol. in-8°, 1881. H. BROCARD.

**2964.** (**1905**, 242) (G. LEMAIRE). (**1906**, 120, 217). — Une très intéressante Notice sur *Les Lunettes nouvelles à prismes* vient de paraître dans les *Archives trimestrielles de l'Institut grand ducal de Luxembourg* (**1906**, 134-136) sous la signature de M. A. Mullendorff. Elle expose les derniers perfectionnements apportés à la lunette Porro par l'institut optique Carl Zeiss à Iéna.

H. BROCARD.

**2971.** (**1905**, 265) (E.-N. BARISIEN) — *Distance des points* G. K. (**1906**, 74, 152, 253 ; **1907**, 15). — Les expressions de $\overline{GK}^2$ (p. 76 et 152)

coïncident avec celle que M. Poulain a donnée au *J. E.* dès 1889 (quest. 348). *Voir* la solution B. Sollertinsky (*J. E.*, 1893, p. 91-92).

Il sera intéressant de rappeler que les points G et K, conjugués isogonaux, ont une autre liaison géométrique : ce sont les foyers de l'*ellipse de Lemoine,* dont les axes 2A et 2B s'obtiennent par les relations

$$\overline{KG}^2 = A^2 - B^2,$$

$$\frac{4S^2}{3m^2} = B^2 \qquad (m^2 = \Sigma a^2).$$

L'ellipse est inscrite au triangle et touche les côtés aux pieds des symédianes des triangles BGC, CGA, AGB (E. Vigarié, *J. S.*, 1889, p. 58).

H. Brocard.

**2973.** (**1905**, 266) (E. Maillet). — *Application des Mathématiques aux Travaux publics* (**1906**, 121). — La librairie Teubner, Leipzig, vient de publier un Ouvrage relatif aux courbes techniques importantes intitulé *Leitfaden der technisch wichtigen Kurven,* par le Dr P. Ebner.

J. Rose.

**2980.** (**1905**, 268) (A. Werebrusow). — *Sommes égales de deux cubes.* — Dans le *Mémoire de Desboves* sur l'équation

$$aX^m + bY^m = cZ^n$$

(*N. A.*, 1879) se trouve l'identité

$$(y'^3 - y^3)(x'^2y - x^2y')^3 + (x^3 - x'^3)(y'^2x - y^2x')^3$$
$$\equiv (x^3y'^3 - y^3x'^3)(xy - x'y')^3.$$

Soit

$$x^3 + y^3 = x'^3 + y'^3,$$

d'où

$$y'^3 - y^3 = x^3 - x'^3 = K.$$

La division des deux membres de l'identité par $K(xy - x'y')^3$ donne

$$\left(\frac{x'^2y - x^2y'}{xy - x'y'}\right)^3 + \left(\frac{y'^2x - y^2x'}{xy - x'y'}\right)^3 = \frac{x^3y'^3 - y^3x'^3}{K}$$
$$= x^3 + y^3 = x'^3 + y'^3.$$

A cause de la symétrie on peut échanger $x$ et $y$ ou $x'$ et $y'$, et l'on

a une autre décomposition

$$\left(\frac{y'^2 y - x^2 x'}{xy - x'y'}\right)^3 + \left(\frac{x'^2 x - y^2 y'}{xy - x'y'}\right)^3;$$

ce sont les formules de M. Werebrusow.

E. Fauquembergue.

2995. (**1906**, 5) (H.-B. Mathieu). — *Déplacement d'un solide* (**1906**, 128). — Une démonstration « fondée sur des considérations cinématiques assez élémentaires pour qu'elle puisse être considérée comme géométrique » vient d'être exposée par M. J. Neuberg dans un article de *Mathesis*, 1906, 233-237 : *Sur un théorème de Chasles.*

La Rédaction.

3033. (**1906**, 62) (E.-N. Barisien). — *Enveloppe des droites joignant les pieds des normales menées à une ellipse par un point de la courbe* (**1906**, 207, 225). — La réponse de M. Michel (**1906**, 225) n'est pas exacte dans sa deuxième partie. On le voit en considérant le cas des tangentes communes à l'ellipse et à l'enveloppe cherchée qui doivent correspondre aux points communs à l'ellipse et à sa développée : or, celle-ci étant du sixième ordre, c'est douze intersections qu'il faut compter, et, par conséquent, l'enveloppe cherchée est de la sixième classe. C'est ce que j'ai prouvé analytiquement pour le cas plus général où le lieu du point d'émission des normales est une ellipse concentrique et homothétique à l'ellipse donnée.

Il est facile du reste de voir d'où vient l'erreur de M. Michel. Dans l'équation considérée par lui il a, par inadvertance, substitué le premier membre de l'équation de la normale en M à celui de l'équation de la droite $\overline{MP}$, qui est tout autre et qui dépend de la racine cubique d'une fonction entière des lignes trigonométriques de l'angle excentrique $\varphi$.

*E.-A. Majol.*

3034. (**1906**, 62) (H.-B. Mathieu). — *Résolution en nombres entiers d'une équation* (**1906**, 255; **1907**, 32). — L'équation donnée peut être écrite sous la forme

$$(x^2 - 2xy - y^2 + z)(x^2 - 2xy - y^2 - z) = -8x^2y^2.$$

Si $u$ désigne un nombre rationnel indéterminé, la résolution de

l'équation proposée se ramène à la résolution du système suivant :

$$x^2 - 2xy - y^2 + z = -\frac{4x^2}{u},$$

$$x^2 - 2xy - y^2 - z = 2uy^2.$$

En éliminant $z$ nous avons

$$(u+2)x^2 - 2uxy - u(u+1)y^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{u \pm \sqrt{u^3 + 4u^2 + 2u}}{u+2}.$$

Ainsi, la résolution en nombres entiers de l'équation donnée dépend de la résolution en nombres rationnels de l'équation

$$u^3 + 4u^2 + 2u = v^2.$$

En tenant compte de la solution évidente

$$u = -1, \qquad v = 1,$$

posons

$$u = t - 1, \qquad v = kt + 1,$$

nous avons

$$t^3 + (1 - k^2)t^2 - (3 + 2k)t = 0.$$

Soit

$$k = -\frac{3}{2},$$

nous trouvons alors

$$t = \frac{5}{4},$$

et ensuite

$$u = \frac{1}{4}, \qquad v = \frac{7}{8},$$

et, conformément à cela,

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{x}{y} = -\frac{5}{18}.$$

Semblablement, en posant encore

$$u = w + \frac{1}{4}, \qquad v = mw + \frac{7}{8},$$

nous trouvons

$$u = \frac{961}{784}, \qquad \frac{x}{y} = -\frac{155}{252}, \qquad \frac{x}{y} = \frac{10819}{7868},$$

et ainsi de suite indéfiniment.

Observons que, si les nombres entiers $x = \alpha$, $y = \beta$ satisfont à l'équation donnée, les nombres $x = n\alpha$, $y = n\beta$ et $x = n\beta$, $y = -n\alpha$, où $n$ est un nombre entier arbitraire, y satisfont aussi.

Voici le Tableau des solutions positives et premières entre elles, où $z$ est donné par la formule $z = (x - y)^2 - 2(u + 1)y^2$ :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x = 1$, | 18, | 252, | 10 819, | ... |
| $y = 2$, | 5, | 155, | 7 868, | ... |
| $z = 9$, | 281, | 117 041, | 266 865 489, | ... |

E. Gregorief (Kazan).
[Traduit du russe. (La Réd.)]

3035. (1906, 62) (H.-B. Mathieu). — *Identité* (1906, 184). — L'équation de M. H.-B. Mathieu constitue un cas particulier de l'équation

$$A^2 + B^2 = 2C^n,$$

pour la solution de laquelle en nombres premiers entre eux on peut donner les formules suivantes :

$$C = x^2 + y^2, \qquad A = a + b, \qquad B = a - b,$$

où l'on pose

$$a = x^n - C_n^2 y^2 x^{n-2} + C_n^4 y^4 x^{n-4} - \ldots,$$
$$b = C_n^1 y x^{n-1} - C_n^3 y^3 x^{n-3} + C_n^5 y^5 x^{n-5} - \ldots.$$

Dans le cas où $n = 4$, nous avons l'identité indiquée dans la question, $\lambda$ désignant un facteur indéterminé.

E. Gregorief (Kazan).
[Traduit du russe. (La Réd.)]

# IVᵉ CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS. ROME, 1908.

Ce Congrès aura lieu à Rome, du 6 au 11 avril 1908. Le Comité d'organisation a institué une série de Conférences qui pourront donner une idée de l'état actuel des principales branches des Mathématiques et de leurs applications. MM. G. Darboux, A.-R. Forsyth, D. Hilbert, F. Klein, H.-A. Lorentz, G. Mittag-Leffler, S. Newcomb, E. Picard, H. Poincaré ont accepté de faire ces Conférences dans les séances plénières.

Le Congrès comprendra quatre sections : 1° Arithmétique, Algèbre, Analyse; 2° Géométrie; 3° Mécanique, Physique mathématique, Mathématiques appliquées; 4° Questions philosophiques, historiques et didactiques.

Trésorier : Prof. Vincenzo Reina; Secrétaire général (chargé des renseignements) : Prof. G. Castelnuovo, 5, Piazza S. Pietro in Vincoli, Rome (Italie) (adresse commune).

Cotisation : 25$^{fr}$, donnant droit d'assister au Congrès et de recevoir le volume des *Comptes rendus;* tout membre de la famille d'un Congressiste aura les mêmes avantages (moins le volume) en versant 15$^{fr}$.

La Rédaction.

# QUESTIONS.

**1067.** [**A1b**] (**1897**, 121). — Peut-on démontrer que la valeur de l'expression

$$\Big[5x - \frac{5x+3}{3}\,\frac{5x(5x-1)}{1.2} + \frac{(5x+3)(5x+8)}{4.5}$$
$$\times \frac{5x(5x-1)(5x-2)}{1.2.3} - \frac{(5x+3)(5x+8)(5x+13)}{5.6.7}$$
$$\times \frac{5x(5x-1)(5x-2)(5x-3)}{1.2.3.4} + \frac{(5x+3)\ldots(5x+18)}{6.7.8.9}$$
$$+ \frac{5x\ldots(5x-4)}{1\ldots5} + \ldots + (-1)^{5x-2}\frac{(5x+3)\ldots(30x-12)}{(5x(5x+1)\ldots(10x-3)}5x$$
$$+ (-1)^{5x-1}\frac{(5x+3)\ldots(30x-7)}{(5x+1)\ldots(10x-1)}\Big]$$

est identiquement nulle ?

L.-E. Dickson (Chicago).

**1069.** [**D6c$\delta$**] (**1897**, 122). — Comme cas particulier de la formule sommatoire d'Euler, on trouve aisément

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1^k}\left(\frac{2}{n}\right)^{2^k}\left(\frac{3}{n}\right)^{3^k}\cdots\left(\frac{n}{n}\right)^{n^k}$$
$$= A_k n^{B_{k+1}} e^{-\frac{n^{k+1}}{(k+1)^2}+\frac{n^{k-1}}{12}-\frac{3k^2-6k+2}{720}n^{k-3}+\ldots},$$

où $B_{k+1}$ représente le $(k+1)^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli. On retrouve, en particulier, la célèbre formule de Stirling pour $k=0$. Je voudrais avoir un moyen d'étudier la variation de la constante $A_k$ lorsque $k$ croît indéfiniment. Je voudrais aussi connaître, avec une certaine approximation, les pre-

mières valeurs de $A_k$. On sait que $A_0 = \sqrt{2\pi}$. J'ai trouvé

$$A_1 = 2^{\frac{1}{8}} e^{-0,24} \ldots, \qquad A_2 = \frac{2^{0,01} \ldots}{\pi^{\frac{1}{56}}} e^{0,04 \ldots - \frac{\pi}{480}},$$

mais je ne suis pas bien sûr de ces résultats, qui ne sont pas, d'ailleurs, suffisamment approchés. *Rosace.*

---

**3188.** [**H4**] Intégrer l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = ayx^2 - by \pm c.$$

Bayle (officier mécanicien à bord du *Catinat*, division du Pacifique).

**3189.** [**V** et **J2g**] A-t-il été fait des études mathématiques relatives à la périodicité plus ou moins approchée des crises économiques générales ou aux fluctuations périodiques du prix des matières premières, des objets fabriqués et des denrées, dues par exemple à l'effet de la loi de l'offre et de la demande? *Zed.*

**3190.** [**I3b**] Soient $p$ un nombre premier, $a$ et $b$ ($b$ non carré parfait) deux entiers non divisibles par $p$ et $a^2 \not\equiv b$ (mod $p$). Si $\left(\frac{b}{p}\right) = 1$ et $\left(\frac{a^2 - b}{p}\right) = 1$, nous avons une congruence (**1905**, 146)

$$(a + \sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \quad (\text{mod } p).$$

Lequel de ces deux nombres $(a + \sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}} \mp 1$ est multiple de $p$? Nazarevsky (Kharkov, Russie).

**3191.** [**V** et **I24b**] Je désirerais l'historique, surtout

au point de vue des dates, des nombres de décimales, successivement calculées, de la valeur de $\pi$. *Nobel.*

**3192.** [**Σ** et **R4**] Il me semblerait intéressant de connaître une étude mathématique des toiles d'araignées.

Les gravures que j'ai vues de quelques-unes me font regretter que cette étude n'ait pas été entreprise.

*Trinitario.*

**3193.** [**A3**] Je demande si les questions suivantes ont été traitées :

1° Construire l'équation dont les racines sont les produits deux à deux d'une équation donnée. Généraliser la question.

2° Construire l'équation dont les racines sont les puissances de même degré des racines d'une équation donnée.

U. Bini (Rome).

**3194.** [**O2f** et **O6c**] La surface enveloppe des sphères

$$(x^2+y^2+z^2-1)(a^2+b^2+c^2-1)+4ax+4by+4cz=0$$

ou la courbe enveloppe des cercles

$$(x^2+y^2-1)(a^2+b^2-1)+4ax+4by=0$$

ont-elles été étudiées? ($a$, $b$, $c$ dépendent d'au plus deux paramètres). U. Bini (Rome).

**3195.** [**O4c** et **Q1d**] Est-il vrai, sans restriction possible, en ayant égard à la théorie des pseudo-surfaces, que toute surface développable soit exclusivement l'enveloppe d'un *plan mobile*, c'est-à-dire d'un plan dont l'équation contient un paramètre variable et deux fonctions arbitraires de ce paramètre?

La proposition contraire est-elle insoutenable?

Issaly.

**3196.** [Σ] Soit $\lambda_i$ une suite de nombres rationnels positifs tels que $\sum_1^\infty \lambda_i$ converge. Tout nombre rationnel $N > 0$ peut se mettre sous la forme

$$N = N_0 + \sum_1^\infty d_i \lambda_i,$$

où $N - N_0 < 1$, $N_0$ entier, $d_i$ entier $< \lambda_{i-1}\lambda_i^{-1}$, $\lambda_0 = 1$ : on le voit par un procédé tout à fait analogue à celui qui sert à convertir N en fraction décimale (cas où $\lambda_i = 10^{-i}$).

1° Ceci posé, trouver toutes les séries $\sum_1^\infty \lambda_i$ telles que, pour tous les nombres rationnels, la suite des $d_i$ soit périodique, simple ou mixte. Trouver au moins des cas étendus où cela a lieu, en dehors du cas bien connu où $\lambda_i = q^{-i}$, $q$ entier.

Je suis à peu près sûr, d'après une vérification rapide, qu'il en est ainsi quand $\lambda_i = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i$, la suite des $\mu_i$ étant périodique et $\mu_i^{-1}$ entier. Y a-t-il d'autres cas?

2° Examiner ensuite si, sous des conditions convenables, dans les cas obtenus, les nombres N pour lesquels la suite des $d_i$ est quasi-périodique sont des nombres transcendants de Liouville.

E. Maillet.

**3197.** [I19c] L'équation

$$(x^2 + 1)\, x^{x^2+x+1} + x + 1 = 643$$

a pour solution $x = 2$. Y en a-t-il d'autres?

*Pysurneuf.*

**3198.** [I1] On considère les nombres $2^0$, $2^1$, $2^2$, $2^3$, $2^4$, ..., $2^{62}$, $2^{63}$ qui sont le nombre des grains de blé à placer sur les 64 cases d'un échiquier dans le fameux *problème des grains de blé.*

Y a-t-il un moyen, sans former ces 64 nombres, de déterminer combien de fois chacun des chiffres 0, 1, 2, 3, ..., 9 s'y trouve? *Onponale.*

**3199.** [**X6** et **J2b**] J'ai fait récemment, sur le planimètre polaire d'Amsler, une expérience consciencieuse dont voici les résultats :

I. *Généralités.* — J'ai évalué la contenance de 108 parcelles de terrain, au moyen de deux contournements inverses par parcelle : le premier, $a$, dans le sens des aiguilles d'une montre, et le second, $b$, dans le sens trigonométrique. J'ai obtenu : 27 fois, $a > b$; 5 fois, $a = b$; 76 fois, $a < b$; moyenne des $(a - b)$ égale 0,00078; moyenne des $(b - a)$ égale 0,00157.

II. *Particularités.* — La plus grande série des $a > b$ a été de 3, moyenne correspondante des $(a - b)$ égale 0,00100; la plus grande série des $a = b$ a été aussi de 3; la plus grande série des $a < b$ a été de 14, moyenne correspondante des $(b - a)$ égale 0,00132.

III. *Conclusion.* — Il apparaîtrait que les excès $(b - a)$ sont environ 3 fois plus fréquents et 2 fois plus considérables que les excès $(a - b)$.

A-t-on déjà fait une observation concordante? Peut-on, en tout cas, expliquer la mienne par des considérations mécaniques ou physiologiques?

(Il me serait très facile, au cas où la question intéresserait un correspondant et où le nombre des éléments calculés serait jugé insuffisant, de faire une nouvelle expérience portant sur plusieurs centaines de parcelles.)

G. Lemaire (Cochinchine).

# RÉPONSES.

**728.** (**1896**, 30; **1905**, 98) (G. Eneström). — *Sur une brochure de Jacques Bernoulli.* (**1905**, 151). — Autre réponse de M. Plakhowo, analogue à la réponse déjà publiée. La Rédaction.

**824.** (**1896**, 101; **1905**, 193) (H. Brocard). — *Équation*

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

(**1906**, 101). — Soient :

Deux axes rectangulaires OX et OY;
Deux points A et B sur ces axes

$$[\text{OA (sur OX)} = a, \qquad \text{OB (sur OY)} = b],$$

et une droite quelconque, OZ, formant avec OY l'angle $ZOY = x$.

Il est évident qu'en projetant les points A et B en $A_1$ et $B_1$ sur OZ et en appelant I le milieu de $A_1B_1$, on a

$$2\,OI = (OA_1 + OB_1) = a \sin x + b \cos x,$$

et que, dès lors, l'étude des variations de la fonction $a \sin x + b \cos x$ est ramenée à la recherche du lieu de I quand OZ pivote autour du point O.

Or j'ai donné, dans le numéro du 1er juin 1901 du Journal de M. Vuibert, deux solutions géométriques qui intéresseront, je crois, les bibliographes de l'équation $a \sin x + b \cos x = c$.

G. Lemaire (Rachgia, Cochinchine).

**983.** (**1897**, 28) (A. Boulanger). — *Solutions pratiques du Problème de la Carte.* (**1897**, 229; **1898**, 101). — I. On trace, sur une feuille de papier calque, les directions MX, MY et MZ, faisant entre elles, dans l'ordre voulu, les angles $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$; on applique cette

feuille sur le plan et, par tâtonnement, on fait passer les directions MX, MY et MZ par les points A, B et C. Il ne reste plus qu'à piquer le point M.

Cette méthode remonte, au moins, à 1807 (PUISSANT, *Traité de Topographie*, p. 164).

II. Sur les directions MY et MZ faisant entre elles l'angle $\alpha$, on porte les longueurs

$$MB_1 = \frac{k^2 \sin(\beta - B)}{b}, \qquad MC_1 = \frac{k^2 \sin(\gamma - C)}{c} \qquad (k^2, \text{ arbitraire})$$

et l'on construit le triangle MBC, homothétique à $MB_1C_1$ et tel que $BC = a$. On décalque ensuite le point M.

J'ai imaginé cette méthode en 1903; je ne sais si elle est nouvelle.

III. Les boussoles dites *automatiques* (Peigné, Delcroix, etc.) donnent sans lecture, sans calcul, sans compas et sans équerre, une solution approchée, mais très satisfaisante. Je m'en sers journellement dans les reconnaissances et je les crois tout indiquées pour l'organisation du tir de l'artillerie.

G. LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

**1046.** (**1897**, 97; **1906**, 233) (H. DELLAC). — *Évaluation de certaines expressions.* — Les fonctions $B_n^p$ ont pour expression

$$B_n^p = 2^{n-1}\sum a^p + 2^{n-2}\sum_{\alpha+\beta=p}\frac{p!}{\alpha!\,\beta!}a^\alpha b^\beta + 2^{n-3}\sum_{\alpha+\beta+\gamma=p}\frac{p!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}a^\alpha b^\beta c^\gamma + \ldots + A_n^p,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant $> 0$.

En effet, le terme $\frac{p!}{\alpha!\,\beta!}a^\alpha b^\beta$, par exemple, se trouve 1 fois dans $\left(\sum a\right)^p$, $n-2$ fois dans $\sum\left(\sum a - a\right)^p$, $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ dans $\sum\left[\sum a - (a+b)\right]^p$, et ainsi de suite.

Le coefficient de $\sum \frac{p!}{\alpha!\,\beta!} a^\alpha b^\beta$ sera donc

$$1 + \frac{n-2}{1} + \frac{(n-2)(n+3)}{2} + \ldots = 2^{n-2}.$$

G. QUIJANO (Xérès).

**1910.** (**1900**, 270) (C. STÖRMER). — *Traduction des Œuvres de Tchebycheff.* (**1902**, 158). — *Extrait d'une réponse de M. Plakhowo.* — A la réponse de M. Brocard, je peux ajouter que le Tome I des Œuvres de Tchebycheff a paru depuis 1899. L'édition de ses œuvres est bien belle; elle a été projetée en deux Tomes, et le premier Tome ne renferme que des travaux parus jusqu'en 1847; il contient 714 pages et est orné d'un magnifique portrait de l'auteur. Mais je crains que des raisons financières ne fassent attendre longtemps l'apparition du Tome II. N. PLAKHOWO (Russie).

**2052.** (**1901**, 82) (E.-N. BARISIEN). — *Évaluation graphique de π.* (**1901**, 268). — Dupuis (*Recueil de Tables propres à abréger les calculs,* Paris, Hachette, 1862, p. 95) donne une solution approchée, très simple, de la rectification de la circonférence et de la quadrature du cercle.

Point de départ de cette solution :

$$3,1416 = 1,1 \times 1,2 \times 1,4 \times 1,7.$$

G. LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

*Voir* encore *C. R.,* t. CXLIV, 18 mars 1907, une Communication de M. G. Hilleret, p. 628 : *Sur la méthode des isopérimètres; N. A.,* 4[e] série, t. VII, janvier 1907, une Note de M. d'Ocagne : *Sur la rectification approchée des arcs de cercle.*

LA RÉDACTION.

**2641.** (**1903**, 207) (PAULMIER). — *Cadran solaire vertical déclinant.* (**1903**, 296). — Après avoir fixé au mur une tige perpendiculaire de faible diamètre, on marquera, le jour de l'équinoxe d'automne, à deux heures différentes de la journée, les extrémités de l'ombre de la tige sur le mur. On aura ainsi deux points A et B; soit C l'extrémité de la tige; la normale CD au plan ABC rencontrera la surface du mur en D d'où partiront les lignes horaires du

cadran, dont la ligne équinoxiale sera évidemment AB. La verticale du mur qui passe par D est la ligne de midi. La construction des autres lignes horaires ne présente aucune difficulté. Les heures seront marquées par les coïncidences de l'extrémité du style avec les lignes horaires. EUGÈNE BASTIDON.

**2851**. (**1904**, 283) (N. QUINT). — *Construction du rayon réfracté.* (**1905**, 72, 140; **1906**, 149). — *Voir :*

G.-H. NIEWENGLOWSKY. — Nouvelle construction du rayon réfracté (*Bulletin de Mathématiques et Physique élémentaires*, 1895, p. 4 à 8 et p. 25).

E. LEMOINE. — Analyse géométrographique des constructions qui donnent le rayon réfracté (*Ibid.*, p. 43).

G.-H. NIEWENGLOWSKY. — Nouvelle construction du rayon réfracté; Étude géométrique du prisme (*Ibid.*, p. 71 et 84).

N. PLAKHOWO (Russie).

**2879**. (**1905**, 279) (*Belga*). — *Division approchée d'un arc en n parties égales.* (**1905**, 233, 251; **1906**, 113). — La construction générale indiquée par M. *Belga* était probablement connue au XVIII[e] siècle. En tout cas, Bion l'appliquait à l'inscription du décagone. (Référence : SAVÉRIEN, *Dict. univ. de Math. et de Phys.*, Paris, 1753, t. I, p. 260.)

Je crois l'avoir vue également : 1° dans Combette (*Cours de Géométrie élémentaire*), d'après Gauss; 2° dans Vasselon (*Carnet du conducteur de travaux*, 2[e] édition, Paris, 1874). Mais je n'ai plus ces Ouvrages sous la main et, quelque confiance que j'aie en ma mémoire, je ne puis garantir l'exactitude de ces dernières indications.

G. LEMAIRE (Rachgia, Cochinchine).

**2924**. (**1905**, 128) (J. FITZ-PATRICK). — Simplement à titre bibliographique, je rappellerai que la discussion complète de ce problème a été faite par M. J. Neuberg dans une Note *Sur les figures symétriques successives* (A. F., Limoges, 1890).

L'auteur cite le paragraphe mentionné de Rouché, ainsi que J. Steiner, R. Sturm, L. Certo, E. Catalan. H. BROCARD.

Autre réponse de M. S. PRIETO (Mexico), communiquée à l'auteur de la question.

**2941.** (**1905**, 171) (E.-N. Barisien). — *Sur certaines courbes.* — Les courbes définies par les équations

$$x = a\cos^m\varphi, \qquad y = b\sin^m\varphi,$$

qui, si $m$ est pair, peuvent s'écrire en fonction de $t = \operatorname{tang}\varphi$,

$$x = a\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{\frac{m}{2}}, \qquad y = b\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^{\frac{m}{2}},$$

sont dans cette hypothèse des unicursales de l'ordre $\frac{m}{2}$ (et non pas $m$, parce que, $t$ variant de $-\infty$ à $+\infty$, la courbe, ou plus exactement la portion de courbe qui seule correspond aux valeurs réelles de $\varphi$, est parcourue deux fois par le point de coordonnées $x$, $y$); mais, si $m$ est impair, $x$ et $y$ se présentent comme des fonctions rationnelles de $\theta = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$, contenant ce paramètre au degré $2m$ : il s'agit donc encore d'unicursales, mais, relativement, d'un degré plus élevé.

Toutes ces courbes se construisent, absolument comme l'ellipse, au moyen de courbes directrices

$$\rho = a\cos^{m-1}\varphi, \qquad \rho = b\sin^{m-1}\varphi,$$

qui sont d'ordre $m$, $m$ étant pair, et d'ordre $2m$, $m$ étant impair.

Comme, d'autre part, on a

$$\frac{dx}{d\varphi} = -ma\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = mb\sin^{m-1}\varphi\cos\varphi,$$

la normale au point ($a\cos^m\varphi$, $b\sin^m\varphi$) a pour équation

$$ax\cos^{m-2}\varphi - by\sin^{m-2}\varphi = a^2\cos^{2m-2}\varphi - b^2\sin^{2m-2}\varphi;$$

l'intersection de cette normale avec la droite $x = \operatorname{tang}\varphi$ décrit la courbe dont l'équation polaire s'obtient en remplaçant dans l'équation de la normale $x$ et $y$ par $\rho\cos\varphi$ et $\rho\sin\varphi$ respectivement, d'où

$$\rho = a\cos^{m-1}\varphi + b\sin^{m-1}\varphi :$$

c'est, par rapport à l'origine, l'homothétique de vecteur double de la courbe diamétrale des courbes directrices, et l'intersection de la normale et de la droite $y = -x\operatorname{tang}\varphi$ se déplace sur une courbe analogue.

En définitive l'angle $\varphi$ joue le même rôle pour toutes les unicursales envisagées; mais on n'a de résultat simple que pour les cas de $m = 1$, $m = 2$, et il faut alors remarquer principalement la construction de la normale. E. MALO.

**2954.** (**1905**, 200) (*Rudis*). — *Fractions continues.* (**1906**, 28, 119, 217). — La réponse de M. Werebrusow semble avoir été un peu maltraitée à l'impression; pourtant je l'ai d'autant plus facilement suivie que sa méthode est précisément celle que j'avais employée moi-même, mais où je me suis bien vite trouvé arrêté.

Effectivement, s'il est clair qu'*en supposant* le développement périodique, l'équation à laquelle conduit la considération des deux dernières fractions convergentes de l'une quelconque des périodes, $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et $\frac{P_n}{Q_n}$, donne, par comparaison avec l'équation supposée,

$$Ax^2 - 2Bx - C = 0,$$

les relations

$$\frac{Q_n}{A} = \frac{P_n - tQ_{n-1}}{2B} = \frac{tP_{n-1}}{C} = v;$$

si de ces relations on peut encore, en éliminant par exemple $Q_n$, $P_{n-1}$ et $Q_{n-1}$ au moyen de l'identité fondamentale

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} t^n,$$

conclure à l'expression

$$P_n = -Bv + \sqrt{\Delta v^2 + (-1)^{n-1} t^n} \qquad (\Delta = B^2 - AC);$$

si enfin, puisque $P_n$ est entier par hypothèse même, on est amené à poser la condition

$$u^2 - \Delta v^2 = (-1)^{n-1} t^n;$$

il est non moins clair : 1° que cette condition se présente essentiellement comme nécessaire et nullement comme suffisante; 2° que sa résolution en nombres entiers (données : $t$ et $\Delta$; inconnues : $u$, $v$ et $n$) soulève de notables difficultés, surmontées, si je ne me trompe, d'une façon seulement partielle (Cauchy) et au moyen de considérations fort complexes.

Si d'autre part on réfléchit que la théorie de la représentation quadratique des nombres entiers, bien qu'étroitement liée avec la

théorie des fractions continues ordinaires ($t = 1$), reçoit de celle-ci beaucoup plus de secours qu'elle ne lui en apporte, on regardera probablement la question **2954** comme insuffisamment élucidée et comme appelant des réponses plus décisives que celles qui y ont été faites jusqu'à présent et dont je ne laisse pas de remercier sincèrement leurs auteurs. *Rudis.*

Si nous avons une fraction continue,

$$a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_1 + \ldots}}} = a + 1 : a_1 + 1 : a_1 + \ldots,$$

qui n'a qu'un chiffre $a_1$ de période et pour numérateur de chacune des fractions intégrantes l'unité, on peut la transformer en une autre fraction, ayant pour numérateur un nombre arbitrairement choisi; il n'y a qu'à multiplier haut et bas chaque fraction intégrante par ce nombre; ainsi notre fraction deviendra

$$a + t : a_1 t + t : a_1 + t : ta_1 + t : a_1 + \ldots.$$

Si la fraction continue a deux termes de période,

$$a + 1 : a_1 + 1 : a_2 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots,$$

alors cette fraction, ayant pour numérateur un nombre arbitraire, se transformera en celle-ci,

$$a + t : ta_1 + t : a_2 + t : ta_1 + t : a_2 + \ldots,$$

et le nombre de termes de la période ne changera pas.

On généralise facilement : on peut donc dire que le nombre de chiffres de la période ne change pas si elle a un nombre pair de chiffres; mais, si le nombre de chiffres de la période est impair, il sera doublé. N. Plakhowo (Russie).

Dans le même ordre d'idées, il pourra être utile de consulter l'*Encyclopädie der Math. Wissenschaften* de MM. Burkhardt et Meyer, Teil I, Band I, Heft 2, Leipzig, Teubner, 1899, p. 130. *Voir* en particulier, à titre d'indication, les travaux d'E. de Jonquières mentionnés dans la Note 397 (*C. R.*, t. XCVI, 1883, *passim*).

E. Maillet.

**2982.** (**1905**, 269) (*Crut*). — ***Problème d'élimination*** (**1906**, 80, 153). — Autres réponses de MM. H. Lez et K. Hagge (Kolsnap, Nordschleswig), communiquées à l'auteur de la question.

La Rédaction.

**3008.** (**1906**, 33) (H. Wieleitner). — ***Relation entre les*** $(n-1)^2$ ***pôles*** Q ***d'une droite*** Γ ***par rapport à une courbe et l'unique pôle*** P ***de la même droite*** Γ ***par rapport à la même courbe, si l'on considère celle-ci comme courbe tangentielle.*** — Si la droite Γ est la droite à l'infini, le pôle P est le centre des moyennes distances des pôles Q. *Voir* de pareilles relations pour le pôle P et la littérature dans l'article de M. Berzolari : ***Sur la théorie des courbes algébriques supérieures*** (***Encyc. math. Wiss.***, vol. III, **2**, p. 397).

H. Wieleitner (Spire).

**3017.** (**1906**, 36) (*Ymer*). — Je désire simplement proposer un moyen pratique.

L'intégrale

$$s = \int \frac{\sqrt{x^4 + k^2(x^2 \cos^2 x + \sin^2 x - x \sin 2x)}}{x^2}\, dx$$

me paraît impossible à donner sous forme finie. Dans ces conditions, ne pourrait-on, comme première tentative, développer par exemple les vingt premiers termes de la quantité sous le radical, extraire la racine carrée, diviser par $x^2$, puis intégrer? On aurait ainsi une formule adaptée aux applications numériques. Peut-être donnerait-elle aisément l'approximation voulue. H. Brocard.

Le moyen le plus pratique, eu égard aux limites indiquées, me paraît être l'intégration graphique (méthode des trapèzes, par exemple). E. Maillet.

**3026.** (**1906**, 60) (Gino Loria) (**1906**, 224). — La notice de Labatie étant devenue rarissime, je pense qu'on pourra se former une idée de la méthode d'élimination qui s'y trouve exposée en se reportant à l'étude intitulée : *Mémoire sur la résolution de deux équations à deux inconnues*, par Ossian Bonnet (*N. A.*, 1847, p. 54-63, 135-150, 243-252).

Je renouvelle le désir qu'un détenteur de la notice de Labatie

veuille bien signaler ici les prénoms de l'auteur ou leurs initiales. J'ai la conviction que cela pourra aider à retrouver d'autres données biographiques. H. BROCARD.

3030. (**1906**, 94) (G. LEMAIRE) (**1906**, 230). — Une vérification immédiate montre facilement que la question est résolue par les formules

$$x = (\theta + t)\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

$$y = (\theta - t)\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2},$$

où $t$ est une quantité arbitraire, et $\theta$ une fraction arbitraire comprise entre les limites

$$0,501 > \theta > 0,499.$$

E. GREGORIEF (Kazan).
[Traduit du russe. (PAPELIER.)]

3053. (**1906**, 94) (E. GRIGORIEF). — *Méthodes des Mathématiciens japonais des* XVII^e^ *et* XVIII^e^ *siècles pour le calcul de* π (**1906**, 256). — Peut-être M. Grigorief trouvera-t-il la réponse dans le *Compte rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens* (Paris 1900), Paris, Gauthier-Villars, 1902, section V, p. 379, article de M. Fujisawa : *The mathematics of the old japanese school.*

Ce rapport est mentionné dans *Ueber die Entwicklung der elementar Geometrie im* XIX^e^ *Jahrhundert* de Max Simon.

N. PLAKHOWO (Russie).

Il existe en effet dans l'article en anglais de M. Fujisawa, p. 384 et suiv., d'intéressantes indications au sujet du calcul de π par les Mathématiciens japonais. LA RÉDACTION.

3060. (**1906**, 97) (E.-N. BARISIEN). — *Intersection d'une ellipse et de sa développée* (**1906**, 276). — En remerciant MM. Dujardin et Lez de leurs élégantes solutions, je crois utile d'y ajouter les remarques suivantes :

1° A signaler d'abord une petite erreur. La valeur de $\frac{\alpha}{a}$ (p. 278,

ligne 3) est, en réalité,

$$\frac{x}{a} = \pm \frac{\lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 2)^{\frac{3}{2}}}{(\lambda^4 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

2° Autre erreur (p. 278, ligne 9). Il faut lire

$$\frac{y_1}{b} = \pm \frac{1}{\lambda^2 - 1}\sqrt{\frac{2\lambda^2 - 1}{\lambda^4 - 1}}.$$

3° L'équation des abscisses du point d'intersection s'écrit

$$[c^2(a^2 + b^2)\alpha^2 + a^4(2b^2 - a^2)]^3 + 27a^6b^4c^4\alpha^2(a^2 - \alpha^2) = 0$$

ou

$$(c^2\alpha^2 - a^4)^2[c^2(a^2 + b^2)^3\alpha^2 - a^4(a^2 - 2b^2)^3] = 0.$$

On voit donc que la développée rencontre l'ellipse aux quatre points réels

$$\alpha = \pm \frac{a^2}{c}\left(\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad \beta = \mp \frac{b^2}{c}\left(\frac{2a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Elle est de plus tangente à l'ellipse aux quatre points imaginaires

$$\alpha = \pm \frac{a^2}{c}, \qquad \beta = \pm \frac{b^2}{c}\sqrt{-1}.$$

Ces points comptent pour huit; on a bien ainsi les douze points de rencontre de l'ellipse avec sa développée. Les points réels ne le seront que si $a > b\sqrt{2}$.

4° Si l'un des points réels d'intersection a pour coordonnées

$$\alpha = \frac{a^2}{c}\left(\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad \beta = -\frac{b^2}{c}\left(\frac{2a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

on a pour celles $(x, y)$ du pied de la normale tangente à la développée en $(\alpha, \beta)$, et pour celles $(x_1, y_1)$ de la normale issue de $(\alpha, \beta)$ autre que la normale en $(\alpha, \beta)$,

$$x = \frac{a^2}{c}\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2}}, \qquad y = \frac{b^2}{c}\sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{a^2 + b^2}},$$

$$x_1 = -\frac{a^4}{c^3}\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2}}, \qquad y_1 = \frac{b^4}{c^3}\sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{a^2 + b^2}},$$

$$\frac{x}{x_1} = -\frac{c^2}{a^2}, \qquad \frac{y}{y_1} = \frac{c^2}{b^2}.$$

5° La longueur de la normale double, distance des points $(\alpha, \beta)$ et $(x, y)$, est

$$N = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \frac{3a^2b^2\sqrt{3}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Celle de la normale, distance des points $(\alpha, \beta)$ et $(x_1, y_1)$, est

$$N_1 = \sqrt{(x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2} = \frac{2(a^4+b^4-a^2b^2)^{\frac{3}{2}}}{c^2(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ces longueurs N et $N_1$ offrent ceci de remarquable que, même si le point $(\alpha, \beta)$ est imaginaire, quand $a < b\sqrt{2}$, N et $N_1$ ont des longueurs réelles.

6° Si l'on observe que les points imaginaires d'intersection

$$\alpha = \frac{a^2}{c}, \qquad \beta = \pm\frac{b^2}{c}\sqrt{-1}$$

et en même temps de tangence de l'ellipse et de sa développée sont situés sur la directrice relative au foyer $(o, c)$, on a la propriété curieuse suivante :

*La développée d'une ellipse est tangente à cette ellipse aux points de rencontre avec les deux directrices; les points de contact sont donc les foyers.*

7° Si l'on recherchait les points d'intersection de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

avec sa développée, on verrait qu'il suffit de changer $b^2$ en $-b^2$ dans les formules précédentes.

Il n'y a de points réels d'intersection que si $a > b$, c'est-à-dire si l'hyperbole est située dans l'angle aigu de ses asymptotes.

E.-N. Barisien.

Malgré tout le mérite des solutions qui ont été données de cette question, il me semble que la voie la plus naturelle n'y a pas été suivie : on la découvre aisément moyennant quelques considérations géométriques.

L'ellipse et sa développée, envisagées comme courbes de la

deuxième et de la quatrième classe respectivement, ont huit tangentes communes, qui, par le fait qu'elles sont à la fois tangentes et normales à l'ellipse, sont huit droites isotropes deux à deux coïncidentes : l'ellipse et sa développée sont donc quatre fois tangentes aux points où les directrices rencontrent le cercle orthoptique, et, en considérant maintenant l'ellipse et sa développée comme des lieux de points, admettant douze intersections, il est clair qu'il existe quatre intersections simples en plus des huit correspondant aux quatre contacts, et que ces quatre intersections sont sur un cercle concentrique à l'ellipse.

De là suit que la véritable inconnue est $\rho^2 = x^2 + y^2$, et l'on sait par avance que l'équation du troisième degré en $\rho^2$ à laquelle on parviendra aura son premier membre divisible par $(\rho^2 - a^2 - b^2)^2$, de sorte que la troisième racine est une fonction rationnelle de $a^2$ et de $b^2$ : on l'obtiendra en considérant simplement les coefficients extrêmes de l'équation en $\rho^2$.

Le calcul, inutile à rapporter, est donc des plus faciles, et l'on trouve

$$\rho^2 = \frac{a^8 - 5a^6b^2 + 15a^4b^4 - 5a^2b^6 + b^8}{(a^2+b^2)^3},$$

$$x^2 = \frac{a^2(\rho^2 - b^2)}{c^2}, \qquad y^2 = \frac{b^2(a^2 - \rho^2)}{c^2}.$$

E. MALO.

3062. (1906, 97) (*Nester*). — *Antipodaire de la parabole cubique* $ay^2 = x^3$ (1907, 16). — Il est toujours intéressant de retrouver un résultat par une voie un peu différente de celle qui l'a déjà procuré.

La perpendiculaire MP en un point M de la parabole cubique au rayon vecteur OM a pour équation

$$y - am^3 = -\frac{1}{m}(x - am^2).$$

L'élimination de $m$ entre cette équation et sa dérivée en $m$ fournira l'équation de l'enveloppe MP ou de l'antipodaire.

On a ainsi les deux équations

$$3m^4 + m^2 = -\frac{x}{a} = \text{A},$$

$$4m^3 + 2m = \frac{y}{a} = \text{B},$$

d'où

$$m^2 = \frac{\sqrt{1 + 12A} - 1}{6},$$

et enfin (d'après M. *Nester*)

$$4(12A + 1)^3 = (27B^2 - 72A + 1)^2,$$

ou

$$(27y^2 + 72ax + 2a^2)^2 + 4a(12x - a)^3 = 0,$$

qui coïncide avec la deuxième équation de M. Retali (p. 16, ligne 5 en remontant).

On reconnaît aisément qu'elle est identique à la première (*loc. cit.*, ligne 6) multipliée par 27.

La courbe a la forme d'une parabole très ouverte, tournée du côté des $x$ négatifs. Elle ne présente aucune singularité de tracé, nonobstant l'indication algébrique de point double et de points de rebroussement. H. BROCARD.

3063. (**1906**, 97) (*Onponale*). — *Intersection de deux courbes* (**1906**, 279). — Autres réponses de MM. *E.-A. Majol* et H. WIELEITNER (Spire, Allemagne), communiquées à l'auteur de la question. M. Wieleitner renvoie en particulier à son livre *Theorie der algebraischen Kurven*, Leipzig (Göschen), 1905, § 32, et aussi, pour la littérature, à Brill-Nœther, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen*, etc. (*D. V. M*, t. III, 1894, p. 366).

LA RÉDACTION.

3067. (**1906**, 140) (G. LEMAIRE). — *Découverte des lois de la réfraction* (**1907**, 19). — Autre réponse de M. Plakhowo qui cite l'*Histoire des Mathématiques* de Rouse Ball et *Poggendorff's Geschichte der Physik*, Leipzig, 1879 : ces deux histoires, ajoute M. Plakhowo, attribuent aussi à Snellius la première découverte, non publiée immédiatement, il est vrai, des lois de la réfraction.

LA RÉDACTION.

3069. (**1906**, 140) (G. LEMAIRE). — *Division du cercle en* 360 *degrés ou en* 400 *grades*. — Une réponse complète exigerait quelque développement. Je pense qu'il est possible d'y suppléer, au moins comme première donnée, par l'extrait suivant de l'Avant-Propos des

*Nouvelles Tables de Logarithmes à cinq décimales, etc.*, éditées par le Service géographique de l'Armée, 1901.

« La division centésimale du quart de la circonférence présente, sur la division sexagésimale, des avantages indiscutables pour la rapidité et la sécurité des calculs.

» Introduite pour la première fois par Delambre, dans les mesures et calculs géodésiques de la méridienne de France, comme la conséquence de l'adoption du système décimal des poids et mesures, elle est en usage au Service géographique de l'Armée, anciennement Dépôt de la Guerre, depuis plus d'un siècle; elle a été adoptée également par le Service du Cadastre, et par de nombreux savants et ingénieurs; elle tend même aujourd'hui à s'introduire dans la marine pour le calcul du point à la mer. »

Suit une Lettre de septembre 1901 du Directeur du Service géographique de l'Armée prescrivant, après avis conforme du Ministre de l'Instruction publique, la composition de Calcul logarithmique à Saint-Cyr et à l'École Polytechnique avec des Tables à cinq décimales, puis, à partir de 1905, l'usage obligatoire des Tables du système centésimal.

Quelques détails sur la division sexagésimale pourront être donnés à une autre occasion. H. Brocard.

3072. (**1906**, 141) (E.-N. Barisien, H.-B. Mathieu). — *Quadrilatère maximum inscrit et circonscrit à deux cercles* (**1907**, 20). — Autres réponses de MM. A. Tafelmacher (Santiago de Chili) et Grigorief (Kazan, Russie) communiquées aux auteurs de la question. La Rédaction.

3076. (**1906**, 142) (E.-N. Barisien). — *Congruence* (**1907**, 22). — Cette propriété est démontrée ainsi que d'autres théorèmes analogues dans le *Periodico di Matematica*, livraison de janvier-février 1907. Voici les propriétés énoncées par l'auteur de l'article, M. Umberto Bini :

1° Si $x$, $y$, $z$ sont trois nombres quelconques liés par la relation $x+y+z=0$, l'expression $\frac{x^{2m+1}+y^{2m+1}+z^{2m+1}}{x+y+z}$, pour $m$ positif et $\neq 0$, est toujours un nombre entier.

2° Si $x$, $y$, $z$ sont trois nombres quelconques liés par la rela-

tion $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, l'expression $\frac{x^{2h+2}+y^{2h+2}+z^{2h+2}}{x+y+z}$ pour $h>0$ est toujours un nombre entier.

3° Si $x, y, z$ sont trois nombres liés par la relation $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, l'expression $x^n y^n + y^n z^n + x^n z^n$ est divisible par $(xyz)^2$ pour $n \geqq 5$ et est divisible par $xyz$ pour $n>0$.

4° Si $x, y, z$ sont trois nombres quelconques liés par la relation $x+y+z=0$, l'expression $\frac{y^n z^n + z^n x^n + x^n y^n}{yz+zx+xy}$ est un nombre entier pour $n$ non multiple de $3c \geqq 4$.

J. ROSE.

Autres réponses de MM. A. TAFELMACHER (Santiago de Chili) et GRIGORIEF (Kazan, Russie).

3077. (**1906**, 142) (E.-N. BARISIEN). — *Sur l'expression $x^n+y^n+z^n$* (**1907**, 36). — Soit l'équation cubique

$$t^3+at-b=0;$$

soient $x, y, z$ ses racines. On a

$$x+y+z=0;$$

en outre

$$a=xy+xz+yz, \qquad b=xyz.$$

Mais, si

$$S_n=x^n+y^n+z^n,$$

on a

$$S_n+aS_{n-2}-bS_{n-3}=0,$$

ce qui répond à la question.

*Ursus.*

Soit

$$u_n=x^n+y^n+z^n.$$

Il est facile de prouver l'identité

$$u_n=(x+y+z)u_{n-1}-(xy+xz+yz)u_{n-2}+xyzu_{n-3},$$

ou, en supposant

$$x+y+z=0, \qquad xy+xz+yz=a, \qquad xyz=b,$$

$$u_n=-au_{n-2}+bu_{n-3}. \tag{1}$$

En remarquant que

$$u_0 = x^0 + y^0 + z^0 = 3, \qquad u_1 = x + y + z = 0,$$
$$u_2 = x^2 + y^2 + z^2 = -2a,$$

nous avons, en nous aidant des formules (1),

$$\begin{array}{ll} u_3 = 3b, & u_8 = \phantom{-}2a^4 - 8ab^2, \\ u_4 = 2a^2, & u_9 = -9a^3b + 3b^3, \\ u_5 = -5ab, & u_{10} = -2a^5 + 15a^2b^2, \\ u_6 = -2a^3 + 3b^2, & u_{11} = \phantom{-}11a^4b - 11ab^3, \\ u_7 = 7a^2b, & u_{12} = \phantom{-}2a^6 - 24a^3b^2 + 3b^4, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Mais la relation (1) se présente sous forme d'une équation aux différences qu'on peut intégrer par les méthodes du calcul des différences. Ainsi il est possible d'obtenir les formules générales

$$u_{2n} = (-1)^n \left[2a^n - \frac{2n}{1} C^1_{n-2} a^{n-3} b^2 + \frac{2n}{4} C^3_{n-3} a^{n-6} b^4 + \ldots\right],$$
$$u_{2n+1} = (-1)^{n+1} \left[(2n+1) a^{n-1} b - \frac{2n+1}{3} C^2_{n-2} a^{n-4} b^3 + \frac{2n+1}{5} C^4_{n-3} a^{n-7} b^5 - \ldots\right],$$

ou, plus simplement,

$$(2) \qquad u_{2n} = (-1)^n \left[2a^n + \Sigma (-1)^k \frac{2n}{2k} C^{2k-1}_{n-k-1} a^{n-3k} b^{2k}\right],$$

$$(3) \qquad \begin{cases} u_{2n+1} = (-1)^{n+1} \Big[(2n+1) a^{n-1} b \\ \qquad + \Sigma (-1)^k \dfrac{2n+1}{2k+1} C^{2k}_{n-k-1} a^{n-3k-1} b^{2k+1}\Big]. \end{cases}$$

Au reste ces formules peuvent être facilement démontrées par induction en passant de $n$ à $n+1$. Démontrons par exemple la formule (3). De la relation (1) nous tirons

$$u_{2n+3} = -a u_{2n+1} + b u_{2n},$$

d'où, à l'aide des formules (2) et (3),

$$u_{2n+3} = (-1)^{n+2} \Big[(2n+3) a^n b + \Sigma (-1)^k \left(\frac{2n+1}{2k+1} C^{2k}_{n-k-1} + \frac{2n}{2k} C^{2k-1}_{n-k-1}\right) a^{n-3k} b^{2k+1}\Big].$$

Mais

$$\frac{2n+1}{2k+1}C_{n-k-1}^{2k}+\frac{2n}{2k}C_{n-k-1}^{2k-1}=C_{n-k-1}^{2k-1}\left[\frac{(2n+1)(n-2k)}{(2k+1)2k}+\frac{2n}{2k}\right]$$
$$=C_{n-k-1}^{2k-1}\frac{(2n+3)(n-k)}{(2k+1)2k}=\frac{2n+3}{2k+1}C_{n-k}^{2k},$$

et, par conséquent,

$$u_{2n+2}=(-1)^{n+2}\left[(2n+3)a^n b+\Sigma(-1)^k\frac{2n+3}{2k+1}C_{n-k}^{2k}a^{n-2k}b^{2k+1}\right],$$

ce qui est pleinement d'accord avec la formule (3).

Si $x$, $y$, $z$ sont des nombres entiers, les formules (2) et (3) conduisent aux conclusions suivantes :

$$\frac{u_{2n+1}}{b}=\text{nombre entier}\qquad\text{(question 3076)},$$

$$\frac{u_{3n+1}}{a^2}=\text{nombre entier}\qquad\text{et}\qquad\frac{u_{6n\pm 1}}{ab}=\text{nombre entier.}$$

E. Grigorief (Kazan, Russie).

Autre réponse de M. A. Tafelmacher qui indique en particulier la formule (2) de la réponse ci-dessus pour $u_{2n}$.

La Rédaction.

**3080.** (**1906**, 164) (*Nester*). — *Triangle des médianes* (**1907**, 23). — La condition $a < b + c$ est insuffisante pour établir l'inégalité

(1) $\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}<\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}+\sqrt{2a^2+2b^2-c^2},$

mais cette inégalité peut être déduite des deux conditions

(2) $$a > b - c$$

et

(3) $$a < b + c.$$

Au reste, ces deux inégalités (2) et (3) ne sont pas indispensables. Pour démontrer l'inégalité (1), il suffit de s'appuyer sur les deux suivantes :

(4) $$a^2 > (b-c)^2,$$

(5) $$a^2 < 2(b^2+c^2),$$

qui s'obtiennent : (4) en élevant (2) au carré, et (5) en ajoutant au carré de (3) l'inégalité évidente $0 < (b-c)^2$.

L'inégalité (4) peut s'écrire

$$(6) \qquad a^2 > b^2 + c^2 - 2bc;$$

ajoutons aux deux membres $b^2 - \frac{c^2}{2}$, nous avons

$$2a^2 + 2b^2 - c^2 > (2b-c)^2$$

ou

$$(7) \qquad \sqrt{2a^2+2b^2-c^2} > 2b - c.$$

En ajoutant de même aux deux membres de l'inégalité (6), $c^2 - \frac{b^2}{2}$, nous avons

$$(8) \qquad \sqrt{2a^2+2c^2-b^2} > 2c - b,$$

et, en ajoutant (7) et (8),

$$(9) \qquad \sqrt{2a^2+2b^2-c^2} + \sqrt{2a^2+2c^2-b^2} > b + c.$$

Ajoutons enfin aux deux membres de (6) la quantité $(b+c)^2 - a^2$, nous avons

$$(b+c)^2 > 2b^2 + 2c^2 - a^2.$$

Par suite de (5), le deuxième membre de cette inégalité est posisitif, donc

$$(10) \qquad b + c > \sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

En comparant (9) et (10) nous avons (1).

E. Gregorief (Kazan).

[Traduit du russe. (Papelier.)]

Autre réponse de M. Tsuruichi Hayashi (Tokyo) analogue à celle de M. Brocard.

La Rédaction.

# QUESTIONS.

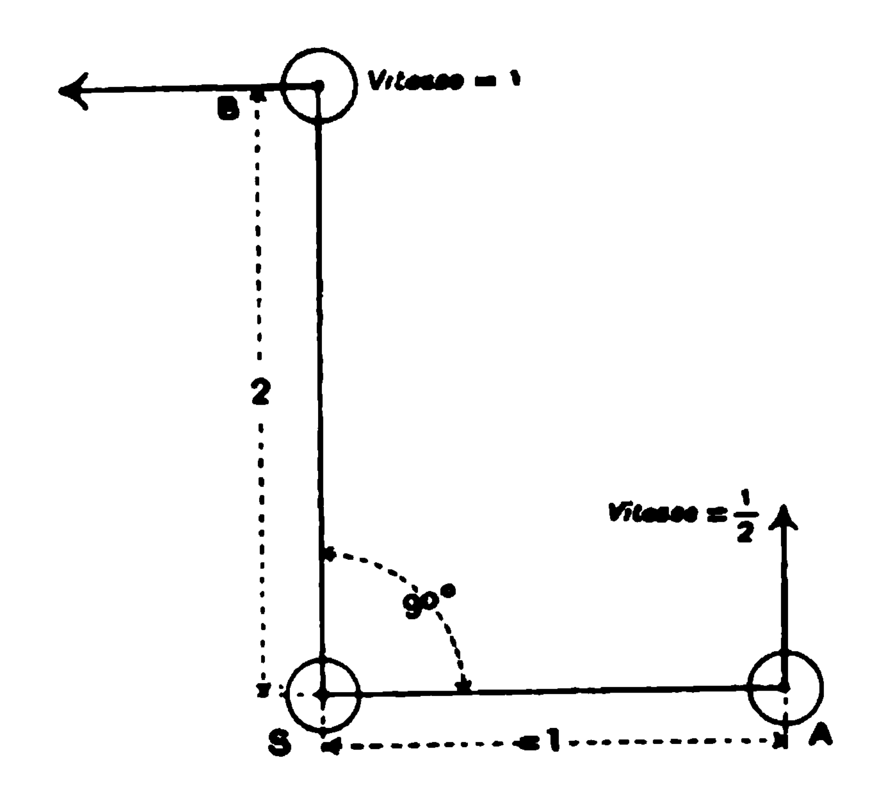
**1073.** [L¹14f] (1897, 123) On sait que le lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits dans une conique est une conique.

1° A-t-on étudié l'enveloppe des côtés de ces triangles?

2° La question du lieu des centres a-t-elle été résolue pour les triangles équilatéraux circonscrits à une conique?

*Onponale.*

**1075.** [U3] (1897, 123) Il n'existe pas d'applications élémentaires du problème des trois corps qui seraient pourtant indispensables au débutant pour se reconnaître au milieu




du dédale des formules. Quelqu'un aurait-il la patience et le temps de me développer les calculs dans le cas particulier suivant : Trouver la position de trois corps au bout de 10 unités de temps, ces trois corps étant au début dans la position indiquée par la figure?

Les corps A et B sont au périhélie et les vitesses sont dans le même plan.

Le coefficient d'attraction est 1 ; masse $A = \frac{1}{1000}$ ; masse $B = \frac{1}{100}$ ; masse $S = 1$.

FERBER.

---

**3200.** **[L¹3]** Comme suite à la question 3060 (**1906**, 97, 276), j'ai voulu déterminer le rapport des axes de l'ellipse, pour laquelle l'ellipse et sa développée se coupent sous un angle de 45°. J'ai été arrêté par des calculs fort ardus. Un correspondant pourra sans doute les mener à bien et, en tous cas, si l'équation était trop compliquée, peut-on avoir une valeur approchée du rapport des axes?

E.-N. BARISIEN.

**3201.** **[L¹15f]** La tangente en un point M variable d'une ellipse rencontre le grand axe en T; la normale en M rencontre le grand axe en N. La parallèle menée par T à MN et la parallèle menée par N à MT enveloppent chacune une courbe unicursale du sixième degré. Je désirerais en avoir les équations cartésiennes.

E.-N. BARISIEN.

**3202.** **[I2]** Peut-on conclure que, sauf 11, un nombre N formé rien que de chiffres 1 est toujours composé? On sait déjà que, si le nombre des chiffres est pair, N est divisible par 11, et, s'il est multiple de 3, N est divisible par 3.

*Arcitenens.*

**3203.** **[I10]** 1° On donne $2n$ nombres consécutifs de 1 à $2n$. Je désire savoir de combien de manières on peut réunir trois de ces nombres de façon que leur somme soit égale à $n$. Cas de $n = 50$. Dans ce dernier cas, j'ai trouvé par tâtonnement qu'il y avait 184 manières. Je demande autant que possible une formule générale.

2° Étant donnés $n$ nombres consécutifs de 1 à $n$, je désire

savoir de combien de manières la somme de trois de ces nombres sera inférieure à $n$. Cas où $n = 50$.

E.-N. Barisien.

3204. [V10] On prête facilement aux souverains des aptitudes ou même des connaissances tout à fait étrangères à l'exercice du pouvoir.

Pour ne pas sortir des Mathématiques, je m'en tiens au cas de Pie X dont les journaux, ces temps derniers, ont publié les notes de classe (1853); et je demande dans quels problèmes d'Algèbre et de Géométrie « s'est distingué » le Pape actuel, quand il était au séminaire de Padoue?

G. Lemaire (Cochinchine).

3205. [U10] Que peut-on déduire ou que doit-on penser de cette remarque paradoxale d'Emm. Liais : « En répétant un premier arc 10 fois, puis 10 fois l'arc décuplé, puis 10 fois celui-ci et ainsi de suite, 7 fois en tout, ce qui équivaut comme longueur à 70 répétitions ordinaires, on obtient l'arc 10 millions de fois plus grand que l'arc primitif. Or une circonférence entière ne renferme que 1 296 000 secondes : l'erreur d'une circonférence entière sur l'arc final ne ferait donc guère qu'un huitième de seconde sur l'arc primitif. Il est évident qu'il faut compter chaque fois le nombre de circonférences déjà obtenu dans la répartition précédente et le multiplier par 10 en même temps que l'arc qui surpasse les circonférences. Ainsi donc la répétition suivant les puissances d'un nombre conduit à cette singulière conclusion de pouvoir mesurer un angle sans que le cercle soit gradué »? (*Traité d'Astronomie,* Paris, Garnier frères, 1867, p. 141).

G. Lemaire (Cochinchine).

3206. [S3b et Σ] Soit un système hydraulique S (réservoir, nappe souterraine continue ou discontinue, etc. qui se vide par un ou plusieurs exutoires fonctionnant tous.

Dans la période considérée, quand il n'y a pas d'apports extérieurs, la condition (Q débit des exutoires, V volume utile contenu dans le système)

$$(1) \qquad V = f(Q)$$

est, comme je l'ai montré, nécessaire et suffisante pour que le système possède une courbe des débits, un graphique de prévision des débits

$$(2) \qquad t - t_0 = \varphi(Q_0) - \varphi(Q).$$

On peut ainsi se poser ce problème très général : quels sont les systèmes S susceptibles de satisfaire à la loi (1), ou encore à la loi (2), dans certaines périodes, soit exactement, soit asymptotiquement.

En particulier : 1° quels sont les systèmes hydrauliques qui, recevant des apports extérieurs (pluies, par exemple) régis par une loi convenable (naturelle, ou pas trop restrictive), ont le débit total de leurs exutoires défini, exactement ou asymptotiquement, par une relation (1) ou (2), en dehors des moments où les apports arrivent? Ces systèmes posséderont, *pour leurs exutoires, un régime propre permanent* (possible); 2° parmi ces derniers systèmes, rechercher ceux où l'arrivée des mêmes apports a comme seul effet (après une courte période troublée que l'on néglige) de rétablir un état antérieurement réalisé, exactement ou asymptotiquement : ces systèmes posséderont, *dans toute leur étendue, un régime propre permanent* (possible).

L'exemple le plus simple d'un pareil système est un vase qui se vide par un ajutage ou un déversoir. D'autres exemples ont été indiqués par M. Boussinesq et par moi (1).

E. MAILLET.

---

(1) Bibliographie sommaire : BOUSSINESQ, *Journ. de Math.*, 1904; E. MAILLET, *Essais d'hydraulique souterraine et fluviale*, Paris, Hermann, 1905; E. MAILLET, *Bull. Soc. math.*, 1905, p. 2 et 129; *Annales Ponts et Chaussées*, 1er trim., 1906, p. 110.

**3207.** **[I23a]** Soit une fraction continue *illimitée* donnée

$$J = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots,$$

où $a_i = b_i c_i^{-1}$ ($b_i$, $c_i$ entiers positifs). Quand $b_i \geqq c_i c_{i-1}$ quel que soit $i$, J est une irrationnelle; mais, quand ceci n'a pas lieu quel que soit $i$, J peut être rationnel; exemple :

$$2 = \frac{3}{2} + 1 : \frac{3}{2} + 1 : \frac{3}{2} + \ldots .$$

Les fractions continues illimitées J dont la valeur est *rationnelle* sont-elles caractérisées par quelque propriété spéciale? Par exemple, doivent-elles être périodiques?

E. Maillet.

**3208.** **[L¹16b]** Soient dans un plan quatre droites formant quatre triangles T, $T_1$, $T_2$, $T_3$. On considère la conique inscrite au triangle T et qui a pour foyer l'orthocentre de ce triangle, puis les trois coniques analogues déduites des autres triangles.

Ces quatre coniques sont bitangentes à un même cercle.

Je puis le démontrer en prouvant que ce cercle est le cercle inscrit à l'hypocycloïde à trois rebroussements tangente aux quatre droites, mais je désirerais une démonstration directe.

L. Bickart.

**3209.** **[J2f]** $n$ urnes contiennent chacune $p$ jetons; on puise au hasard dans $k$ des urnes et on enlève $k$ jetons (un jeton par urne, $k < n$ et diviseur du produit $np$); on recommence l'opération tant que le nombre des urnes contenant encore des jetons est au moins égal à $k$ (les urnes vides sont supprimées). Quelle est la probabilité pour qu'après la dernière opération il ne reste plus un seul jeton?

Mathieu.

**3210.** **[I2b]** On a fait remarquer que les caractères de divisibilité par 37, 41, 73 et 101 s'expriment simplement.

A-t-on fait remarquer qu'il en est de même pour le diviseur composé 91 et pour les diviseurs premiers 137, 239, 271, 9091 et 9901? E. LEBON.

**3211.** [**D 4 b** et Σ] (Comparer rép. à **1477**, **1907**, p. 57). Il existe des fonctions entières de $z$ d'ordre *infini* dont le module est $\leqq 1$ dans un secteur fini du plan des $z$ complexes ayant son sommet à l'origine; exemple : $e^{G(z)-1}$, quand $G(z)$ est une fonction entière d'ordre fini dont le module est $\leqq 1$ dans ce secteur.

Il existe des produits canoniques d'ordre infini (*voir* la définition par exemple dans *A. E. N.*, 1906, p. 271 et 276) dont le module est $\leqq 1$ le long d'une demi-droite D issue de l'origine; exemple :

$$\Phi(z) = \prod_{1}^{\infty} (1 - u_n) e^{u_n + \frac{u_n^2}{2} + \ldots + \frac{u_n^{p_n}}{p_n}},$$

où $u_n = \frac{z}{a_n}$, et, pour $n > 1$, $p_n = \tau_n \log n$ est impair, $\tau_n$ variant avec $n$ entre deux limites fixes $> 0$, les zéros $a_n$ étant tous sur une même demi-droite, dont D est le prolongement.

Ceci posé, *existe-t-il des produits canoniques d'ordre infini, et dont le module reste* $\leqq 1$ *dans un secteur d'angle fini du plan des* $z$? E. MAILLET.

**3212.** [**V 9**] Libri (*Mém. de Math.*, t. I, 1829) annonçait, pour les Volumes suivants, la solution de ces cinq problèmes :

Trouver un nombre premier supérieur à un nombre donné.

Déterminer le nombre premier qui suit immédiatement un nombre donné.

Exprimer, en fonction des nombres $a$ et $b$, la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ de ceux, parmi les entiers compris entre $a$ et $b$, qui ont seulement $m$ facteurs.

Soit $4p = x^2 + zy^2$; déterminer $z$ de manière que $x$ et $y$ soient résidus cubiques du nombre premier $p$.

Déterminer le nombre premier $p$ tel que, parmi ses résidus cubiques, il y en ait au moins un de forme $x^3 + y^3$.

Libri a-t-il donné suite à ce projet? A. Aubry.

**3213.** [V9] Dans sa *Communication sur la décomposition des nombres* (Paris, 1867), Landry parle de sa découverte d'un principe très simple qui lui permettait d'aborder aisément la décomposition des grands nombres en leurs facteurs premiers. Connaît-on ce principe? A. Aubry.

**3214.** [O1] Un plan indéfini est rempli de cercles égaux dans les intervalles desquels on en place d'autres égaux entre eux et tangents aux premiers, et ainsi de suite; remplira-t-on tout le plan donné?

Même question pour des sphères dans un espace indéfini?

A. Aubry.

**3215.** [I17] Ne pourrait-on pas exposer d'après Gauss (*Disq. ar.*, n$^{os}$ 266 et suivants) la théorie des formes ternaires en la particularisant, en vue d'obtenir une démonstration élémentaire de ce théorème de Fermat : *tout entier est la somme de trois triangulaires,* donné comme corollaire au n° 293 et duquel Gauss déduit immédiatement la possibilité de la décomposition d'un entier quelconque en quatre carrés? A. Aubry.

**3216.** [V1a] On parle beaucoup depuis quelque temps de l'impopularité et même du recul des Mathématiques. On en accuse les traités classiques, qui devraient être différents, selon qu'ils s'adressent à des étudiants voulant en faire une étude spéciale, ou à des amateurs désirant seulement en avoir une idée générale sans être obligés de passer par des démonstrations et des discussions interminables, qui leur

font paraître cette science sous un aspect rébarbatif, ce qui enlève à celle-ci de nombreux adeptes.

Le remède ne serait-il pas de créer pour ces derniers des ouvrages contenant seulement les énoncés importants ou intéressants avec des démonstrations très abrégées et des notices historiques ainsi que des récréations mathématiques?

A. AUBRY.

3217. [R 7 et R 8] Bossut a donné, dans les anciens *Mém. de l'Ac. des Sci.*, l'étude de la courbe d'un seau montant dans un puits, c'est-à-dire la figuration des oscillations d'un pendule dont la tige varie arithmétiquement. A-t-on de même étudié celles d'un seau attaché au goulot d'un pompe, c'est-à-dire les oscillations d'un pendule dont la masse croît arithmétiquement? A. AUBRY.

3218. [R 1 et R 9] Où trouve-t-on une théorie analytique un peu complète du joint Clémens? Où trouve-t-on une théorie générale un peu complète des excentriques à cadre, particulièrement de ceux qui présentent sur le contour de leur section droite des points anguleux? *Zed.*

3219. [V 9] Dans *Les femmes dans la science*, par M. Rebière, à la page 52, il y a un petit récit intitulé « Cauchy », où il est dit : le grand géomètre (je crois qu'il n'y en avait pas d'autre que le baron Augustin Cauchy) fut d'abord commis en soieries à Lyon. Mais, d'après Valson, Cauchy reçut sa première éducation à Arcueil; là il commença l'étude des Mathématiques sous la direction de M. Dinet. En 1805, à l'âge de 16 ans, il était reçu à l'École Polytechnique et n'a jamais été à Lyon. De quel Cauchy parle M. Rebière?

N. PLAKHOWO (Russie).

# RÉPONSES.

**3082.** (**1906**, 164). (G. Lemaire). — *Étymologie de théodolite* (**1907**, 40). — Dans l'article intitulé : *Sur l'origine du mot théodolite* (*Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathématiques*, par M. Terquem, t. VII, 1861, p. 35), on lit :

« Dans la collection anglaise : *The London, Edinburg and Dublin philosophical Magazine*, vol. XXVIII, janvier-juin 1846, n° XLVI, p. 287-288, l'érudit M. August de Morgan donne en deux pages ses conjectures sur la dérivation du mot *théodolite*.

» Il le rencontre déjà dans un Ouvrage anglais publié à Londres en 1571, et réimprimé en 1591 : c'est *Geometrical practise named Pantometria*, Ouvrage commencé par Leonard Digges et terminé par son fils Thomas Digges.

» Le Chapitre XXVII roule sur *The composition of the instrument called Theodelitus;* ce n'est autre chose qu'un cercle gradué sur lequel tourne une règle munie de pinnules. Diverses locutions, telles que *circle called Theodelitus* ou *planisphere called Theodelitus*, font voir que le mot *théodélite* est employé ici comme *adjectif* et non comme *substantif : cercle théodélité*. Le cercle est placé *horizontalement;* placé verticalement, cela aurait été l'*astrolabe* de ce temps et pas autre chose. Leybourn, dans son *Compleat Survoyer* (1657), l'Arpenteur accompli, nous apprend qu'on ajoutait *quelquefois* à cet instrument un *cercle de hauteur, altitude circle;* et Stone, dans son *Dictionnaire mathématique* (1726), dit que l'instrument était *quelquefois* muni d'un télescope.

» Une règle munie de pinnules et tournant sur un cercle gradué entrait dans la composition de plusieurs instruments d'astronomie, importés de l'Orient, et une telle règle portant en arabe le nom de *alhidada*, ce mot fut aussi appliqué à ces instruments (1). Le mot

(1) *Al hidat*, instrument servant à diriger; du verbe *hidi*, diriger.

*alhidade* et aussi *alidade* fut complètement naturalisé en France et fut aussi employé par les écrivains anglais au XVI^e^ siècle, entre autres par Digges lui-même. Les mots *théodolite* et *alidade* diffèrent tellement au premier abord, que l'idée de faire dériver l'un de l'autre ne se présente pas naturellement. Cependant, c'est cette dérivation qu'adopte M. de Morgan, avec grande probabilité.

» Il trouve d'abord une formation intermédiaire dans l'Ouvrage de M. William Bourn : *Treasure for travailers* (Trésor des travailleurs) (1578); il ne se sert pas du mot *théodolite*, mais désigne l'instrument de Digges sous le nom de *horizontal* ou de *sphère plate*. Il commence par écrire *alydeday* au lieu d'*alidade*, et puis change cela et écrit constamment *athelida*. Comme le cercle *athelidé* de Bourn est le même instrument que le cercle théodélité de Digges, la dernière dénomination peut provenir par la corruption de la première, ce qui n'a rien de surprenant dans le moyen âge, où il n'existait rien de fixe ni pour l'orthographe ni pour la prononciation. « La même voyelle avait divers sons, comme cela a encore lieu en anglais; et en français *ouvrir* vient de *aperire*, *a* changé en *ou*; *alouette* de *alauda*, *au* changé en *ou*; *ierre* de *hedera*, *e* changé en *i*; l'article *le* s'est confondu avec le nom, d'où *lierre* et maintenant par redoublement *le lierre*, et une foule d'autre mots. M. Breton (de Champ), auquel j'ai communiqué ce travail, pense que l'article anglaie *the* a été congloméré avec halidade, *the halidade* et d'où *théodolite*. Cette étymologie est certes mieux fondée que celle qu'on a tirée du grec, θεάομαι, et δολιχός, *voir de loin*, cela suppose le télescope; et M. de Morgan objecte avec raison que le mot *théodolite* a précédé de beaucoup l'invention du télescope. »

E. Grigorief (Kazan, Russie).

**3084.** (**1906**, 164) (*Neisirab*). — *Somme de trois carrés* (**1907**, 41). — La décomposition d'un carré en une somme de trois carrés différents de zéro peut se faire au moyen des formules suivantes bien connues :

$$(a^2+ab+b^2)^2=(a^2+ab)^2+(ab+b^2)^2+(ab)^2,$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2=(a^2+b^2-c^2)^2+(2ac)^2+(2bc)^2,$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ad+bc)^2+4(ac-bd)^2,$$

et

$$(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)^2$$
$$= (a^2 + ab + ac - bc)^2 + (a+b)^2(b+c)^2 + (b+c)^2(c+a)^2,$$
$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)^2$$
$$= (a-b)^2(a-c)^2 + (b-a)^2(b-c)^2 + (c-a)^2(c-b)^2,$$

.......................................................

E. Grigorief (Kazan, Russie).

En 1884. j'ai donné une formule générale pour le nombre des décompositions d'un carré en cinq carrés (voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 25 février 1884). Or, il y a une formule tout à fait analogue pour le nombre des solutions de l'équation

$$n^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{1}$$

en nombres entiers $x$, $y$, $z$ positifs, nuls ou négatifs. Si l'on fait

$$n = 2^\mu m . q^\alpha q'^{\alpha'} \ldots \quad (\mu \geqq 0,\ \alpha \geqq 0,\ \alpha' \geqq 0, \ldots), \tag{2}$$

$m$ désignant le produit de tous les facteurs premiers de $n$ qui sont de la forme $4n+1$ et $q$, $q'$, ... étant des nombres premiers de la forme $4n+3$, l'équation (1) admet

$$N = 6m\left(q^\alpha + 2\frac{q^\alpha - 1}{q-1}\right)\left(q'^{\alpha'} + 2\frac{q'^{\alpha'} - 1}{q'-1}\right)\ldots \tag{3}$$

solutions. Si le nombre $n$ ne contient aucun facteur premier de la forme $4n+1$ on doit prendre $m = 1$.

Pour la démonstration on consultera ma Note citée. Le nombre des solutions de l'équation $n^2 = x^2 + y^2$ étant le quadruple du nombre des diviseurs de $m^2$, on conclut de la formule (3) aisément, que tout carré peut être représenté par une somme de trois carrés différents de zéro, excepté les carrés $2^{2\mu}$ et $5^2 . 2^{2\mu}$.

A. Hurwitz (Zurich).

**3090.** (**1906**, 185) (R. Guimaraes). — *Trisection de l'angle.* — La trisection de l'angle n'est possible qu'au moyen de systèmes articulés; elle est impraticable à la règle et au compas, c'est-à-dire graphiquement. On ne peut dire qu'on puisse faire la trisection de

l'angle droit, par exemple; seulement on sait construire l'angle de 30° qui en est le tiers.

En réalité, les arcs multiples de 3° sont les seuls, en nombres entiers de degrés, dont les lignes trigonométriques puissent être exprimées sous forme finie et par de simples racines carrées. Ces lignes peuvent donc être construites par la règle et le compas. Les triples de ces arcs, soit les multiples de 9°, peuvent donc être divisés en trois parties égales par des moyens graphiques, indirectement il est vrai, et dans ce sens que l'on peut construire indépendamment un arc de $3a^\circ$ et un arc de $9a^\circ$; mais il existe d'autres arcs dont la trisection soit possible. Ce sont les triples des arcs sous-tendus par les côtés des polygones réguliers dont on sait effectuer graphiquement l'inscription, c'est-à-dire les polygones réguliers de $p = 2^{2n} + 1$ côtés, à condition que $p$ soit premier; problème résolu pour $p = 3$ et 5 (Euclide); 17 (Gauss); 257 (Hermes).

On n'a encore pu aller plus loin.

*Bibliographie sommaire :*

I. La trisection a fait ici déjà l'objet de trois questions : **2168** [**1901**, 221; **1901**, 304; **1904**, *Suppl.* (mai-juin); **1905**, 37]; **2363** (**1902**, 143); **2733** (**1904**, 135).

II. F. Dieguez. — Note sur la trisection (*Gaceta de Mat. elem.*, 1903, p. 312-313).

III. E. Gelin. — Traité de Trigonométrie plane et sphérique, 2e éd., 1906, p. 60-65 et 224-236.

H. Brocard.

3093. (**1906**, 187) (G. Lemaire). — *Planimètres.* (**1907**, 44). — Il existe en allemand la théorie du planimètre polaire d'Amsler, tout à fait élémentaire, aux pages 32 et suivantes du *Lehrbuch der praktischen Geometrie,* de Doll et Nestle, Leipzig, Teubner, 1905.

N. Plakhowo (Russie).

3109. (**1906**, 236) (A. Boutin). — *Sur une identité* (**1907**, 46). — Pour plus de commodité je considère l'expression

$$f(z, a, n) = \frac{z^n}{a} - \frac{n}{1}\frac{1}{a(a+1)}z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1.2}{a(a+1)(a+2)}z^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1.2.3}{a(a+1)(a+2)(a+3)}z^{n-3} + \ldots,$$

et l'identité bien connue et facile à démontrer de proche en proche

$$\frac{k!}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+k)} = \frac{1}{a} - \frac{k}{2}\frac{1}{a+1} + \frac{k(k-1)}{1.2}\frac{1}{a+2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.4}\frac{1}{a+3} + \ldots$$

permet de la mettre sous la forme

$$f(z, a, n) = \frac{z^n}{a} - \frac{n}{1}z^{n-1}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right] + \frac{n(n-1)}{1.2}z^{n-2}\left[\frac{1}{a} - \frac{2}{a+1} + \frac{1}{a+2}\right] - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}z^{n-3} \times \left[\frac{1}{a} - \frac{3}{a+1} + \frac{3}{a+2} - \frac{1}{a+3}\right] + \ldots,$$

d'où, rassemblant les termes en $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+2}, \ldots,$

$$f(z, a, n) = \frac{(z-1)^n}{a} + \frac{n}{1}\frac{(z-1)^{n-1}}{a+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(z-1)^{n-2}}{a+2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{(z-1)^{n-3}}{a+3} + \ldots.$$

Pour $z = 2$, $a = n + 1$, on a l'identité de M. Boutin, et les deux membres expriment l'intégrale $\int_0^1 x^n(1+x)^n dx$. Dans le cas général, on trouve

$$f(z, a, n) = \int_0^1 t^{a-1}(t + z - 1)^n dt.$$

E. Malo.

L'identité citée n'est qu'un cas particulier, pour $x = 1$, de l'identité plus générale

$$\frac{(1+x)^n}{n+1} - \frac{n(1+x)^{n-1}}{(n+1)(n+2)}x + \frac{n(n-1)(1+x)^{n-2}}{(n+1)(n+2)(n+3)}x^2 - \ldots = \frac{1}{n+1} + \frac{nx}{n+2} + \frac{n(n-1)x^2}{1.2(n+3)} + \ldots.$$

Or, si l'on multiplie l'un et l'autre membre par $x^{n+1}$, le premier

sera le développement selon la règle de l'intégration par parties de l'intégrale $\int_0^x x^n(1+x)^n dx$ et le second l'intégrale de la même fonction préalablement développée par la formule du binome.

GONZALEZ QUIJANO (Xérès).

Autre réponse de M. *Ursus*.

**3117.** (1906, 258) (G. RICALDE). — *Identités*. — On sait que

$$C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ldots = (1+x)^n,$$
$$C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \ldots = (1-x)^n.$$

On aura, en ajoutant les deux identités,

$$C_n^0 + C_n^2 x^2 + C_n^4 x^4 + \ldots = \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2} = \varphi(x),$$

ou bien

$$C_n^0 + C_n^2 x + C_n^4 x^2 + \ldots = \varphi(\sqrt{x}) = \psi(x),$$

d'où

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = \psi(1)$$
$$C_n^2 C_1^1 + C_n^4 C_2^1 + C_n^6 C_3^1 + \ldots = \psi'(1)$$
$$C_n^4 C_2^2 + C_n^6 C_3^2 + \ldots = \frac{\psi''(1)}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, par conséquent,

$$(C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots) - (C_n^2 C_1^1 + C_n^4 C_2^1 + C_n^6 C_3^1 + \ldots)$$
$$+ (C_n^4 C_2^2 + C_n^6 C_3^2 + \ldots) - \ldots$$
$$= \psi(1) - \psi'(1) + \frac{\psi''(1)}{2!} + \ldots = \psi(0) = 1.$$

Pour démontrer la seconde relation, on peut écrire

$$x^n \psi\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = x^n\left(\psi(1) - \frac{\psi'(1)}{x^2} + \frac{\psi''(1)}{2!\,x^4} - \ldots\right)$$
$$= x^n\psi(1) - x^{n-2}\psi'(1) + \frac{x^{n-4}}{2!}\psi''(1) - \ldots.$$

En dérivant, on a

$$n x^{n-1}\psi(1) - (n-2)x^{n-3}\psi'(1) + (n-4)x^{n-5}\frac{\psi''(1)}{2!} - \ldots$$
$$= n x^{n-1}\psi\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + 2x^{n-3}\psi'\left(1 - \frac{1}{x^2}\right),$$

et, si $x = 1$,

$$n\psi(1) - (n-2)\psi'(1) + (n-4)\frac{\psi''(1)}{2} - \ldots$$
$$= n(C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots) - (n-2)(C_n^2 C_1^1 + C_n^4 C_3^1 + \ldots)$$
$$+ (n-4)(C_n^4 C_2^2 + \ldots) - \ldots$$
$$= n\psi(0) + 2\psi'(0) = n + n(n-1) = n^2.$$

GONZALEZ QUIJANO (Xérès).

3119. (1906, 259) (NAZAREVSKY). — *Transformation d'une équation.* — Les relations pour la transformation

$$kx^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p = Au^2 + Buv + Cv^2,$$
$$u = ax^2 + a'x + a'', \qquad v = bx^2 + b'x + b''$$

sont les suivantes :

$$Q^3 - mQ^2 + (ln - 4kp)Q + 4kpm - pl^2 - kn^2 = 0,$$
$$D = B^2 - 4AC, \qquad \omega = ab'' - a''b, \qquad \omega' = ab' - a'b,$$
$$D\omega^2 = Q^2 - 4kp = \frac{pl^2 + kn^2 - lmn}{Q - m} - ln,$$
$$Aa^2 + Bab + Cb^2 = k, \qquad D\omega\omega' = lQ - 2kn,$$
$$2ka' = al - \omega'(Ba + 2Cb),$$
$$2kb' = bl + \omega'(2Aa + Bb),$$
$$2ka'' = aQ - \omega(Ba + 2Cb),$$
$$2kb'' = bQ + \omega(2Aa + Bb),$$
$$Aa'^2 + Ba'b' + Cb'^2 = m - Q,$$
$$Aa''^2 + Ba''b'' + Cb''^2 = p.$$

*Exemple.* — Pour l'expression $3x^4 + 25x^3 + 14x^2 + 17x + 9$, on aura

$$(Q - 15)(Q^2 + Q + 332) = 0, \qquad Q = 15,$$
$$D\omega^2 = 117, \qquad D = 13, \qquad \omega = 3.$$

Soit

$$A = 1, \qquad B = 1, \qquad C = -3, \qquad a = 2, \qquad b = 1;$$

alors

$$a' = 13, \qquad b' = 10, \qquad a'' = 7, \qquad b'' = 5,$$
$$3x^4 + 25x^3 + 14x^2 + 17x + 9 = u^2 + uv - 3v^2,$$
$$u = 2x^2 + 13x + 7, \qquad v = x^2 + 10x + 5.$$

A. WEREBRUSOW (Russie).

Autre réponse de M. A. GÉRARDIN.

**3128.** (**1906**, 260) (G. Lemaire). — L'équation peut s'écrire

$$1.2.3.4\ldots n = P = (N-1)N(N+1).$$

On a, pour

| | | |
|---|---|---|
| $n=3,$ | $P=1.2.3,$ | $N=2;$ |
| $n=4,$ | $P=1.2.3.4=2.3.4,$ | $N=3;$ |
| $n=5,$ | $P=1.2.3.4.5=4.5.6,$ | $N=5;$ |
| $n=6,$ | $P=720=8.9.10,$ | $N=9;$ |
| $n=7,$ | $P=5040.$ | |

*Remarques.* — Le nombre N est le plus grand entier contenu dans la racine cubique du produit P.

A partir de $n=5$, P se termine toujours par zéro. Il faut donc que l'un des nombres $N-1$, $N$, $N+1$, soit multiple de 5.

Dès lors qu'un de ces nombres est premier, il est manifestement impossible de décomposer les deux autres en tous les nombres inférieurs. Mais une autre difficulté se présente bientôt, c'est que P se termine par 6 zéros; alors $\sqrt[3]{P}$ doit se terminer par 2 zéros, ce qui exige qu'un des nombres $N-1$, $N$, $N+1$, soit multiple de 50. Les limites ne présentent plus d'élasticité, et il devient de toute impossibilité de satisfaire à l'équation proposée.

Les seules solutions sont donc $n=3$, 4, 5 et 6.

H. Brocard.

**3129.** (**1906**, 261) (E.-N. Barisien). — *La somme des cubes de trois nombres entiers est-elle un carré?* — Pour répondre à cette question, il faudra résoudre l'équation suivante, en nombres entiers :

$$x^3+y^3+z^3=u^2.$$

D'une façon plus générale, une solution de l'équation

$$Ax^3+By^3+A^2B^2z^3=u^2$$

est fournie par

$$A[x(Ax^3+2By^3)]^3+B[y(By^3+2Ax^3)]^3+A^2B^2[3x^2y^2]^3$$
$$=(A^2x^6+7ABx^3y^3+B^2y^6]^2 \ (^1).$$

(1) *Voir :* Édouard Lucas, *Recherches sur plusieurs Ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'Arithmétique supérieure*, p. 50. Ouvrage imprimé à Rome, en 1877.

En supposant : $A = 1$ et $B = 1$, nous obtiendrons la formule

$$[x(x^3+2y^3)]^3+[y(y^3+2x^3)]^3+[3x^2y^2]^3=[x^6+7x^3y^3+y^6]^2,$$

à l'aide de laquelle on pourra avoir une série indéfinie de solutions de l'équation proposée, en donnant à $x$ et à $y$ toutes les valeurs des nombres entiers positifs ou négatifs.

***Exemples :***

$$x = 5, \qquad y = 2,$$
$$(705)^3+(516)^3+(300)^3=(22689)^2.$$
$$x = -3, \qquad y = 2,$$
$$(33)^3+(-92)^3+(108)^3=(719)^2.$$
$$x = 1, \qquad y = 2,$$
$$(17)^3+(20)^3+(12)^3=(121)^2.$$

MEHMED NADIR (Alep, Syrie, Turquie).

Autre réponse de M. BROCARD, qui ajoute :

La même question a été résolue aussi avec plus de trois cubes.

Pour des recherches tout à fait analogues et qu'il est utile de rappeler, *voir, I. M.*, question 1882 (**1900**, 196; **1901**, 183; **1902**, 16, 155; **1903**, 82; **1904**, 288). H. BROCARD.

Autre solution de M. PLAKHOWO. Réponse de M. GÉRARDIN, indiquant deux formules de solutions, communiquée à M. BARISIEN.

**3130.** (**1906**, 261) (E.-N. BARISIEN). — Si $N = a^2 + b^2$, $N^n$ peut toujours être exprimé sous la même forme $N^n = a_n^2 + b_n^2$. Les parties $a_{n+1}$, $b_{n+1}$ de la puissance suivante $N^{n+1}$ se déduisent des parties $a_n$, $b_n$ de $N^n$ par les formules

$$(1) \qquad a_{n+1} = aa_n \mp bb_n, \qquad b_{n+1} = ab_n \pm ba_n.$$

Ainsi chaque puissance peut être exprimée sous la forme requise à l'aide de la précédente. On a

$$N^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2,$$
$$N^3 = (a^3 - 3ab^2)^2 + (3a^2b - b^3)^2,$$
$$N^4 = (a^4 - 6a^2b^2 + b^4) + (4a^3b - 4ab^3)^2,$$
$$N^5 = (a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4)^2 + (5a^4b - 10a^2b^3 + b^5)^2,$$
$$N^6 = (a^6 - 15a^4b^2 + 15a^2b^4 - b^6)^2 + (6a^5b - 20a^3b^3 + 4ab^5)^2.$$

Les $a_{2m}$, $b_{2m}$ d'une puissance paire $N^{2m}$ se forment plus aisément à l'aide des $a_m$, $b_m$ de $N^m$; car

$$N^{2m} = (a_m - b_m)^2 + (2a_m b_m)^2.$$

Les $a_{2m+1}$, $b_{2m+1}$ d'une puissance impaire $N^{2m+1}$ se forment plus aisément à l'aide de $N^{2m}$ par la loi (1); ainsi

$$N^{2m+1} = (aa_{2m} \mp bb_{2m})^2 + (ab_{2m} \pm ba_{2m})^2.$$

L'application répétée de la loi (1) conduit aux formules suivantes où les parties $a_n$, $b_n$ de $N^n$ sont exprimées explicitement en fonction de $a$, $b$.

Soit

$$C_r = n! : r!(n-r)! = \frac{n!}{r!(n-r)!};$$

quand $n$ est pair,

$$a_n = a^n - C_2 a^{n-2} b^2 + C_4 a^{n-4} b^4 - \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}n} b^n,$$

$$b_n = \qquad C_1 a^{n-1} b + C_3 a^{n-3} b^3 + \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}n-1} ab^{n-1};$$

quand $n$ est impair,

$$a_n = a^n - C_2 a^{n-2} b^2 + C_4 a^{n-4} b^4 - \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}n-1} C_{n-1} ab^{n-1},$$

$$b_n = b^n - C_2 a^2 b^{n-2} + C_4 a^4 b^{n-4} - \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}n-1} C_{n-1} a^{n-1} b.$$

Lieutenant-Colonel ALLAN CUNNINGHAM.
[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

Autres réponses de MM. PLAKHOWO et BROCARD. M. G. Candido a publié dans *G. B.*, 2ᵉ série, t. XII, 1904, une Note sur l'équation plus générale

$$x^2 - \alpha y^2 = z^n.$$

*Voir* encore les réponses à 3142 (**1907**, 117). LA RÉDACTION.

3133. (**1906**, 262) (LAZZARINI). — *Sur une interprétation géométrique.* — Nous opérons dans l'espace à quatre dimensions. Alors l'équation de la sphère qui a pour centre l'origine et pour rayon 1 est

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1.$$

Soit A($abco$) un point de l'hyperplan de coordonnées $t = 0$; pro-

jetons-le du pôle $P(0,0,0,1)$. Le point $A_1$ intersection de OA avec la sphère (1) a pour coordonnées les solutions du système

$$x^2+y^2+z^2+t^2=1,$$
$$x=a(1-t),\qquad y=b(1-t),\qquad z=c(1-t),$$

qui sont

$$x=\frac{2a}{\alpha^2+1},\qquad y=\frac{2b}{\alpha^2+1},\qquad z=\frac{2c}{\alpha^2+1},\qquad t=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1},$$

ayant posé

$$\alpha^2=a^2+b^2+c^2.$$

L'équation de l'hyperplan polaire de $A_1$ est

$$2ax+2by+2cz+(\alpha^2-1)t=0;$$

donc l'équation du cercle polaire de $A_1$ sera

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2+t^2=1,\\ 2ax+2by+2cz+(\alpha^2-1)t=0. \end{cases}$$

Projetons stéréographiquement le cercle (2) dans l'hyperplan de coordonnées $t=0$. Une génératrice du cône de sommet P et qui a pour directrice le cercle (2) est

$$(3)\qquad x=m(t-1),\qquad y=n(t-1),\qquad z=p(t-1).$$

Éliminant $x, y, z, t$ entre les équations (2) et (3) et posant

$$m^2+n^2+p^2=\beta^2,$$

on a

$$(4)\qquad 4am+4bn+4cp-(\alpha^2-1)(\beta^2-1)=0.$$

Le mouvement de la génératrice est déterminé par les équations (2) et (4) entre lesquelles, éliminant $m$, $n$, $p$, on a l'équation du cône

$$(t-1)(4ax+4by+4cz)$$
$$-(a^2+b^2+c^2-1)[x^2+y^2+z^2-(t-1)^2]=0.$$

Si $t=0$, on a

$$(5)\quad (x^2+y^2+z^2-1)(a^2+b^2+c^2-1)+4ax+4by+4cz=0,$$

qui est l'équation de la sphère projection dans l'espace $t=0$ du cercle (2). Les sphères (5) et $x^2+y^2+z^2=1$ ont en commun le cercle

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ ax+by+cz=0; \end{cases}$$

de plus, la sphère (5) est orthogonale à la sphère imaginaire

$$x^2+y^2+z^2+1=0.$$

UMBERTO BINI (Alatri, Italie).

3137. (1907, 5) (L. BICKART). — L'équation linéaire du premier degré à deux inconnues (mais à coefficients incommensurables) a été traitée par P.-L. Tchébychef (*Mém. de l'Acad. imp. de Saint-Pétersbourg*, 1866, 54 pages). Voir *B. D.*, 1872, p. 39-40.

Antérieurement, .l'attention s'était déjà portée sur ce sujet. C.-G.-J. Jacobi, par exemple, avait traité le système de deux équations linéaires du premier degré à trois inconnues.

La généralisation a été abordée à diverses reprises par Lejeune-Dirichlet, C. Hermite, H. Minkowski, L. Kronecker, etc.

Dans le cas spécial de l'énoncé, une solution par approximations successives, mais en nombres entiers, pourra s'obtenir en prenant les quantités A, B, C avec un même nombre de décimales, et modifiant la dernière de façon à éviter tout diviseur commun.

Pour un précis des résultats actuels et pour la bibliographie, consulter l'*Encyclopédie fr.-all. des Sc. math.*, t. I, Vol. III, fasc. 1-2: *Théorie des nombres, théorie arithmétique des formes*, par K.-T. VAHLEN et E. CAHEN. H. BROCARD.

3141. (1907, 6) (*Arcitenens*). — 1° *Tables de nombres premiers.* — Question déjà posée : *a.* sous le n° 191 (1894, 97), *voir* les réponses 1895, 40, 219; *b.* sous le n° 2667 (1903, 257), *voir* les réponses 1903, 328; 1904, 203; 1905, 45, 181; *c.* sous le n° 2847 (1904, 262), *voir* la réponse 1905, 182.

2° *Plus grand nombre premier connu.* — Question posée déjà sous le n° 176 (1894, 94), *voir* les réponses 1894, 203; 1895, 217, 403; 1898, 7. H. BROCARD.

Réponse analogue de M. PLAKHOWO; autre réponse de M. le lieutenant-colonel ALLAN CUNNINGHAM, qui sera publiée ultérieurement.

LA RÉDACTION.

**3142.** (**1907**, 7) (E.-N. Barisien). — La $6^e$ puissance d'une somme de deux carrés est nécessairement une somme de deux carrés, puisque tout produit de sommes de deux carrés est lui-même une somme de deux carrés. Cette proposition bien connue a été rappelée ici même tout récemment.

Quant à la décomposition de $(a^2+b^2)^6$ en une somme de deux carrés, elle peut s'effectuer de deux façons pour $b \neq a$ (exception pour $b = a$).

Exemples : $a = 2$, $b = 1$.

$$(2^2+1^2)^6 = 5^6 = 15625 = 44^2+117^2 \text{ (formule énoncée)},$$

mais aussi

$$15625 = 75^2+100^2.$$

De même, pour $a = 3$, $b = 1$, on a

$$10^6 = 352^2+936^2,$$

mais aussi

$$10^6 = 800^2+600^2.$$

A la question 3142 doit donc logiquement s'ajouter l'indication d'une seconde formule de décomposition de $(a^2+b^2)^6$ en somme de deux carrés.

Or, on a l'identité immédiate

$$(a^2+b^2)^6 = (a^2+b^2)^2(a^2+b^2)^4.$$

Pour la transformer en une somme de deux carrés, il suffira de remplacer $(a^2+b^2)^2$ par $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$.

On aura ainsi

$$(a^2+b^2)^6 = (a^2+b^2)^4(a^2-b^2)^2+(a^2+b^2)^4(2ab)^2$$

ou

$$(a^2+b^2)^6 = [(a^2-b^2)(a^2+b^2)^2]^2+[2ab(a^2+b^2)^2]^2.$$

*Note.* — D'après la question 3130 (**1906**, 261) on a

$$(a^2+b^2)^3 = [a(3b^2-a^2)]^2+[b(3a^2-b^2)]^2.$$

On en déduira, en élevant au carré,

$$(a^2+b^2)^6 = [a^2(3b^2-a^2)^2-b^2(3a^2-b^2)^2]^2 + [2ab(3b^2-a^2)(3a^2-b^2)]^2.$$

Réductions faites, on obtient la formule de l'énoncé 3142.

H. Brocard.

Réponse analogue de M. A. Gérardin.

Voici une réponse générale à la question 3142 et aussi à la question 3130 (1906, 261).

Si $a^2 + b^2 = p$ est premier, $(a^2 + b^2)^n = A^2 + B^2$ (avec A premier à B) d'une seule manière, pour chaque valeur de $n$. Mais, si $a^2 + b^2$ est composé, on peut l'exprimer sous cette forme de plusieurs manières; chacune de ces expressions $(a_r^2 + b_r^2)^n = A_r^2 + B_r^2$ d'une seule façon, avec $a_r$ premier à $B_r$ (quand $a_r$ est premier à $b_r$).

Lieutenant-Colonel Allan Cunningham.

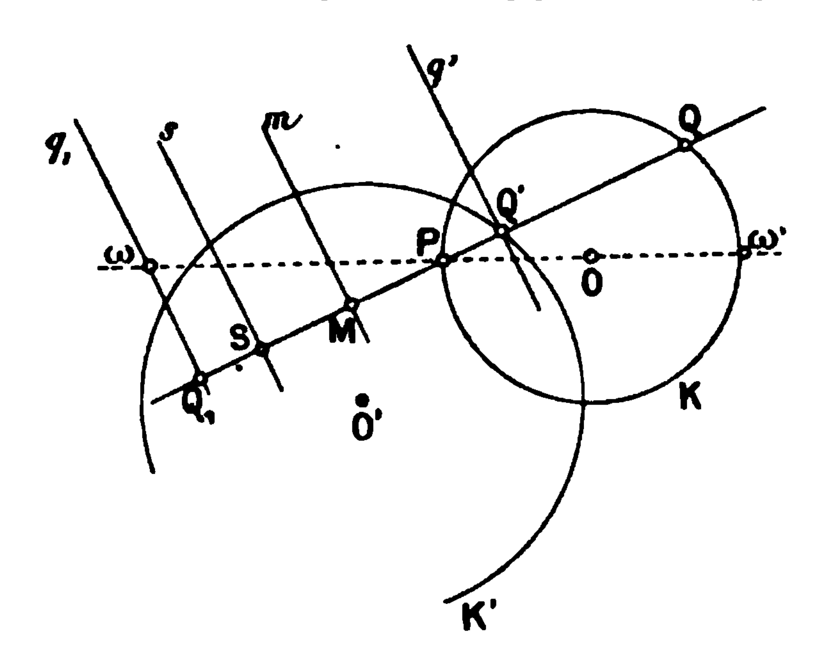
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

Autre réponse de M. Plakhowo qui renvoie aux réponses à 459 et 460 (1895, 19) parues dans l'*Intermédiaire* (1895, 370; 1896, 228). *Voir* aussi les réponses à 3130 (1907, 113).

La Rédaction.

*Voir* V.-A. Le Besgue, *Exercices d'Analyse numérique*, Paris, Leiber et Faraguet, 1859, p. 104 et suivantes. Encore aujourd'hui ce livre de 150 pages est fort intéressant pour les amateurs de propriétés de la Théorie des nombres dites *élémentaires* parce que leur démonstration est généralement assez simple. E. Maillet.

3147. (1907, 8) (H. Wieleitner). — *Podaires de coniques*. — Appelant $Q_1$ le point symétrique de Q par rapport à P, les segments $\overline{Q_1Q'}$ et $\overline{PS}$ ont même centre M et, si l'on mène les droites $q_1msq'$ perpendiculaires à la droite QQ' aux points $Q_1MSQ'$, puisque $q_1$ passe par un point fixe ω et $q'$ enveloppe la conique $C^2$ antipodaire




du cercle K' par rapport au pôle P, l'enveloppe de $m$ est une conique $M^2$ homothétique à $C^2$, ω étant le centre et $\frac{1}{2}$ le rapport d'homothétie. L'enveloppe de $s$ est par suite une conique $S^2$ homothétique à $M^2$, P étant le centre et 2 le rapport d'homothétie, et le

lieu du point S est la podaire de P par rapport à cette dernière conique $S^2$. Comme le produit des deux homothéties indiquées est évidemment la translation représentée en grandeur et sens par le segment $\overline{P\omega}$, on conclut que le lieu du point S est la podaire de P par rapport à la conique $S^2$ que l'on obtient en faisant subir la translation $\overrightarrow{P\omega}$ à l'antipodaire de P par rapport au cercle K'. Cette antipodaire est une ellipse ou une hyperbole suivant que P est intérieur ou extérieur au cercle K'. Appelant O le centre du cercle K, on a

$$\overline{P\omega} = -2\overline{PO}.$$

Si le cercle K' a son centre au point P, on retombe sur la propriété bien connue des *conchoïdes ordinaires* de cercle; le théorème de M. Wieleitner est donc une généralisation intéressante de cette propriété. Lorsque K' dégénère en une droite $g$, son antipodaire par rapport à P est une parabole (dont P est le foyer et $g$ la tangente au sommet) et le lieu de S est par suite la podaire de P par rapport à la parabole qu'on obtient en appliquant à la parabole indiquée la translation $\overline{P\omega}$.

En désignant par K'' le cercle symétrique de K par rapport au point P, le lieu de S est évidemment la *conchoïde généralisée,* par rapport au pôle P, des cercles K' et K''. La démonstration qui précède prouve aussi que la *conchoïde généralisée, par rapport à un pôle* P, *d'une courbe quelconque* K' *et d'un cercle* K *mené par* P, *est la podaire de* P *par rapport à la courbe que l'on obtient en faisant subir la translation* $+2\overline{PO}$ *à l'antipodaire de* P *par rapport à* K'. V. Retali (Milan).

*Démonstration géométrique.* — Soit K'' la circonférence symétrique de K par rapport à P.

La droite mobile la coupe en Q'' et

$$\overline{PS} = \overline{PQ'} + \overline{PQ''}.$$

Construisons une figure inverse de la proposée en prenant P pour pôle et un module quelconque.

L'inverse $Q'_1$ de Q' décrit une circonférence Γ.

L'inverse $Q''_1$ de Q'' décrit une droite Δ.

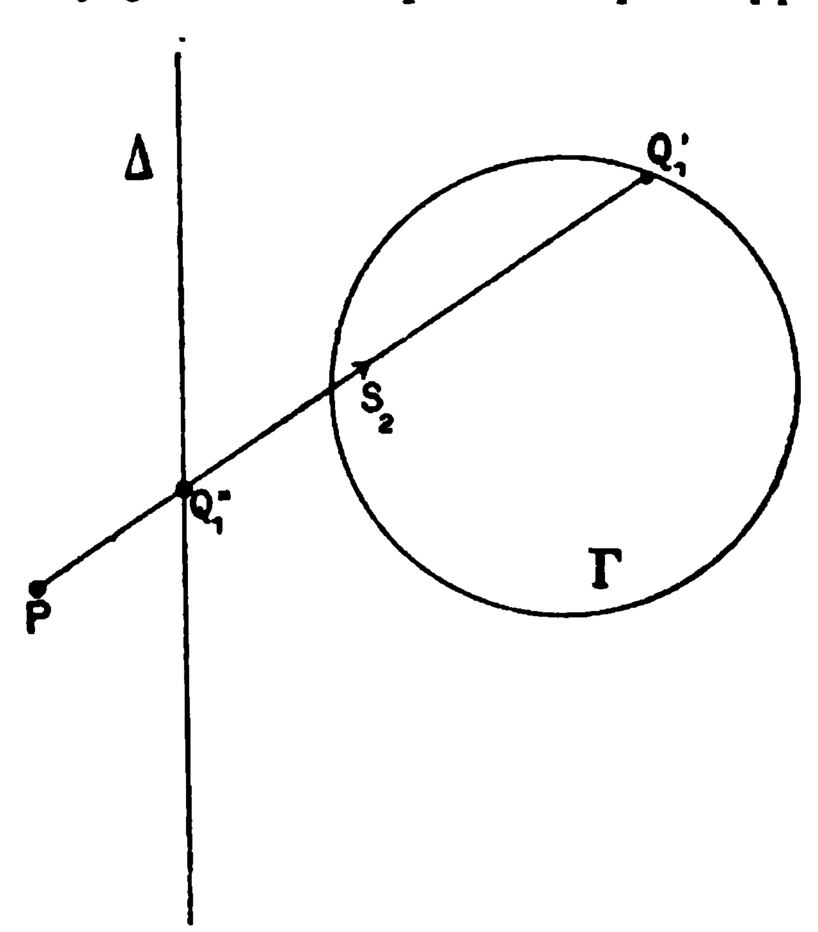
Soit $S_1$ l'inverse de S

$$\frac{1}{PS_1} = \frac{1}{PQ'_1} + \frac{1}{PQ''_1}.$$

Sur PS prenons $\overline{PS_2} = \frac{1}{2}\overline{PS_1}$. On aura

$$\frac{2}{\overline{PS_2}} = \frac{1}{\overline{PQ'_1}} + \frac{1}{\overline{PQ''_1}}.$$

Donc $S_2$ est conjugué harmonique de P par rapport à $Q''_1$ et $Q'_1$.




Donc $S_2$ décrit une transformée homologique de Γ par rapport au centre P et à l'axe Δ, c'est-à-dire une conique. Donc $S_1$ décrit aussi une conique, homothétique de la précédente.

Donc S décrit une inverse de conique, c'est-à-dire une podaire de conique. C. Q. F. D.

*Remarque.* — La propriété se généralise immédiatement aux quadriques, en remplaçant les cercles K, K' par des sphères.

L. BICKART.

Autre réponse de M. MALO communiquée à l'auteur de la question, et qui sera insérée ultérieurement si la place le permet. LA RÉDACTION.

La génération des podaires des coniques comme cissoïdales de deux circonférences a été étudiée par moi dans les *Annali di Matematica* de Milan (3e série, t. XI, 1904). F. GOMEZ TEIXEIRA.

Autre réponse de M. WEINMEISTER (Tharandt, Saxe) communiquée à l'auteur de la question.

# QUESTIONS.

---

**3220.** [**I 3 b** et **V**] Y a-t-il, du théorème de Fermat, d'autres démonstrations que les quatre suivantes :

Celle d'Euler (1748) fondée sur la congruence

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \quad (\text{mod. } p);$$

Celle d'Euler du théorème généralisé (1759), se fondant sur ce que, si la plus petite puissance de $a$ congrue à 1 (mod $b$) est $a^t$, $t$ est un diviseur de $\varphi(b)$;

Celle de Lagrange (1771) utilisant le développement du produit $(x+1)(x+2)\ldots(x+p-1)$;

Celle de Lejeune-Dirichlet (1828), fondée sur les propriétés des nombres associés et donnée également par Gauss en 1832, pour les nombres complexes?

Les autres démonstrations que je connais ne me paraissent être que des modifications de celles qui viennnent d'être rappelées, par exemple celles de Gauss (*Disq. ar.*, n° 51), de Libri (*Mém. sur la th. des n.*), de Cauchy (*Rés. analyt.*), de Poinsot (*J. M.*, 1845), de Genocchi (*J. M.*, 1854), de Desmarest (*Analyse indét.*, 1852), de M. le Dr Prompt (*Remarques sur le théorème de Fermat,* 1905).

A. Aubry.

**3221.** [Σ et **I 1**] La question 3039 (**1906**, 89), de M. *Balbus*, peut se généraliser ainsi : quels sont les nombres premiers, les carrés, les cubes, ..., les puissances $n^{\text{ièmes}}$ qui, dans le système de numération de base $q$, sont représentables par un nombre N formé à l'aide des $q$ chiffres, chacun

étant écrit une et une seule fois? Il y a une série de problèmes corrélatifs; ainsi : 1° Pour une valeur donnée de $n$ ($n = 2, 3, \ldots$), y a-t-il toujours au moins un pareil nombre N pour chaque valeur de $q$? Si oui, quel est le nombre de ces nombres (à défaut en trouver une limite supérieure)? Si non, quelles sont ces valeurs de $q$? 2° Parmi les nombres N, y en a-t-il un premier pour chaque valeur de $q$?

E. Maillet.

**3222.** [I 3 c] Trouver, au moins, deux racines de la congruence :

$$17x^3 \equiv 1113 \quad (\text{Mod. } 11231 = 11.1021).$$

Mehmed Nadir (Alep, Syrie).

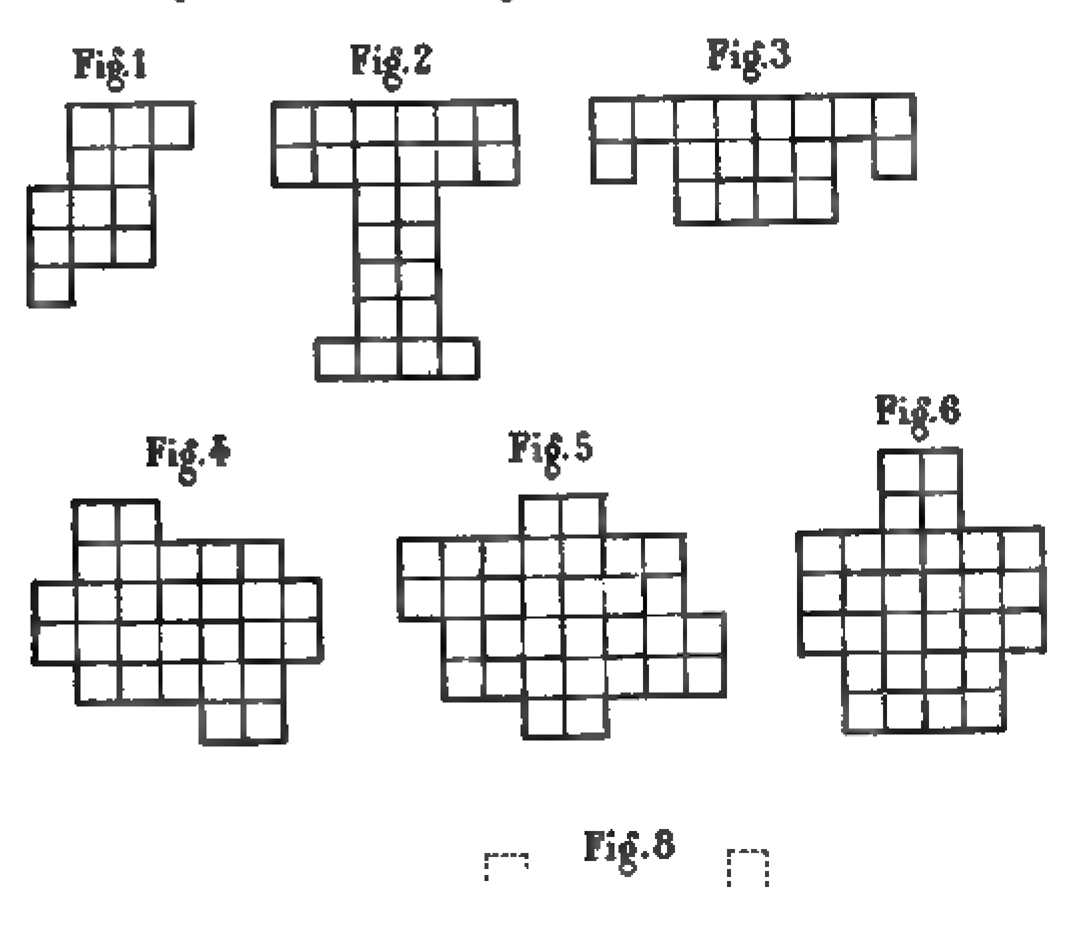
**3223.** [V 1] Ne serait-il pas à propos que, par une entente entre les mathématiciens de tous les pays, on cherchât à uniformiser et compléter les notations mathématiques, comme cela s'est fait pour d'autres sciences?

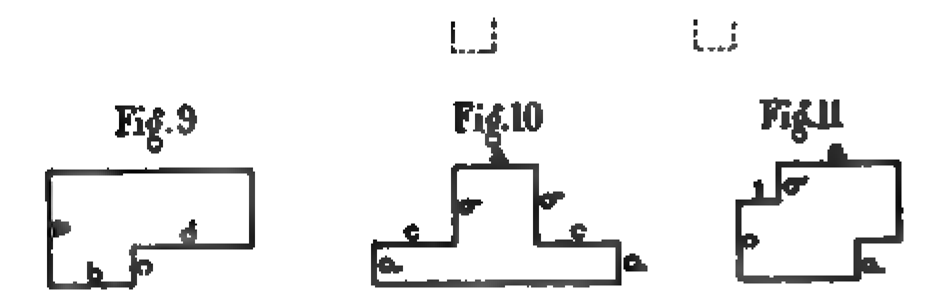
A signaler, parmi les desiderata, les signes exprimant : le quotient et le reste d'une division, comme $\mathrm{P}\frac{a}{b}$ et $\mathrm{R}\frac{a}{b}$; la presque égalité; l'identité; ... la perpendicularité; le parallélisme, la jonction de deux points; un angle; .... Il conviendrait également de faire une distinction entre les symboles opératoires que les premiers analystes mettaient toujours en caractères droits et les quantités littérales, à mettre toujours en italique : $\mathrm{d}x$, $\log \mathrm{N}$, $\mathrm{f}(x)$, $\sin a$, droite AB, etc.

A. Aubry.

**3224.** [Q 4 c] Il y aurait une série de récréations mathématiques très faciles à obtenir, en construisant empiriquement des assemblages de carrés pouvant se décomposer en deux, trois, quatre, cinq, ... parties superposables et ne conservant que les polygones présentant une certaine régularité.

Telles sont les figures 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. La figure peut en outre se décomposer en trois, quatre, six parties superposables. La figure 8 comprend trois polygones se décomposant en quatre, six et dix parties.




Les Tableaux ci-après indiquent d'autres solutions se rapportant à des formes représentées par les figures 9, 10, 11. Les lettres *a*, *b*, *c*, *d* indiquent les nombres de carrés longeant les divers côtés du polygone, et la lettre *n* le nombre des parties en lesquelles il peut être divisé.

La pratique de ces constructions m'a fait croire qu'il serait difficile d'établir des règles générales à ce sujet. Cependant

Fig. 9.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 6 | 4[1] | 4 | 4 | 5 | 7 | 5 | 4 | 5 |
| *b* | 3 | 2 | 3 | 5 | 2 | 2 | 2 | 1 | 4 | 2 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| *c* | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| *d* | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 5 | 2 | 4 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| *n* | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 |

ne pourrait-on pas trouver, sur ce genre spécial de symétrie, des théorèmes particuliers permettant de réduire les tâton-

Fig. 10.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* | 3 | 2 | 2 |
| *b* | 2 | 2 | 1 |
| *c* | 1 | 1 | 2 |
| *d* | 3 | 2 | 5 |
| *n* | 3 | 4 | 8 |

Fig. 11.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 5 | 4 | 4 | 4 | 5 | 3 | 4 |
| *b* | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| *c* | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 | 4 |
| *d* | 1 | 2 | 4 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| *n* | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |

nements ou d'exécuter la division d'un polygone donné qu'on sait être décomposable ?

A. Aubry.

3225. [C2g] Une question importante du Calcul des probabilités conduit à l'intégrale

$$\mathrm{H} = \int\int \ldots dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

prise avec les conditions

$$-\frac{1}{2} < x_1 < \frac{1}{2}, \qquad \ldots, \qquad -\frac{1}{2} < x_n < \frac{1}{2},$$

et

$$-\alpha < x_1 + x_2 + \ldots + x_n < \alpha.$$

Cette intégrale doit avoir une valeur rationnelle en $\alpha$ et $n$, et il est facile de la calculer pour $n = 1, 2, 3$.

Comment pourrait-on l'obtenir pour $n$ quelconque ?

H. Laurent.

(1) Cette solution est connue depuis longtemps.

**3226.** [**J2e**] Le théorème suivant, relatif à la méthode des moindres carrés, a-t-il été énoncé?

Soient $m$ équations linéaires à $n$ inconnues, $x, y, z$, etc.; $m > n$. Considérons tous les systèmes différents, au nombre de $p = C_m^n$, formés par $n$ de ces $m$ équations; chacun d'eux donne pour l'une des inconnues, $x$ par exemple, une valeur que nous supposerons mise sous la forme

$$x_k = \frac{\alpha_k}{\beta_k},$$

$\alpha$ et $\beta$ étant les *déterminants* bien connus constitués par les coefficients des équations du système $k$.

La valeur qu'on obtient pour $x$, en appliquant la méthode des moindres carrés au système primitif des $m$ équations, n'est autre chose que

$$\frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_p\beta_p}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_p^2}.$$

J. Raibaud.

**3227.** [**H1i** et **J4b**] Les invariants différentiels du second ordre par rapport au groupe linéaire sont six : deux expriment la propriété géométrique bien connue que les lignes conjuguées de la surface sont invariantes par rapport à ce groupe. Je désirerais une interprétation géométrique des autres. Umberto Bini (Rome).

**3228.** [**S3bα**] D'après le Mémoire *On the Nile floods and its variations* de M. le capitaine H.-G. Lyons (*Geographical Journal,* London, 1905, vol. XXVI, p. 258), les jaugeages *méthodiques* récents du Nil à Khartoum ont été exécutés à l'aide du *Price's current meter*. Pourrais-je avoir une description sommaire, avec croquis ou schéma au besoin, de cet appareil, et, s'il diffère sensiblement des appareils connus en France, une idée de son usage? E. Maillet.

**3229.** **[I19c]** Je voudrais avoir les valeurs de $n$ qui rendent carré parfait le nombre $(n^2+1)(5n^2+1)$.

*Nester.*

**3230.** **[I3b]** Je trouve que $(a+b)^{2n+1}-a^{2n+1}-b^{2n+1}$ est divisible par $2n+1$ pour $n=1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 18, 20, 21, \ldots$. Peut-on déterminer la loi de ces nombres?

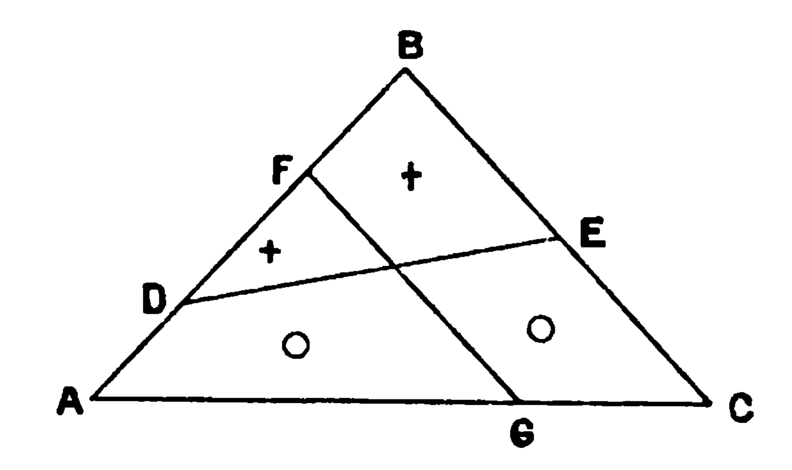
*Nester.*

**3231.** **[I3b]** Je trouve que le nombre $N_n = 2^n - 2$, $n$ étant impair, est souvent multiple de $n$. On sait que cela est vrai pour $n$ premier (théorème de Fermat). Les cas d'exception sont pour $n = 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39, 45, \ldots$ Peut-on voir la loi de ces derniers nombres?

*Nester.*

**3232.** **[K1c et V7]** En 1650 Huygens s'est occupé du problème suivant :

*Triang.* ABC, *sectus utcunque lineâ* DE, *dividendum*




*est aliâ lineâ,* FG, *ita ut utraque pars,* DBE *et* ADEC *bifariam dividatur.*

Quelqu'un pourrait-il m'indiquer l'origine de ce problème, c'est-à-dire si on le rencontre quelque part, dans les écrits des anciens ou ailleurs, avant 1650 ?

D.-J. Korteweg (Amsterdam).

# RÉPONSES.

**755.** (**1896**, 37; **1905**, 100) (H. Bourget). — *Biographie et Ouvrages de Legendre* (**1906**, 100, 191; **1907**, 55). — Suivant le très judicieux conseil de mon ami, M. H. Brocard (*voir* **1907**, 55), j'ai recherché à Paris, non sans peine, l'acte de décès de Legendre, pour savoir décidément le lieu de sa naissance. La question est désormais élucidée. L'acte de décès porte : *né à Paris;* il constate en même temps que Legendre est mort à Paris, en son domicile, quai Voltaire n° 9, le 9 *janvier* 1833 (et non le 10, comme l'indiquent quelques biographies).

Il serait trop long de raconter ici les invraisemblables complications administratives par lesquelles il a fallu passer pour se procurer ce simple renseignement. Je me réserve de le faire ailleurs, en temps et lieu, et de montrer une fois de plus qu'il y a des *chinoiseries* ailleurs qu'en Chine. L'important, pour l'*Intermédiaire,* c'était de fixer définitivement un point d'histoire scientifique; et c'est fait.

C.-A. Laisant.

**1015.** (**1897**, 51; **1906**, 210) (*Grip*). — *Un point* M *décrivant une droite, on prend, pour chacune de ses positions, le point inverse,* N, *et la polaire de* N *relativement à un triangle donné : quand la distance de* M *à la polaire de* N *sera-t-elle maximum ou minimum?*

En désignant par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les coordonnées normales du point M, celles de M sont $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, et les coordonnées $\lambda$, $\mu$, $\nu$ de la polaire du point N par rapport au triangle de référence ont pour valeurs $\lambda = \alpha$, $\mu = \beta$, $\nu = \gamma$. La distance du point M à la polaire de N a donc pour expression (au facteur $2R \sin A \sin B \sin C$ près)

$$u = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\Delta\sqrt{\Omega}},$$

en posant, pour abréger,

$$\Delta = \alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C,$$

et, d'autre part,

$$\Omega = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A - 2\gamma\alpha \cos B - 2\alpha\beta \cos C.$$

Maintenant, puisque M décrit une droite, ses coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ doivent être considérées comme des fonctions linéaires d'un même paramètre $\theta$, et, en égalant à zéro la dérivée de $u$ par rapport à $\theta$, on a, posant $\frac{d\alpha}{d\theta} = \rho$, $\frac{d\beta}{d\theta} = \sigma$, $\frac{d\gamma}{d\theta} = \tau$,

$$\begin{aligned} o = {} & 4\Omega\Delta(\rho\alpha + \sigma\beta + \tau\gamma) \\ & - 2(\rho \sin A + \sigma \sin B + \tau \sin C)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\Omega \\ & - \Delta(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\left(\rho \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} + \sigma \frac{\partial\Omega}{\partial\beta} + \tau \frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}\right) : \end{aligned}$$

c'est formellement une équation biquadratique en $\theta$.

Des considérations géométriques permettent d'élucider plus complètement la question. Pour abréger je prends immédiatement texte du résultat que fournit très aisément l'analyse ($\lambda = \alpha$, $\mu = \beta$, $\nu = \gamma$) et je remarque que sous son aspect le plus général le problème peut dès lors être ainsi posé :

*Considérant une série ponctuelle linéaire et un faisceau de droites homographiques l'un de l'autre, on abaisse de chaque point une perpendiculaire sur la droite correspondante : quand la longueur de cette perpendiculaire est-elle maximum ou minimum ?*

Soient $\overline{OP}$ un rayon quelconque du faisceau, M le point auquel ce rayon correspond, $\overline{MP}$ la perpendiculaire abaissée de M sur $\overline{OP}$ dont il s'agit d'étudier la variation de longueur : si je mène $\overline{OQ}$ perpendiculaire à $\overline{OP}$, le rayon $\overline{OQ}$ appartiendra à un rayon involutif du faisceau $\overline{OP}$, et, en abaissant $\overline{MQ}$ perpendiculaire sur $\overline{OQ}$, on se trouve toujours en face du même problème; mais dans le rectangle OPMQ on a $\overline{OQ} = \overline{MP}$, $\overline{OP} = \overline{MQ}$, et au lieu de segments mesurés à partir d'une droite fixe je puis considérer des segments mesurés à partir d'une origine fixe, c'est-à-dire les vecteurs de la podaire

de l'enveloppe des droites $\overline{\mathrm{MP}}$ (ou $\overline{\mathrm{MQ}}$) relativement au pôle fixe O.

Or il est clair que cette enveloppe est une parabole admettant la droite décrite par le point M comme tangente, et par rapport à laquelle le point O occupe une position bien définie, mais non particulière; la podaire est donc la cubique nodale circulaire générale.

Du reste, si l'on envisage une transformée par vecteurs réciproques de la podaire relativement au pôle fixe O, courbe dont les points sont au maximum ou au minimum d'éloignement de O lorsque ceux de la podaire en sont au maximum ou au minimum de rapprochement, on retombe sur la polaire réciproque de la parabole, par rapport à un certain cercle de centre O, c'est-à-dire sur une conique simplement assujettie à passer par O.

Il ne s'agit donc, en définitive, que de mener les normales à une conique par un point pris sur la courbe. E. MALO.

**1018.** (**1897**, 51; **1906**, 210) (*Rosace*). — *Déterminant symétrique du troisième ordre* (**1907**, 11). — Le déterminant symétrique du troisième ordre n'est autre que le discriminant de la forme quadratique ternaire

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy,$$

qui, égalée à zéro, représente une conique, et l'évanouissement du discriminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

indique que cette conique se décompose en deux droites.

Le déterminant fonctionnel des mineurs

$$A = bc - f^2, \quad \ldots, \quad F = gh - af, \quad \ldots,$$

est

$$\nabla = \begin{vmatrix} 0 & c & b & -2f & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 & -2g & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 & -2h \\ -f & 0 & 0 & -a & h & g \\ 0 & -g & 0 & h & -b & f \\ 0 & 0 & -h & g & f & -c \end{vmatrix},$$

et sans calcul il est clair que ce déterminant est du sixième degré par rapport à l'ensemble des coefficients $a$, $b$, $c$, $f$, $g$, $h$.

Le déterminant $\nabla$ peut, du reste, être considéré comme le résultat de l'élimination des paramètres $a'$, $b'$, $c'$, $f'$, $g'$, $h'$ entre les six équations linéaires suivantes :

$$\begin{array}{rrrrrrl} & b'c' + c'b & & -2ff' & & & = 0, \\ a'c & & +c'a & & -2gg' & & = 0, \\ a'b + b'a & & & & & -2hh' & = 0, \\ -a'f & & & -af' & +hg' & +gh' & = 0, \\ & -b'g & & +hf' & -bg' & +fh' & = 0, \\ & & -c'h & +gf' & +fg' & -ch' & = 0; \end{array}$$

ces équations étant posées, comme elles sont symétriques en $a$ et $a'$, $b$ et $b'$, etc., on pourrait tout aussi bien éliminer $a, b, c, f, g, h$, et la condition $\nabla' = 0$ en résulterait au même titre que la condition $\nabla = 0$.

Mais l'équation

$$0 = (bc' + b'c - 2ff')\lambda^2 + \ldots$$

est celle de la conique enveloppe des droites divisées harmoniquement par les coniques $S = 0$, $S' = 0$, et, puisque l'évanouissement de tous les coefficients permet de considérer la droite $\lambda$, $\mu$, $\nu$ comme quelconque, il est nécessaire que les coniques S et S' dégénèrent simultanément en deux couples de droites ayant même sommet et harmoniquement conjugués.

L'évanouissement des deux déterminants $\Delta$ et $\nabla$ ayant lieu simultanément dans les conditions qui viennent d'être indiquées et qui sont à la fois nécessaires et suffisantes, $\nabla$ est, à un facteur numérique près, le carré de $\Delta$. Il suffit, du reste, de faire $f = g = h = 0$ pour voir que ce facteur est $-2$.

La proposition est de la sorte établie indépendamment du calcul effectif du déterminant $\nabla$; mais il resterait à la généraliser.

E. Malo.

1886. (**1900**, 236) (E.-N. Barisien). — *Facteurs et produits à mêmes décimales* (**1901**, 28). — Je signale les produits :

$$1{,}618 \times 1{,}618 = 2{,}618, \qquad 0{,}618 \times 1{,}618 \times 2{,}618 = 2{,}618,$$

analogues à celui cité par M. Barisien.

G. Lemaire (Raghia, Cochinchine).

**1988.** (**1900**, 405) (Burali-Forti). — *Construction approchée des polygones réguliers* (**1901**, 126; **1904**, 216). — Autre réponse de M. Plakhowo communiquée à l'auteur de la question. M. Plakhowo renvoie à l'Ouvrage de M. Max Simon : *Die Entwicklung der Elementargeometrie im* XIX[ten] *Jahrhundert,* et aux travaux de M. Schlegel. La Rédaction.

**2254.** (**1902**, 3) (G. Espanet). — *Courbe du cinquième ordre* (**1906**, 265). — Les propriétés que veut bien énoncer M. Gino Loria me sont connues ainsi qu'un certain nombre d'autres; *voir* (**1902**, 17) la réponse à la question 1953 (**1900**, 356).

La strophoïde droite pouvant être décrite, comme cas particulier, de la même manière que la quintique, il m'a paru, et c'est là le fond de la question **2254**, qu'il serait peut-être intéressant de chercher à mieux connaître cette dernière courbe. Je n'ai pas pensé que les propriétés si particulières et si connues de la strophoïde pourraient se transporter *telles quelles* à la quintique.

Ce qui m'intéresserait notamment serait une construction, au moyen de la règle et du compas, de la tangente en un point; j'en ai déjà une solution; peut-être y en a-t-il d'autres plus simples ou plus intéressantes. G. Espanet (Cheu-kia-Tchouang, Chine).

**2360.** (**1902**, 143) (G. Maupin). — *Mécométrie* parait désigner *mesure des longitudes; mécomètre* serait donc l'instrument employé à cette mesure.

Ces différents termes ont pour étymologie μηκος, *longueur,* et μετρον, *mesure; μηκος* a été ici étendu à *longitude.*

Signification sans doute analogue pour *apomécométrie* et *apomécomètre,* qui paraissent avoir désigné les mêmes objets (απο, *loin, au loin, éloigné;* μηκος, *longueur* ou *longitude;* μετρον, *mesure* ou *détermination*).

Le titre de l'Ouvrage mentionné (rép. 1515, **1907**, 58) me semble justifier l'essai d'explication que je viens de proposer :

[Guillaume de] Nautonier. — Mécométrie de l'aimant; mesure des longitudes par le moyen de l'aimant [c'est-à-dire de la boussole marine], 1603, in-f°. [Bibliothèque de la Rochelle, n° 7810.]

Quant à la disposition même des instruments précités, je ne l'ai rencontrée jusqu'ici dans aucun des Ouvrages qu'il m'a été possible de consulter. H. Brocard.

**2553.** (**1903**, 72) (V. Aubry). — *Vibrations d'un anneau* (**1904**, 52, 291). — Voir *Sitz. d. math. phys. Classe d. k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München :*

S. Guggenheimer. — Sur les vibrations universelles d'un tore; 1904, 41-57.

S. Guggenheimer. — Sur les oscillations universelles de systèmes de corps de révolution; 1905, 265-313. H. Brocard.

**2571.** (**1903**, 102) (*Rudis*). — *Équation indéterminée* (**1903**, 224, 319; **1904**, 156, 242; **1905**, 53, 249; **1906**, 243). — Autre réponse de M. A. Werebrusow (Russie) communiquée à l'auteur de la question. La Rédaction.

**2724.** (**1904**, 33) (P.-F. Teilhet). — *Décomposition de tout nombre en un nombre donné de puissances $n^{\text{ièmes}}$* (**1904**, 292; **1906**, 104). — Dans son article *Ueber die Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von Biquadraten* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXIII, 1907), M. E. Landau montre que tout nombre entier est la somme d'au plus 38 bicarrés de nombres entiers positifs. E. Maillet.

**2730.** (**1904**, 38) (H. Brocard). — *Suite arithmétique* (**1904**, 176). — Cette question n'a pas attiré l'attention autant qu'elle me paraît le mériter. Sans doute, prise dans sa généralité, elle semble toucher aux sujets les plus inaccessibles de la haute Algèbre. Mais ne pourrait-on pas s'attacher à élucider certains cas particuliers simples, qui mettraient sur la voie de cas plus compliqués, tout au moins sur leurs conditions de possibilité ou d'impossibilité?

On verra aisément que les cas $r, 0$ et $r, r, r, r, \ldots$ se ramènent à des équations pelliennes (*M.*, 1905, p. 239). M. Brocard m'a fait l'honneur de me dire qu'il a calculé les périodes jusqu'à $N = 466$ et pour certains nombres choisis. La table de ces solutions permettrait de reconnaître de nouveaux cas.

Quant à la périodicité des restes, elle peut se démontrer plus simplement que par l'analyse de M. Malo (**1904**, 177) en remarquant que le reste de $\sqrt{N}$ est inférieur à $2\sqrt{N}$, ce qui montre qu'un reste quelconque est inférieur à

$$2.2^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}N^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{8}}N^{\frac{1}{8}}\ldots = 4N.$$

A. Aubry.

**2893.** (**1905**, 52) (*Matito*). — *Écrits récents sur l'aviation* (**1905**, 167; **1906**, 114). — *Voir* dans le *Traité de Physique* de M. O.-D. Chwolson, traduction de M. E. Davaux, t. I, 2ᵉ fascicule, Paris, Hermann, 1906, p. 542-556, un article sur la navigation aérienne, en particulier les travaux du colonel Renard.

Consulter encore diverses communications dans les *C. R.* :

E. SEUX (14 janvier 1907, p. 73). — Sur l'importance de l'épaisseur du bord antérieur de l'aile de l'oiseau dans le vol à voile. Son application aux aéroplanes.

P. TSOUCALAS et J. VLAHAVAS. — Sur les hélices de propulsion (21 janvier 1907, p. 125). — Étude comparative des hélicoptères et des aéroplanes (4 février 1907, p. 257).

F. FERBER. — Sur les hélices propulsives (21 janvier 1907, p. 128). — Sur le coefficient de la résistance de l'air à adopter dans un projet d'aéroplane (25 mars 1907, p. 680).

A. ÉTÉVÉ (18 mars 1907, p. 630). — Sur les aéroplanes.

Dans sa Communication du 25 mars 1907, M. Ferber obtient en particulier ce résultat important :

*Qu'une surface plane, dans certains aéroplanes, se meuve orthogonalement ou presque tangentiellement à sa trajectoire, la grandeur de la résistance que l'air lui oppose ne varie pas énormément.*

Bien entendu, sa direction est toujours normale à la surface plane. Dans la formule $\frac{2k\,Sv^2\sin\alpha}{1+\sin^2\alpha}$ (Duchemin), donnant la résistance de l'air au mouvement d'un plan, $k$ est beaucoup plus fort quand $\alpha$ est petit que quand $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Comme me l'écrivit M. Ferber (9 février 1905) à propos de sa question **2839** (**1904**, 239; **1905**, 64; **1906**, 110, *voir* en particulier **1905**, 66, où M. Ferber indique la valeur $k = 0,68$ pour $\alpha = 6°40'$), quand l'application numérique, à ses expériences, des calculs de ma réponse donna $k = 0,68$, coefficient nettement supérieur aux coefficients antérieurement connus ou admis, ce résultat fait comprendre, semble-t-il, pourquoi les oiseaux peuvent voler, ce que n'expliqueraient pas suffisamment les valeurs de $k$, comprises entre 0,07 et 0,13, qu'on admettait autrefois, et qui s'appliquent plutôt lorsque $\alpha$ est voisin de $\frac{\pi}{2}$. E. MAILLET.

**2907.** (**1905**, 103) (La Rédaction). — *Statues et monuments de savants français* (**1905**, 234; **1906**, 25, 70). — Deux savants. originaires du Loiret, ont leur statue dans leur ville natale : ***Poisson***, à Pithiviers, 1851 ; ***Becquerel***, à Châtillon-sur-Loing, 1882.

Les géographies départementales de Joanne fourniraient certainement une réponse rapide, complète et illustrée.

G. Lemaire (Rachgia, Cochinchine).

**2963.** (**1905**, 242) (H. Kœchlin). — *Fractions continues.* — M. E. de Jonquières s'est occupé de questions semblables, au moins pour le cas des racines réelles, sans que je puisse préciser s'il a trouvé tous les résultats qu'indique M. H. Kœchlin. *Voir* à ce sujet ses nombreuses Communications dans le premier semestre des *C. R.* de 1883, t. XCVI, en particulier sa Communication du 26 mars 1883.

E. Maillet.

**2977.** (**1905**, 267) (G. Lemaire). — *Système d'équations* (problème de la carte) (**1906**, 76, 152). — Autre réponse de M. Barisien communiquée à l'auteur de la question. La Rédaction.

**2982.** (**1905**, 269) (*Crut*). — *Élimination d'un paramètre* (**1906**, 80, 153; **1907**, 86). — Autre réponse très étendue de M. A. Schiappa Monteiro, professeur à l'École Polytechnique de Lisbonne, que le défaut de place nous empêche d'insérer, et qui a été communiquée à l'auteur de la question. M. A. Schiappa Monteiro indique plusieurs méthodes d'élimination; il traite en particulier le cas le plus général où les radicaux sont affectés de signes quelconques : les équations auxquelles il parvient entre $x$ et $y$ sont du sixième degré. La Rédaction.

**2986.** (**1905**, 270) (*Doubt*). — *Corollaire de M. Lindemann* (**1906**, 123, 222). — La réponse de M. G. Remoundos laisse subsister tous mes doutes, pour les raisons déjà indiquées dans ma question 2986 : je ne vois pas que cette réponse lève mes objections. Il me semble, en effet, que la ***démonstration*** donnée dans les ***Leçons*** de M. F. Klein (*sinon l'énoncé*) du théorème de la page 82 (édition française) suppose que la formule (3) de la réponse de M. Remoundos, après réductions, peut être mise sous la forme ***toute spéciale*** (2)

qui fait l'objet de ce théorème de la page 82, et où, *essentiellement*, le *premier* coefficient $C_0^r$, celui qui ne multiplie aucun facteur exponentiel, est $\neq 0$. *Doubt.*

**2998.** (**1906**, 6) (G. Lemaire). — *Changement de coordonnées.* — Réponse de M. G.-A. L'Hommedé (Los Angeles, Californie) communiquée à l'auteur de la question. La Rédaction.

**3002.** (**1906**, 7) (Nazarevsky). — *Transformation algébrique.* — Si $f(x, y, z, t)$ est telle qu'on a

$$f(x, y, z, t) = f(z, y, x, t) = f(x, t, z, y) = f(z, t, x, y),$$

les équations simultanées

$$f(x, y, a, b) = 0, \qquad f(y, x, b, a) = 0$$

définissent une fonction $\varphi$ qui remplira la condition imposée.

Si F est quelconque et $\psi$ symétrique, la fonction

$$F[\psi(x, a), \qquad \psi(y, b)]$$

sera une des fonctions $f$. G. Quijano (Xérès).

**3012** (**1906**, 34) (E.-N. Barisien). — (**1906**, 170). — Autre réponse de M. G. Lemaire communiquée à l'auteur de la question.

La Rédaction.

**3037.** (**1906**, 88) (*Lino*). — *Cubiques circulaires* (**1906**, 227). — Réponse de M. *Barbatus* transmise à l'auteur de la question.

La Rédaction.

**3039.** (**1906**, 88) (*Balbus*). — Les carrés répondant à la question sont

$$32\,043^2 = 1\,026\,753\,849$$
$$32\,286^2 = 1\,042\,385\,796$$
$$33\,144^2 = 1\,098\,524\,736$$
$$35\,172^2 = 1\,237\,069\,584$$
$$39\,147^2 = 1\,532\,487\,609$$
$$45\,624^2 = 2\,081\,549\,376$$

et

$$55\,446^2 = 3\,074\,258\,916$$
$$68\,763^2 = 4\,728\,350\,169$$
$$83\,919^2 = 7\,042\,398\,561$$
$$99\,066^2 = 9\,814\,072\,356$$

Je ne crois pas qu'il en existe d'autres. E. GLEIZES.

**3048** *bis*. (**1906**, 93) (A. BOUTIN). — *Équation indéterminée* (**1906**, 228) (*Extrait*). — Il y a une infinité de solutions. En effet, l'équation proposée peut s'écrire :

$$x^2 - (y^2 - 1)p^2 = 1.$$

En donnant à $(y^2 - 1)$ toutes les valeurs entières possibles, on a à résoudre autant d'équations indéterminées de la forme

$$x^2 - Ap^2 = 1,$$

qui sont toutes possibles, puisque A n'est jamais un carré, et dont chacune détermine une infinité de systèmes de $x$ et de $p$.

On trouve pour $p$ et $x$ les systèmes de valeurs $p_n$, $x_n$ suivants :

$$p_n = 2^{n-1}y^{n-1} - C^{1}_{n-2}\,2^{n-3}y^{n-3} + C^{2}_{n-3}\,2^{n-5}y^{n-5} - \ldots$$
$$+ (-1)^k C^{k}_{n-k-1}\,2^{n-2k-1}y^{n-2k-1} + \ldots,$$

$$x_n = 2^{n-1}y^n - \frac{n}{1}\,1\,.\,2^{n-3}y^{n-2} + \frac{n}{2}\,C^{1}_{n-3}\,2^{n-5}y^{n-4} - \ldots$$
$$+ (-1)^k\,\frac{n}{k}\,C^{k-1}_{n-k-1}\,2^{n-2k-1}y^{n-2k} + \ldots$$

où $C^{\mu}_{\lambda}$ est le nombre des combinaisons de $\lambda$ objets $\mu$ à $\mu$.

On s'arrêtera dans le développement quand on aura obtenu un terme où l'exposant de $y$ sera 1 ou 0.

Les deux formules précédentes renferment la résolution complète de l'équation indéterminée

$$x^2 - Ap^2 = 1,$$

quand A est de la forme $(y^2 - 1)$. L. DUJARDIN.

Autre réponse de M. MATHIEU (Saïgon) communiquée à M. Boutin.

**3061.** (**1906**, 97) (E.-N. Barisien). — *Développées* (**1906**, 232). — La réponse que j'avais donnée à la question de M. Barisien n'avait d'autre mérite que son caractère élémentaire et la référence de M. G. Loria à des formules déjà publiées est assurément plus en accord avec l'esprit du Recueil. Toutefois, pour le cas de la parabole qui se trouve laissé incertain, je ne crois pas inutile de remarquer qu'une considération fort simple permet d'en décider. De quelque manière, en effet, qu'on arrive à établir pour l'ellipse la formule $m = 4i + 2$ ($m$ ordre et $i$ rang de la développée), on est fondé à en inférer que pour le cas de la parabole l'expression de $m$ est encore une fonction linéaire de $i$. Il suffit donc de considérer la développée de la parabole et celle de cette développée pour conclure avec certitude à la formule $m = i + 2$.

E. Malo.

**3092.** (**1906**, 187) (*Milèse*). — Comme contributions à l'étude mécanique demandée, je crois pouvoir signaler :

E. Collignon. — Traité de Mécanique, t. III, 1874, p. 221-227.

E. Collignon. — Remarques sur le travail des moteurs employés aux transports (*A. F.*, Marseille, 1891, p. 205-222).

A. de Colnet d'Huart (Luxembourg). — Détermination de la loi du mouvement d'un point matériel sur un plan incliné à une latitude quelconque, en ayant égard à l'influence exercée par la rotation diurne de la Terre.

H. Brocard.

**3100.** (**1906**, 189) (A. Aubry). — *Sur une assertion de Kramp* (**1907**, 46). — Le Tome V des *Annales de Gergonne* est de 1814-1815; les réponses parues n'élucident donc pas ma question, qui doit être posée ainsi : *quel auteur antérieur à* 1814 *a mentionné Cusa comme l'inventeur de la formule approximative*

$$x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} ?$$

A. Aubry.

**3115.** (**1906**, 257) (G. Loria). — Les difficultés rencontrées dans l'application de certains théorèmes de Chasles ont occupé l'attention des mathématiciens dès le temps où ils furent énoncés.

Parmi les documents que je pourrais citer, je choisirai le suivant, peu connu, dont la réédition intéressera les amateurs du sujet :

*Extrait d'une Note de Louis Saltel.*

Les théorèmes de M. Chasles sur l'ordre du lieu des foyers, du centre, des sommets, etc., d'un système de coniques, devaient-ils, dans la pensée de leur auteur, s'appliquer à un système algébrique *quelconque* (¹) dont on connaît *uniquement* les deux caractéristiques? Telle est la question que nous avons pris la liberté de poser à M. de Jonquières en lui communiquant un nouveau travail sur cette théorie. Nous sommes heureux de pouvoir publier, avec l'autorisation du savant géomètre, la réponse décisive qu'il a bien voulu nous adresser.

LOUIS SALTEL,
Professeur au Lycée de La Rochelle.

(¹) Il est bien entendu que si la *cinquième condition* doit toujours, comme l'a expressément fait observer M. Chasles, être la plus générale de son espèce, elle ne doit pas non plus être par là même incompatible avec les quatre conditions qui déterminent le système. Par exemple, il serait absurde de demander le nombre des coniques ayant un foyer sur une droite donnée dans un système de coniques homofocales.

MONSIEUR,

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt votre Mémoire *Sur la théorie des deux caractéristiques*, que vous m'avez fait l'honneur de me communiquer. Cette lecture a ravivé dans mes souvenirs une controverse, vieille de dix ans, que j'avais complètement perdue de vue à cause de mes incessantes occupations professionnelles.

Puisqu'il est avéré aujourd'hui, tant par vos travaux que par ceux d'autres savants, que la théorie dont il s'agit n'a pas la rigueur absolue que son illustre auteur lui attribuait à l'époque dont je parle (1867), vous avez raison, dans l'intérêt de la Science, de provoquer, de la part des géomètres, les recherches nécessaires pour en préciser, dans chaque cas particulier, la véritable portée.

Vous êtes d'ailleurs parfaitement dans le vrai, en affirmant que le savant auteur, lorsqu'il publia ses innombrables énoncés, les donnait *tous* comme exprimant des théorèmes vrais *dans tous les cas*. Il a pris soin de le déclarer de la façon la plus formelle et sous une forme doctrinale, dans le passage d'un de ses écrits cité par vous (en note) à la dernière page de votre Mémoire. Vous auriez pu retourner contre lui ses propres arguments ; mais, plus équitable envers ses propres œuvres qu'il ne se serait ainsi conduit à l'être lui-même, vous vous bornez à classer ces énoncés dans les trois catégories suivantes :

Ceux qui sont *toujours* vrais ;

Ceux qui le sont *toujours* entre des limites bien déterminées ;

Ceux enfin qui n'indiquent qu'une limite supérieure.

C'est ramener le litige, avec de nouvelles preuves à l'appui, au point où je l'avais laissé en 1867 (1).

Les géomètres ne peuvent manquer de vous savoir gré d'avoir ainsi rétabli la vérité, qui finit toujours, malgré tout, par recouvrer ses droits.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de mes sentiments très distingués.

23 avril 1877. E. DE JONQUIÈRES.

(1) En m'exprimant ainsi j'ai seulement en vue les appréciations portées sur mes travaux par M. Chasles en 1866-1867. (*Note de M. de Jonquières.*)

H. BROCARD.

3121. (**1906**, 259) (*Trinitario*). — *Théorème de Gudermann* (**1907**, 48). — La formule donnée par M. Brocard est aussi mentionnée dans le livre de Max Simon : *Ueber die Entwicklung der Elementargeometrie;* mais, comme M. *Trinitario* demande le théorème de Gudermann, *daté du jour de sa mort,* ce théorème est :

$$\sin\frac{1}{4}i = \tang\frac{1}{2}a \tang\frac{1}{2}b,$$

théorème sur un rectangle sphérique qui a des angles égaux et des côtés opposés (Gegenseiten) égaux (*Cr.*, t. **42**, p. 280).

N. PLAKHOWO (Russie).

3141. (**1907**, 6) (*Arcitenens*). — *Tables de nombres premiers* (**1907**, 116). — *Extrait d'une réponse de M. le lieut.-col. Allan Cunningham* :

1° Les plus grands nombres premiers connus sont $2^{61}-1$, $5.2^{75}+1$, $2^{127}-1$ découverts par MM. Seelhoff, Dr Muirhead et Ed. Lucas respectivement.

2° Il y a des Tables de nombres premiers de Burckhardt, Glaisher, etc. [*Voir* réponse à 2667 (**1904**, 103), en particulier les renseignements bibliographiques dans les Tables de J. Glaisher] donnant les nombres premiers inférieurs à 9000000. Au delà de ce chiffre *voir :*

*J. de Math.* (Liouville), 2e série, t. II, 1866 : Les nombres premiers de 100000001 à 100001169 par W.-B. DAVIS ; parmi les 99 nombres imprimés, 8 sont en réalité composés.

Math. Questions, etc. de l'*Educational Times,* Vol. VIII, 1868, p. 30, où W.-B. DAVIS donne 153 nombres premiers non consécutifs du 10e million.

*Messenger of Math.* (Vol. 31, 1902 et Vol. 34, 1904-1905), où l'on trouve trois Notes sur la *Determination of successive High Primes* par MM. ALLAN CUNNINGHAM et H.-J. WOODALL, qui indiquent 1466 nombres premiers supérieurs à 9000000 et consécutifs dans les limites indiquées ci-dessous.

| Volume. | Pages. | Limites. | Nombre des nombres premiers. |
|---|---|---|---|
| 31 | 168 | $(2^{24} \mp 1020)$ | 117 |
| 31 | 169 | $(2^{25} \mp 1020)$ | 128 |
| 31 | 170 | $\frac{1}{3}(2^{25} \mp 1020)$ | 45 |
| 34 | 186 | $(2^{26} \mp 1020)$ | 123 |
| 34 | 186 | $\frac{1}{\mu}(2^{26} \mp 1020)\ [\mu = 3, 5, 7]$ | 90 |
| 31 | 171 | $(3^{15} \mp 1020)$ | 127 |
| | 73 | $9.10^6$ à $(9.10^6 + 1020)$ | 61 |
| | 75 | $(10^7 - 1050)$ à $(10^7 + 1020)$ | 118 |
| | 76 | $(10^8 \mp 2000)$ | 209 |
| | 76 | $\frac{1}{2}(10^8 \mp 2000)$ | 122 |
| | 77 | $\frac{1}{\mu}(10^8 \mp 2000)\ [\mu = 3$ à $11]$ | 328 |

*Quarterly Journal* (*Q. J.*), Vol. 35, 1903, où l'on trouve une Note sur *High Primes* $4\varpi + 1$, $6\varpi + 1$ *and Factorisation*, par M. ALLAN CUNNINGHAM. Les Tables I, II, III des pages 10 à 12 donnent *tous* les nombres premiers $4\varpi + 1$, $6\varpi + 1$ supérieurs à 9000000 et qui sont de la forme

$$p = \frac{1}{2}(y^2 + 1) < 12500000 \quad (57 \text{ nombres premiers}),$$
$$p = y^2 + 1 < 25000000 \quad (169 \quad » \quad),$$
$$p = y^2 \pm y + 1 < 16000000 \quad (143 \quad » \quad).$$

Lieut.-Col. ALLAN CUNNINGHAM.

[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

3143. (1097, 7) (G. LEMAIRE). — Il s'agit de la fameuse rétrogradation de l'ombre sur le cadran d'Achaz.

Sans en discuter ici la théorie, je me bornerai à ajouter deux

indications bibliographiques dont l'une, se rapportant à pareil fait, mériterait d'être vérifiée.

Je les rencontre au *Journal des Savans* de 1713 et 1771.

I. Au cahier du 14 août 1713, il est rendu compte de l'Ouvrage intitulé : ***Essais et recherches de Mathématique et de Physique.*** Nouvelle édition, etc, par M. Parent, de l'Académie royale des Sciences. 1713. T. I, 800 pages. T. II, 900 pages. T. III, 600 pages et 31 Mémoires.

Dans ce dernier Volume, le Mémoire n° **2** est une explication physique et très simple du « phénomène surprenant qui parut à Metz en 1703, la rétrogradation de l'ombre du Cadran de la Charité, que trois Religieux virent reculer vers $11^h$; la durée du soir du même jour, qui fut prolongé d'environ 1 heure ; et le retardement du matin suivant qui vint environ 1 heure plus tard. Quoique M. Parent eût annoncé ce phénomène dans sa première édition (1703), il ne s'est trouvé personne qui ait tenté de l'expliquer. »

II. Le nom de Pline l'Ancien ayant été mentionné dans l'énoncé, je suis amené à citer le *Journal des Savans* de juin 1771, p. 354, où est analysé rapidement un Ouvrage de A.-J. Rezzonico, intitulé : *Disquisitiones Plinianae in quibus de utriusque Plinii patria, rebus gestis, scriptis, codicibus, editionibus atque interpretibus agitur*. Parme, 1763-1767, 2 vol. in-f°.

L'extrait concernant les cadrans solaires a un certain intérêt pour l'histoire de la Gnomonique. H. Brocard.

**3144** (**1907**, 7) (G. Lemaire). — Ce que demande l'auteur est précisément le sujet de l'Introduction du livre de G. de Longchamps, ***Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre,*** p. 1-7 et 139-146, paru en 1890, mais publié en articles dans le *J. E.* de 1885 à 1889.

*Voir* 1885, p. 11-18 et 1887, p. 9-17.

Je considère cet Ouvrage comme indispensable pour l'historique de différents problèmes topographiques. H. Brocard.

Tout ce qu'on peut savoir de ce livre, sans l'avoir lu, est écrit aux pages 1-2 de la ***Géométrie de la règle et de l'équerre,*** du bien regretté M. G. de Longchamps. Il y dit que ce livre est devenu extrêmement rare. Le seul exemplaire qui existe, à sa connaissance,

appartient à la bibliothèque du dépôt des Fortifications au Ministère de la Guerre. N. PLAKHOWO (Russie).

3145. (**1907**, 7) (G. LEMAIRE). — A l'occasion d'une question tout à fait pareille, proposée ici même (n° **648**, **1895**, 315), il a été signalé (**1896**, 50) deux ouvrages : *Grondbeginsels der Meetkunde*, de J.-H. VAN SWINDEN (Amsterdam, 1790), puis traduit en allemand, et *Die Elemente der Mathematik*, de RICHARD BALTZER (Leipzig, 1860).

Je ne crois pas qu'il ait été publié d'Ouvrage de ce genre en France, mais je dois mentionner, comme s'en rapprochant beaucoup, le *Cours de Mathématiques élémentaires, Exercices de Géométrie*, par F. J. (Tours, Mame et Paris, Poussielgue, 1896), 1135 pages où l'on reconnaît un réel désir de préciser l'auteur de chaque proposition importante, avec une brève indication biographique.

Je saisis l'occasion d'annoncer qu'une nouvelle édition de cet Ouvrage est actuellement sous presse (1907) H. BROCARD.

Autre réponse de M. J. ROSE qui mentionne aussi ce dernier Ouvrage.
LA RÉDACTION.

Dans le livre de M. Simon, *Die Entwicklung des Elementar Geometrie im* XIX. *Jahrhundert*, sont énumérés presque tous les *Lehrbücher und Aufgabensammlungen* français, allemands, anglais, italiens parus depuis le commencement du XIX$^e$ siècle; en français, il n'existe qu'un seul livre, *Exercices de Géométrie*, par F. J., 3$^e$ édition, 1896; ce recueil d'exercices est magnifique; il y a, sous chaque théorème portant un nom quelconque, les dates de naissance et de mort, s'il y a lieu, et enfin la carrière du géomètre.

Puis, en allemand, il y a le livre de M. R. Baltzer, *Die Elemente der Mathematik*, Leipzig, 1853. Ce livre est aussi orné de notices historiques, ce qui n'existe pas dans d'autres livres élémentaires.

Il y a un livre anglais de J.-S. Mackay avec des notices historiques, *The elements of Euclid*, book I-VI and parts of book XI, XII, London, 1878.

En Amérique, W.-W. Rupert, *Famous geometrical theorems and problems with their history.*, New-York, 1901.

En Italie, L. Cremona, *Elementi di geometria projettiva*, Torino, 1873, qui a traduit les éléments de Baltzer en italien, 1865.

N. PLAKHOWO (Russie).

3153. (**1907**, 27) (G. LEMAIRE). — Il s'agit, sans doute, de l'illusion d'optique donnant à la voûte céleste l'apparence d'une voûte surbaissée.

Une explication assez détaillée en a été exposée dans le *Cours d'Astronomie* de H. Faye (t. I, 1881, p. 10-13).

L'auteur croit pouvoir y rattacher aussi l'agrandissement apparent des disques du Soleil et de la Lune à l'horizon, signalé à diverses reprises dans plusieurs recueils scientifiques. H. BROCARD.

3157. (**1907**, 27) (H. LEZ). — La réponse, affirmative, résulte de ce que les deux polynomes du 6[e] degré en $\omega$, indiqués dans l'énoncé, sont les carrés de deux trinomes du 3[e] degré. H. BROCARD.

Il suffit de remarquer que le premier membre de l'équation proposée est un carré parfait, en sorte que cette équation se réduit à

$$[C\omega^3 + (B + 2C)\omega - A]^2 = 0,$$

sans même qu'il soit nécessaire de donner à A, B, C des valeurs particulières quelconques. R. PERRIN.

3163. (**1907**, 29) (E.-N. BARISIEN). — Démonstration géométrique simple de la proposition : *Le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère est la droite de jonction des milieux des diagonales.*

Cinq droites déterminent une conique inscrite et une seule.

Donc quatre droites déterminent une parabole inscrite et une seule.

Donc le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère n'a qu'un seul point à l'infini.

Donc c'est une droite.

La considération des coniques évanouissantes du faisceau tangentiel envisagé montre que cette droite passe par les milieux des diagonales. *E.-A. Majol.*

Voici une démonstration simple de cette propriété :

On sait que le lieu des pôles d'une droite $d$ par rapport aux coniques proprement dites ou dégénérées d'un faisceau tangentiel est une droite $d'$. Dans le cas où $d$ est la droite de l'infini, le lieu de

ses pôles est le lieu des centres des coniques du faisceau. Si les coniques sont inscrites dans un quadrilatère réel, les pôles de la droite de l'infini par rapport aux coniques dégénérées formées par les couples de côtés opposés du quadrilatère sont précisément les milieux des diagonales de ce dernier. Donc les milieux des diagonales d'un quadrilatère réel sont en ligne droite; cette droite est le lieu des centres des coniques inscrites dans ce quadrilatère. On lui a donné le nom de *médiane* ou de *newtonienne du quadrilatère*.

J. Rose.

Le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est une droite (Newton).

La démonstration de ce théorème par l'emploi des coordonnées trilinéaires est classique, bien connue et très simple. La démonstration géométrique est peut-être moins classique, mais elle est exposée très simplement dans les *Éléments de géométrie projective* de L. Cremona (traduct. E. Dewulf, 1875), § 132 à 136, 189, 210, 228, en partant de propositions dues à Newton et à Mac-Laurin.

I. Newton. — Philosophiæ naturalis principia mathematica, 1686.

Mac-Laurin. — De linearum geometricarum proprietatibus generalibus. Londres, 1748.

L. Anne et Terquem. — *Nouvelles Annales*, 1842, p. 186-188.

Terquem. — *Nouvelles Annales*, 1843, p. 110-111 et 378-379.

H. Brocard.

3176. (**1907**, 51) (G. Lemaire). — A vrai dire, il n'y a pas de série du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques* consacrée à des ouvrages relatifs à la topographie.

En réalité, le répertoire n'est pas un catalogue d'Ouvrages; son but est de réunir les titres d'articles parus dans les recueils mathématiques du XIX^e siècle exclusivement.

En tout cas, les fiches ne donneront pas ce qu'espère l'auteur de la question, c'est-à-dire l'éditeur et le prix d'un ouvrage, ni la localité ou la bibliothèque où l'on pourra le consulter.

La fiche bibliographique fait mention seulement du nom de l'auteur, du titre de l'Ouvrage et de l'année de publication.

H. Brocard.

## AVIS.

Nous avons déjà mentionné (**1904**, 257; **1906**, 242, réponse à **2446** et **2447**) l'*Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens* ouverte par la rédaction de l'*Enseignement mathématique* (C.-A. Laisant, H. Fehr, A. Buhl); nous croyons utile d'appeler à nouveau l'attention de nos lecteurs sur les résultats déjà parus (*Enseignement mathématique*, 7e année, n° 5, p. 387-395; n° 6, p. 473-478, 1905; 8e année, n° 1, p. 43-48; n° 3, p. 217-225; n° 4, p. 293-310; n° 5, p. 383-385; n° 6, p. 463-475, 1906; 9e année, n° 2, p. 123-141, 1907). LA RÉDACTION.

## QUESTIONS.

**1076.** [**H2c**] (**1897**, 124). Je désirerais savoir comment on pourrait intégrer les systèmes d'équations simultanées suivants:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + a'y + a''z, \\ \dfrac{dy}{dt} = bx + b'y + b''z, \\ \dfrac{dz}{dt} = (cx + c'y + c''z)(ex + e'y + e''z); \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + cz, \\ \dfrac{dy}{dt} = (a'x + b'y + c'z)(a''x + b''y + c''z), \\ \dfrac{dz}{dt} = (mx + ny + pz)(m'x + n'y + p'z), \end{cases}$$

où $a$, $a'$, $a''$, $b$, $b'$, $b''$, $c$, $c'$, $c''$, $e$, $e'$, $e''$, $m$, $n$, $p$, $m'$, $n'$, $p'$ sont des constantes. Ces équations se rencontrent dans certaines applications physiques d'Analyse. *Pedro.*

**1078.** [**D2b**] (**1897**, 125) Pour quels ensembles de valeurs de $a$, $b$, $x$, la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\cot a(n+b)+\sqrt{-1}\right]^{x^n}$$

est-elle convergente, et pour lesquels est-elle divergente ?

*Pedro.*

**1082.** [**H3a**] (**1897**, 126) Trouver l'intégrale générale de l'équation $yy''=kx^2$, $k$ étant une constante, et déterminer cette intégrale de façon que, pour $x=0$, on ait $y=0$ et $y'=a$, $a$ étant différent de zéro. *Ostrowski.*

---

3233. [Σ] (**1903**, 7, 39; **1904**, 1, 113, 260; **1905**, 6; **1906**, 1, 188; **1907**, 2).

## PRIX ACADÉMIQUES.

### Académie royale des Sciences exactes, physiques et naturelles de Madrid.

Exposition succincte des principes fondamentaux de la *Nomographie,* strictement nécessaires pour la composition et l'intelligence facile d'un nouveau système d'abaques ou nomogrammes applicables, avec avantage par rapport aux autres procédés, à la résolution d'une série de questions, intéressantes en théorie, utiles en pratique et ayant trait aux sciences physico-mathématiques.

Mémoires en castillan ou latin, avec devise, le nom de l'auteur sous pli cacheté spécial, à adresser au Secrétariat de l'Académie, calle de Valverde, nº 26, Madrid, jusqu'au 31 décembre 1908.

Prix : diplôme, médaille d'or, impression du Mémoire et 1500 pesetas.

Accessit : diplôme, médaille d'or et impression du Mémoire.

Mention honorable : diplôme [1].

LA RÉDACTION.

(D'après les *Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza,* t. I, n° 1, 1907.)

3234. [I2b] Le nombre $2^n - 1$, $n$ étant impair, me semble être toujours un nombre premier. Cela est-il vrai?

*Nester.*

3235. [C2a] Je désire connaître les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{(x^2+3x)^2+4}, \qquad \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^6+x^4+1}.$$

*Crut.*

3236. [A1cα] On considère le carré arithmétique de Fermat (des nombres figurés), les nombres étant écrits dans les cases d'un échiquier, illimité dans deux sens. On multiplie par $x^n$ les termes de la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne. On joint les centres de deux cases, de coordonnées $a$, $b$, $a'$, $b'$, par rapport aux bords extrêmes ; cette droite passe par le centre d'un nombre fini, ou infini de cases; on ne prend que les termes des cases ainsi traversées par le centre; ces termes forment un polynome d'un nombre de termes limité, ou une série. Je désire l'expression explicite de ce polynome, ou la somme de cette série, supposée convergente, en fonction de $a$, $b$, $a'$, $b'$ et $x$.

A. BOUTIN.

3237. [K8a] On considère le quadrilatère ABCD,

[1] Consulter au besoin le *Traité de Nomographie* de M. d'Ocagne (Paris, 1899) et divers travaux du même auteur.

soient $O_A$ le centre du cercle circonscrit au triangle podaire de A par rapport au triangle BCD, $O_B$, $O_C$, $O_D$, des points analogues :

1° Le quadrilatère $O_A O_B O_C O_D$ est semblable à ABCD;

2° Les quatre circonférences de centres $O_A$, ... circonscrites aux quatre triangles podaires considérés, se coupent en un même point.

Ces propositions sont-elles connues? Dans la négative, je désirerais une démonstration géométrique. (J'ai une démonstration analytique pénible). A. Boutin.

3238. [**P6**] La transformation

$$x_1 = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2-1}, \quad y_1 = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2-1},$$
$$z_1 = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2-1}$$

est-elle connue? U. Bini (Rome).

3239. [**M'6f$\alpha$** et **M'1c$\alpha$**] Toute spirique de Perseus peut être représentée par une équation de la forme

$$(x^2+y^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2) = \Pi.$$

Saurait-on déterminer le lieu des points d'inflexion du système des spiriques, que l'on obtient en faisant varier $\Pi$ dans l'équation donnée? H. Wieleitner (Spire).

3240. [**M'6g** et **M'1c$\alpha$**] De même, indiquer le lieu des points d'inflexion dans le système de cartésiennes

$$(x^2+y^2-2rx)^2-l^2(x^2+y^2) = \Pi.$$

H. Wieleitner (Spire).

3241. [**H11**] Existe-t-il des fonctions $f(z)$ telles que, l'intervalle de $z=a$ à $z=b$ étant moins étendu que celui

de $z = 0$ à $z = \pi$, l'intégrale

$$\int_a^b f(z) \cos nz \, dz$$

soit constamment nulle pour $n = 1, 2, 3. \ldots$ tandis qu'elle soit déterminée, finie et différente de zéro pour $n = 0$?

M. PETROVITCH (Belgrade).

**3242.** [**I19**] Je désire connaître la solution, en nombres rationnels ou entiers, de ces problèmes : 1° calculer les côtés de deux rectangles d'égal périmètre et tels que leurs aires soient dans un rapport donné $q$ (rationnel ou entier).

Planude donne comme côtés des deux rectangles $q^3 - q$, $q - 1$, et $q^3 - q^2$, $q^2 - 1$; mais il ne dit pas comment il a été conduit à cette élégante solution.

2° Calculer les côtés de deux parallélépipèdes rectangles dont la somme des côtés a même valeur et tels que leurs volumes (ou leurs aires) soient dans un rapport donné.

G. RUSSO (Catanzaro, Italie).

[Traduit de l'italien. (LA RÉD.)]

**3243.** [**V7**] Dans une réponse à **1558** (**1899**, 152; **1901**, 194) M. Brocard cite un passage de Gerono où il est dit : « la première idée des fonctions continues appartient à Brouncker »; dans l'*Histoire des mathématiques*, par Rouse-Ball (édit. française, trad. par Freund), p. 321 et 243, il est dit : « les fractions continues ont été introduites par Cataldi dans son Traité sur la recherche des racines carrées, à Bologne en 1613, ou 7 ans avant la naissance de Brouncker ».

Qui a raison? N. PLAKHOWO (Russie).

**3244.** [**V9**] Dans *Entwickelung der Geometrie im XIX. Jahrhundert* de Max Simon il y a une indication à la page 97 « La Frémoire (Catalan) »; plus loin à la page 141 on

dit « Catalan et La Frémoire », etc. (p. 143, 171). D'après la première indication on pourrait croire que « La Frémoire » est le pseudonyme de Catalan, mais d'après la dernière on voit bien que ce sont deux personnes différentes. Or, dans le registre des noms, il n'y pas de « La Frémoire ». Je désirerais savoir, s'il y a eu un mathématicien du nom de La Frémoire. N. Plakhowo (Russie).

3245. [V] Ma question 3100 (**1906**, 189) doit être précisée ainsi (**1907**, 137) : Quel auteur antérieur à 1814 a mentionné Cusa comme l'inventeur de la formule approximative

$$x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}?$$

A. Aubry.

3246. [L¹ 16 a] Quatre points A, B, C, P donnés sur un même plan déterminent trois systèmes de deux droites AP et BC, BP et CA, CP et AB, qui se coupent respectivement en $A_0$, $B_0$, $C_0$.

Une conique quelconque circonscrite au triangle $A_0B_0C_0$ passe par les points A′, A″, B′, B″, C′, C″ situés respectivement sur les droites AP, BC, BP, CA, CP, AB.

Les droites A′A″, B′B″, C′C″ se coupent en un même point.

Ce théorème, qui est de nature projective, est-il connu?

K. Hagge (Kolsnap, Allemagne).

# RÉPONSES.

3131. (1906, 262) (Lazzarini). — *Représentation d'une surface sur une autre.* — Je crois que la question 3131 demande une génération analytique unique de toutes les représentations d'une surface sur une autre. En ce sens, voici les résultats auxquels je suis arrivé :

Aux points de la surface

$$(1) \qquad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

appliquons les transformations du groupe continu

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = f(x, y, z;\ a_1, a_2, \ldots, a_r), \\ y_1 = \varphi(x, y, z;\ a_1, a_2, \ldots, a_r), \\ z_1 = \psi(x, y, z;\ a_1, a_2, \ldots, a_r). \end{cases}$$

On aura $\infty^r$ surfaces, et, sur chacune, un système bien déterminé de coordonnées curvilignes, qui est le transformé du système existant sur la surface (1). Indiquons par M l'ensemble de ces surfaces. Soit

$$(3) \qquad \alpha_i(x, y, z;\ \ldots\ x_{(\alpha\beta)}, y_{(\alpha\beta)}, z_{(\alpha\beta)}, \ldots), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ayant posé

$$f_{(\alpha\beta)} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial u^\alpha \partial v^\beta},$$

le système complet des invariants différentiels(1) du groupe (2), obtenus en considérant les $x$, $y$, $z$ comme liées aux $u$, $v$ par les équations (1). Les $u$, $v$. on les suppose non transformées. Les propriétés qui distinguent l'ensemble M de tout autre analogue sont représentées par les fonctions (3) que nous appellerons les *caractéristiques* des surfaces M.

(1) *Voir* Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, Leipzig, 1888, en particulier Chap. V et XXV.

Prenons sur une quelconque des surfaces M un autre système de coordonnées lié au premier par les relations

$$(4) \qquad u' = u'(u, v), \qquad v' = v'(u, v).$$

En faisant dans les équations (3) la substitution (4), nous obtiendrons des expressions qui contiennent les $x$, $y$, $z$, leurs dérivées par rapport à $u'$, $v'$ et les dérivées de $u'$, $v'$ par rapport à $u$, $v$. Je veux démontrer *que $x$, $y$, $z$ et leurs dérivées ne figurent dans ces expressions que grâce aux fonctions*

$$\alpha_i(x, y, z; \ldots, \bar{x}_{(\alpha\beta)}, \bar{y}_{(\alpha\beta)}, \bar{z}_{(\alpha\beta)}, \ldots), \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

où l'on a posé

$$\bar{f}_{(\alpha\beta)} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial u'^{\alpha} \partial v'^{\beta}}.$$

En effet, soient UF, XF deux transformations infinitésimales qui opèrent respectivement sur les $u$, $v$ et sur les $x$, $y$, $z$ du groupe (2). On aura pour la parenthèse de Poisson

$$(XU) = 0,$$

car les X, U opèrent sur des variables différentes.

Il s'ensuit

$$(XU)^{(k)} = (X^{(k)} U^{(k)}) = 0,$$

où $X^{(k)}$, $U^{(k)}$ sont les XF, UF prolongées $k$ fois, en regardant $x$, $y$, $z$ comme des fonctions de $u$, $v$. Or, d'après la définition d'invariant différentiel,

$$X^{(k)}(u) = X^{(k)}(v) = X^{(k)}(\alpha_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m;$$

et tout autre invariant de $X^{(k)}$ s'exprime par $u$, $v$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_m$.

Mais

$$X^{(k)}[U^{(k)}(\alpha_i)] = U^{(k)}[X^{(k)}(\alpha_i)] = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

et alors les $U^{(k)}(\alpha_i)$ sont exprimables par $u$, $v$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_m$.

Puisque U était une transformation infinitésimale quelconque des $u$, $v$, nous pouvons conclure, en passant aux transformations finies, que, pour un changement quelconque de coordonnées sur une des

surfaces M, on a

$$\alpha_i(x, y, z; \ldots x_{(\alpha\beta)}, y_{(\alpha\beta)}, z_{(\alpha\beta)}, \ldots)$$
$$= \Omega_i[\ldots \alpha_s(x, y, z; \ldots \bar{x}_{(\alpha\beta)}, \bar{y}_{(\alpha\beta)}, \bar{z}_{(\alpha\beta)} \ldots) \ldots; \ldots, u'_{(\alpha\beta)}, v'_{(\alpha\beta)} \ldots]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m);$$

c'est-à-dire que le changement de coordonnées (4) transforme les fonctions caractéristiques $\alpha_i(u, v)$ en certaines fonctions $\overline{\alpha_i}(u', v')$, liées aux premières par

$$(5) \quad \alpha_i(u, v) = \Omega_i[\overline{\alpha_1}(u', v'), \ldots, \overline{\alpha_m}(u', v'); \ldots, u'_{(\alpha\beta)}, v'_{(\alpha\beta)}, \ldots].$$

En regardant les $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ comme coordonnées d'un point dans un espace $S_m$ à $m$ dimensions et les $u'_{(\alpha\beta)}$, $v'_{(\alpha\beta)}$ comme paramètres, il est bien facile de vérifier que les équations (5) nous définissent un groupe continu dans $S_m$.

Etant données deux surfaces S, S' avec leurs systèmes de fonctions caractéristiques

$$\alpha_i(u, v), \qquad \overline{\alpha_i}(u', v')$$

construites par rapport au groupe (2), pour voir s'il est possible, avec un changement de coordonnées sur S', de rendre ses fonctions caractéristiques identiques à celles de S, il suffira de reconnaître si le système (5) est intégrable. Sous ce point de vue, la théorie invariantive des surfaces par rapport à un groupe de Lie présente une évidente analogie avec la théorie des surfaces applicables, dans laquelle la condition d'équivalence de deux surfaces est l'intégrabilité d'un système différentiel analogue au système (5).

Or, supposons que du groupe (5) on puisse détacher celui-ci :

$$(6) \left\{ \begin{aligned} &\varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \\ &\quad = \Phi_i[\varphi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \ldots, \varphi_\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_m); \ldots, u'_{(\alpha\beta)}, v'_{(\alpha\beta)}, \ldots] \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu), \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire soit

$$\varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = c_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

une division imprimitive déterminée du groupe (5) dans $S_m$. En considérant les $\varphi_i$ comme des éléments, il est bien clair qu'elles sont changées entre elles par les transformations du groupe (6) qui est

en correspondance d'isomorphisme mériédrique avec le groupe (5). Le système (6) nous définit une théorie de déformation; nous l'appellerons pour cela *groupe des déformations d'ordre $h$ associé au groupe* (2), si $h$ est l'ordre maximum d'un au moins des invariants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Les caractères géométriques de la déformation résultent de l'interprétation géométrique des expressions invariantives

$$\varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Nous pouvons conclure que : *Deux surfaces* S, S', *dont les caractéristiques sont*

$$\alpha_i(u, v), \qquad \bar{\alpha}_i(u', v'),$$

*sont équivalentes dans un groupe de déformation* (6), *lorsque le système* (6) *est intégrable.*

Il est bien connu que le système complet des invariants différentiels d'une surface (1), construits respectivement au groupe H des mouvements dans l'espace Euclidien, est formé par les fonctions

$$E, F, G, D, D', D'',$$

coefficients des deux formes fondamentales de la surface donnée S. Alors si, sur une surface S' équivalente à S dans le groupe H, nous faisons le changement de coordonnées défini par les équations

$$u_1 = u_1(u, v), \qquad v_1 = v_1(u, v),$$

$E_1$, $F_1$, $G_1$, $D_1$, $D'_1$, $D''_1$ étant les fonctions analogues aux E, F, G, D, D', D'', mais construites respectivement aux $u_1$, $v_1$, nous obtiendrons

$$(K) \left\{ \begin{array}{lll} E = \varepsilon(E_1, F_1, G_1, \ldots), & F = \varphi(E_1, F_1, G_1, \ldots), & G = \gamma(E_1, F_1, G_1, \ldots), \\ D = \delta(D_1, D'_1, D''_1, \ldots), & D' = \delta'(D_1, D'_1, D''_1, \ldots), & D'' = \delta''(D_1, D'_1, D''_1, \ldots) \end{array} \right.$$

En chaque point M de S, les E, F, G, D, D', D'' prennent des valeurs bien déterminées, et cela a lieu même pour les $E_1$, $F_1$, $G_1$, $D_1$, $D'_1$, $D''_1$ relatives à chaque point M' de S', correspondant de M. Nous pouvons considérer les coefficients des deux formes fondamentales comme coordonnées de deux points N, N', correspondants, dans un espace à six dimensions et observer que, lorsqu'on passe de M à M' avec les opérations du groupe H, on passe de N à N' avec les opérations du groupe K.

Étudiant toutes les variétés imprimitives de l'espace à six dimensions relatives à ce groupe, c'est-à-dire déterminant des fonctions

$$\lambda_i(E, F, G, D, D', D'')$$

qui sont transformées entre elles par les opérations du groupe K, nous obtiendrons les théories de déformation associées au groupe de mouvements. Parmi les variétés imprimitives évidentes du groupe K figurent

1° $E = \text{const.}$, $F = \text{const.}$, $G = \text{const.}$,

2° $D = \text{const.}$, $D' = \text{const.}$, $D'' = \text{const.}$,

3° $\frac{E}{F} = \text{const.}$, $\frac{G}{F} = \text{const.}$,

4° $\frac{D}{D'} = \text{const.}$, $\frac{D''}{D'} = \text{const.}$,

5° $EG - F^2 = \text{const.}$,

6° $DD'' - D'^2 = \text{const.}$,

qui donnent lieu à des théories de déformation bien connues : *Deux surfaces seront équivalentes pour un de ces groupes de déformation lorsqu'un certain système différentiel déduit des* (K) *est intégrable.*

Umberto Bini (Rome).

**3158 et 3159.** (**1907**, 28) (H. Wieleitner). — *Intégrales définies.* — On a, pour toutes les valeurs de $\theta$ et de $t$,

$$(1)\qquad \frac{\sin\theta}{e^t + 2\cos\theta + e^{-t}} = e^{-t}\sin\theta - e^{-2t}\sin 2\theta + e^{-3t}\sin 3\theta - \ldots.$$

En multipliant cette équation par $\cos ht\,dt$ et en intégrant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$, on obtient

$$\sin\theta \int_0^\infty \frac{\cos ht\,dt}{e^t + 2\cos\theta + e^{-t}} = \frac{\sin\theta}{1 + h^2} - \frac{2\sin 2\theta}{4 + h^2} + \frac{3\sin 3\theta}{9 + h^2} - \ldots.$$

Or, si l'on développe, d'après Fourier,

$$e^{h\theta} - e^{-h\theta} = b_1 \sin\theta + b_2 \sin 2\theta + b_3 \sin 3\theta + \ldots,$$

on a

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (e^{h\theta} - e^{-h\theta}) \sin n\theta\,d\theta = -\frac{n(e^{h\pi} - e^{-h\pi})\cos n\pi}{n^2 + h^2},$$

par suite

$$\frac{\pi}{2}\frac{e^{h\theta}-e^{-h\theta}}{e^{h\pi}-e^{-h\pi}}=\frac{\sin\theta}{1+h^2}-\frac{2\sin 2\theta}{4+h^2}+\frac{3\sin 3\theta}{9+h^2}-\ldots,$$

$$-\pi<\theta<\pi.$$

On aura donc

$$\int_0^\infty \frac{\cos ht\,dt}{e^t+2\cos\theta+e^{-t}}=\frac{\pi}{2\sin\theta}\,\frac{e^{h\theta}-e^{-h\theta}}{e^{h\pi}-e^{-h\pi}}.$$

En substituant dans cette équation $\theta=0$ et $\theta=\frac{\pi}{2}$, on en déduira aisément

$$\int_0^\infty \frac{\cos ht\,dt}{\left(e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}\right)^2}=\frac{\pi h}{e^{h\pi}-e^{-h\pi}},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ht\,dt}{e^t+e^{-t}}=\frac{\pi}{2\left(e^{\frac{h\pi}{2}}+e^{-\frac{h\pi}{2}}\right)}.$$

Si, maintenant, on pose dans la première de ces équations

$$t=2k\varphi,\qquad h=\frac{1}{2k},$$

on obtient la première des formules de M. Cesàro; et, si l'on substitue dans la seconde

$$t=\frac{a}{r}\tau,\qquad h=\frac{r}{a},$$

on obtiendra la solution de la première question du n° 3159.

Pour trouver la seconde équation de M. Cesàro et la solution de la seconde question du n° 3159, on n'a qu'à intégrer l'équation (1) depuis $t=0$ jusqu'à $t=\infty$, après avoir multiplié par $\sin ht\,dt$.

De cette manière on trouve

$$\sin\theta\int_0^\infty \frac{\sin ht\,dt}{e^t+2\cos\theta+e^{-t}}=h\left(\frac{\sin\theta}{1+h^2}-\frac{\sin 2\theta}{4+h^2}+\frac{\sin 3\theta}{9+h^2}-\ldots\right);$$

seulement il ne paraît pas possible de sommer le second membre de cette équation. En posant respectivement $\theta=0$ et $\theta=\frac{\pi}{2}$, on en dé-

duira ces formules,

$$\int_0^\infty \frac{\sin ht\,dt}{\left(e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}\right)^2} = -h\sum_1^\infty \frac{n\cos n\pi}{n^2+h^2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ht\,dt}{e^t+e^{-t}} = -h\sum_1^\infty \frac{\cos n\pi}{(2n-1)^2+h^2};$$

d'où, en posant dans la première $t=2k\varphi$, $h=\frac{1}{2k}$ et dans la seconde $t=\frac{a}{r}\tau$, $h=\frac{r}{a}$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(e^{k\varphi}+e^{-k\varphi})^2} = -\sum_1^\infty \frac{n\cos n\pi}{1+4n^2k^2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\tau\,d\tau}{e^{\frac{a}{r}\tau}+e^{-\frac{a}{r}\tau}} = -\sum_1^\infty \frac{\cos n\pi}{1+(2n-1)^2\frac{a^2}{r^2}}.$$

Comme il est impossible de réduire le premier résultat à la forme donnée, il me semble que la seconde formule de M. Cesàro doit être fautive. W. Kapteyn (Utrecht).

Il s'agit, dans la question 3158, des intégrales définies

$$A=\int_0^\infty \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(e^{k\varphi}+e^{-k\varphi})^2}, \qquad B=\int_0^\infty \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(e^{k\varphi}+e^{-k\varphi})^2}.$$

On a

$$2A=\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\varphi}\,d\varphi}{(e^{k\varphi}+e^{-k\varphi})^2};$$

posant $e^{2k\varphi}=z$, il vient

$$2A=\frac{1}{2k}\int_0^\infty \frac{z^a\,dz}{(1+z)^2}, \qquad a=\frac{i}{2k}.$$

Supposons d'abord $a=a'+ia''$, $a'>0$; l'intégration par parties devient légitime et nous aurons

$$\int_0^\infty \frac{z^a\,dz}{(1+z)^2}=a\int_0^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z}=a\,\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

La première intégrale restant synectique pour $a$ purement imagi-

naire, on peut supposer $a' = 0$, et il vient

$$2\mathrm{A} = \frac{\pi}{4k^2 \sinh \dfrac{\pi}{2k}}.$$

En suivant le même procédé on arrive à reconnaître que la quantité $2\mathrm{B}$ est la partie réelle de la quantité

$$\frac{1}{4k^2}\left[\psi\left(\frac{i}{4k}\right)\right] - \psi\left(\frac{i}{4k} + \frac{1}{2}\right)\Big], \qquad \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Il est évidemment impossible de l'exprimer à l'aide des transcendantes élémentaires, de sorte que la deuxième formule de Cesàro doit être erronée. M. Lerch (Brünn, Autriche).

Le problème de la question 3159 revient à la recherche de l'intégrale définie

$$\mathrm{J} = 4c \int_0^\infty \frac{e^{-i\tau}\, d\tau}{e^{c\tau} + e^{-c\tau}}.$$

Faisant $e^{-2c\tau} = x$, il vient

$$\mathrm{J} = 2 \int_0^1 \frac{x^{a-1}\, dx}{1 + x}, \qquad a = \frac{i}{2c} + \frac{1}{2}.$$

Multiplions sous le signe somme les deux termes par $1 - x$ et posons $x^2 = z$; il s'ensuit

$$\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{z^{\frac{a}{2}-1} - z^{\frac{a-1}{2}}}{1 - z}\, dz,$$

d'où, en vertu de la formule bien connue de Legendre,

$$\psi(c) = \psi(1) + \int^1 \frac{1 - x^{c-1}}{1 - x}\, dx, \qquad \psi(c) = \frac{\Gamma'(c)}{\Gamma(c)},$$

et après quelques modifications simples

$$\mathrm{J} = \psi\left(\frac{1}{4} - \frac{i}{4c}\right) - \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4c}\right) - \pi \cot \pi\left(\frac{i}{4c} - \frac{1}{4}\right).$$

En séparant les parties réelles et les parties imaginaires, il

s'ensuit

$$4c\int_0^\infty \frac{\cos\tau\, d\tau}{e^{c\tau}+e^{-c\tau}} = \frac{\pi}{\cosh\frac{\pi}{2c}},$$

$$4c\int_0^\infty \frac{\sin\tau\, d\tau}{e^{c\tau}-e^{-c\tau}} = -\pi \operatorname{tangh}\frac{\pi}{2c} - i\left[\psi\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{4c}\right)-\psi\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4c}\right)\right],$$

cette dernière expression n'étant pas réductible aux transcendantes élémentaires. M. Lerch (Brünn, Autriche).

**3160** (**1907**, 28) (H. Wieleitner). — *Intégrales définies.* — Il me semble qu'ici $a$ et $\alpha$ devront être identiques, de sorte que l'auteur aura désiré la détermination des intégrales (¹)

$$P = \int_0^{\frac{r}{\alpha}} \frac{\cos\tau\, d\tau}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{r^2}\tau^2}},$$

$$Q = \int_0^{\frac{r}{\alpha}} \frac{\text{in}\,\tau\, d\tau}{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{r^2}\tau^2}}.$$

Dans ce cas, en posant dans la première

$$\frac{\alpha}{r}\tau = \sin\varphi,$$

on aura

$$P = \frac{r}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{r}{\alpha}\sin\varphi\right) d\varphi.$$

Or, en développant en série de fonctions Besséliennes

$$\cos\left(\frac{r}{\alpha}\sin\varphi\right) = I_0\left(\frac{r}{\alpha}\right) + 2I_2\left(\frac{r}{\alpha}\right)\cos 2\varphi + 2I_4\left(\frac{r}{\alpha}\right)\cos 4\varphi + \ldots,$$

---

(¹) M. Wieleitner nous a confirmé qu'il fallait poser $a = \alpha$.

La Rédaction.

on obtient

$$P = \frac{r\pi}{2\alpha} J_0\left(\frac{r}{\alpha}\right).$$

Dans la seconde intégrale, la substitution

$$\frac{\alpha}{r}\tau = \cos\varphi$$

donne

$$Q = \frac{r}{\alpha}\int^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{r}{\alpha}\cos\varphi\right) d\varphi.$$

Or, parce que

$$\sin\left(\frac{r}{\alpha}\cos\varphi\right) = 2 I_1\left(\frac{r}{\alpha}\right)\cos\varphi - 2\;{}_{3}\left(\frac{r}{\alpha}\right)\cos 3\varphi + \ldots,$$

$$Q = 2\frac{r}{\alpha}\sum_{0}^{\infty}\frac{I_{2n+1}\left(\frac{r}{\alpha}\right)}{2n+1}.$$

W. Kapteyn (Utrecht).

En admettant $\alpha = a$, ce qui paraît être la véritable forme de la question, les intégrales deviennent des transcendantes bien connues; elles reviennent aux fonctions de Fourier et de Bessel

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos a\tau\, d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 1 - \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^4}{(2.4)^2} - \frac{a^6}{(2.4.6)^2} + \ldots,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin a\tau\, d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = a - \frac{a^3}{(1.3)^2} + \frac{a^5}{(1.3.5)^2} - \ldots$$

M. Lerch (Brünn, Autriche).

3164. (1907, 30) (*Arcitenens*). — *Quadrilatère inscriptible.* — Soient $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ les angles du quadrilatère convexe $A_1 A_2 A_3 A_4$ inscrit dans un cercle de rayon 1; désignons par

(2, 1), (5, 1), (4, 1),
(3, 2), (4, 2), (1, 2),
(4, 3), (1, 3), (2, 3),
(1, 4), (2, 4), (3, 4)

les rayons des cercles exinscrits respectivement aux triangles

$$\Delta_1 \equiv A_2A_3A_4, \quad \Delta_2 \equiv A_3A_4A_1, \quad \Delta_3 \equiv A_4A_1A_2, \quad \Delta_4 \equiv A_1A_2A_3 :$$

avec cette notation $(4, 3)$, par exemple, est le rayon du cercle exinscrit au triangle $\Delta_3$ et inscrit à l'angle $(A_4)$ de ce triangle.

Appelons $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$ les rayons des cercles inscrits et posons

$$L\, A_4A_2A_3 = A_4A_1A_3 = \alpha, \qquad L\, A_1A_3A_4 = A_1A_2A_4 = \beta,$$
$$L\, A_2A_4A_1 = A_2A_3A_1 = \gamma, \qquad L\, A_3A_1A_2 = A_3A_4A_2 = \delta.$$

Puisque $\cos A_3 + \cos A_1 = \cos A_4 + \cos A_2 = 0$, les relations connues

$$\cos\alpha + \cos A_3 + \cos\delta = 1 + (1, 1),$$
$$\cos\beta + \cos A_4 + \cos\alpha = 1 + (2, 2),$$
$$\cos\gamma + \cos A_1 + \cos\beta = 1 + (3, 3),$$
$$\cos\delta + \cos A_2 + \cos\gamma = 1 + (4, 4)$$

donnent immédiatement

$$(1) \qquad (1, 1) + (3, 3) = (2, 2) + (4, 4),$$

qui est la proposition rappelée par M. Hayashi.

De même, rappelant la relation

$$-\cos A + \cos B + \cos C = -1 + r_a,$$

qui donne le rayon du cercle exinscrit au triangle ABC et inscrit à l'angle A, nous avons les quatre ternes d'équations suivantes :

$$-\cos\alpha + \cos A_3 + \cos\delta = -1 + (2, 1),$$
$$\cos\alpha - \cos A_3 + \cos\delta = -1 + (3, 1),$$
$$\cos\alpha + \cos A_3 - \cos\delta = -1 + (4, 1),$$

$$-\cos\beta + \cos A_4 + \cos\alpha = -1 + (3, 2),$$
$$\cos\beta - \cos A_4 + \cos\alpha = -1 + (4, 2),$$
$$\cos\beta + \cos A_4 - \cos\alpha = -1 + (1, 2),$$

$$-\cos\gamma + \cos A_1 + \cos\beta = -1 + (4, 3),$$
$$\cos\gamma - \cos A_1 + \cos\beta = -1 + (1, 3),$$
$$\cos\gamma + \cos A_1 - \cos\beta = -1 + (2, 3),$$

$$-\cos\delta + \cos A_2 + \cos\gamma = -1 + (1, 4),$$
$$\cos\delta - \cos A_2 + \cos\gamma = -1 + (2, 4),$$
$$\cos\delta + \cos A_2 - \cos\gamma = -1 + (3, 4),$$

qui, combinées convenablement, donnent les trois relations

$$(2)\quad \begin{cases} (1,2)+(3,4)=(2,1)+(4,3), \\ (1,3)+(3,1)=(2,4)+(4,2), \\ (1,4)+(3,2)=(2,3)+(4,1), \end{cases}$$

*analogues à celle rappelée par M. Hayashi.*

On obtient aussi les relations notables

$$(3)\quad \begin{cases} (3,1)+(4,1)=(3,2)+(4,2), \\ (4,2)+(1,2)=(4,3)+(1,3), \\ (1,3)+(2,3)=(1,4)+(2,4), \\ (2,4)+(3,4)=(2,1)+(3,1). \end{cases}$$

Les relations connues

$$\begin{aligned} (2,1)+(3,1)+(4,1)&=4+(1,1), \\ (3,2)+(4,2)+(1,2)&=4+(2,2), \\ (4,3)+(1,3)+(2,3)&=4+(3,3), \\ (1,4)+(2,4)+(3,4)&=4+(4,4) \end{aligned}$$

donnent, ayant égard aux équations (3),

$$(4)\quad \begin{cases} (2,1)-(1,2)=(1,1)-(2,2), \\ (3,2)-(2,3)=(2,2)-(3,3), \\ (4,3)-(3,4)=(3,3)-(4,4), \\ (1,4)-(4,1)=(4,4)-(1,1). \end{cases}$$

Sommant la première et la troisième de ces dernières, et ayant égard à (1), on obtient la première des relations (2); de même, la deuxième et la quatrième de (4) donnent la dernière des (2). La deuxième du groupe (2) peut s'obtenir aussi en sommant membre à membre la première et la dernière des équations (3) avec la troisième du groupe (2); chaque équation de ce dernier groupe peut s'obtenir en sommant deux équations du groupe (3) avec une de (2), convenablement choisies. V. Retali (Milan).

Le théorème mentionné par M. Hayashi comme connu des anciens mathématiciens chinois et japonais, ainsi que les extensions désirées par l'auteur de la question 3164, sont des corollaires presque immédiats d'une proposition plus générale dont voici l'énoncé et qui paraît originairement due à M. E. Lemoine (*Nouvelle Correspondance mathématique,* question 383):

ABCD étant un quadrangle inscriptible, soient $\alpha$ le centre du cercle inscrit au triangle BCD, $\alpha_B$ le centre du cercle exinscrit au même triangle, qui est situé sur la bissectrice intérieure de l'angle en B, etc. (chaque centre de cercle est donc désigné par une lettre principale, — celle du point qui n'est pas un sommet du triangle auquel le cercle est tritangent, — et par une lettre indice — celle du sommet de l'angle sur la bissectrice intérieure duquel le centre considéré est situé) : les seize points $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha_B \beta_A \gamma_D \delta_C)$, $(\alpha_C \beta_D \gamma_A \delta_B)$, $(\alpha_D \beta_C \gamma_B \delta_A)$ sont les intersections de quatre certaines droites avec quatre certaines autres droites perpendiculaires, les deux directions étant celles des axes des coniques du faisceau (ABCD); les seize points, groupés comme il vient d'être indiqué, sont donc les sommets de quatre rectangles dont les centres $\omega$, $\omega'$, $\omega''$, $\omega'''$ forment eux-mêmes un rectangle ayant pour centre le centre O du cercle ABCD et dont les côtés sont encore parallèles aux mêmes directions.

Afin de ne pas doubler, pour le moins, l'étendue de cette réponse, j'omettrai la démonstration du théorème qui vient d'être rappelé et je me bornerai à observer que les diagonales $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, du quadrangle ABCD faisant, en sens inverse, des angles égaux avec les côtés des rectangles $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha_B \beta_A \gamma_D \delta_C$; etc., chacune d'elles aussi fait avec l'une des diagonales de ces rectangles le même angle $\theta$ que l'autre fait avec l'autre de ces diagonales. La somme des rayons des cercles tritangents $(\alpha_i)$ et $(\gamma_j)$ et celle des rayons des cercles tritangents $(\beta_k)$ et $(\delta_l)$ ont donc pour commune valeur $\overline{\alpha_i \gamma_j} . \sin\theta$.

E. Malo.

Autres réponses de M. Hagge (Allemagne) et Plakhowo (Russie) communiquées à l'auteur de la question.

**3167.** (**1907**, 49) (E.-N. Barisien), — *Identité de deux courbes.* — Les pieds $P_1, P_2, P_3, P_4$ des normales abaissées du point P sur l'ellipse à centre O se trouvent avec P, O et les points infinis $X_\infty$, $Y_\infty$ des axes sur l'hyperbole d'Apollonius du point P. Donc, on a toujours l'égalité des rapports anharmoniques

$$P(P_1 P_2 P_3 P_4) = O(P_1 P_2 P_3 P_4) = X_\infty(P_1 P_2 P_3 P_4) = Y_\infty(P_1 P_2 P_3 P_4)$$

quelle que soit la position du point P.

P.-H. Schoute (Groningue).

Réponse analogue de M. L. Bickart et autre réponse de M. *Quilibet* communiquées à M. Barisien.

Étant donnée une ellipse ou une hyperbole C, les pieds $M_1, M_2, M_3, M_4$ des normales abaissées sur cette courbe d'un point M de son plan se trouvent, comme on sait, sur une hyperbole équilatère passant par le point P et par le centre de C et ayant ses asymptotes parallèles aux deux axes de C.

Si l'on joint un point quelconque $m$ de cette hyperbole aux quatre points $M_i$ par des droites, le rapport anharmonique de ces droites est toujours égal à celui des quatre droites $PM_i$. En supposant que le point M s'éloigne à l'infini sur l'hyperbole, il est clair que l'on a la proposition suivante, qui renferme celle de M. Barisien comme cas particulier :

« Le lieu S des points P du plan d'une ellipse ou d'une hyperbole pour lesquels les quatre normales issues de ce point présentent un rapport anharmonique donné $\lambda$, coïncide avec le lieu des points pour lesquels les quatre projections des pieds des normales sur l'un des axes présentent le même rapport anharmonique $\lambda$. »

Dans le cas de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ $(c^2 = a^2 - b^2)$, l'équation du lieu S est

$$(\lambda+1)^2(2\lambda-1)^2(\lambda-2)^2(a^2x^2+b^2y^2-c^4)^6$$
$$-4(\lambda^2-\lambda+1)^3[(a^2x^2+b^2y^2-c^4)^3+54a^2b^2c^4x^2y^2]^2=0.$$

Si $\lambda$ est tel que $\lambda^2-\lambda+1=0$, le lieu S se réduit à la conique $a^2x^2+b^2y^2-c^4=0$, comptée six fois. Si $\lambda = -1, \frac{1}{2}, 2$, on a la courbe de sixième degré, considérée par M. Barisien, comptée deux fois. Si $\lambda = 0, 1, 1 \pm \infty$, le lieu S se compose de la développée de C, des deux axes de C et de la droite à l'infini, chacune de ces trois droites étant comptée deux fois.

Le lieu S se compose de deux courbes du sixième degré quel que soit $\lambda$. C. Stéphanos (Athènes).

**3170.** (**1907**, 50) (E.-N. Barisien). — Toute puissance de 2 est le rapport de deux sommes de deux carrés.

Supposons vérifiées les deux équations

$$a^2+b^2=c^2+d^2,$$
$$2(e^2+f^2)=g^2+h^2.$$

On aura immédiatement

$$2^{2n} = \frac{(2^n c)^2 + (2^n d)^2}{a^2 + b^2},$$

$$2^{2n+1} = \frac{(2^n g)^2 + (2^n h)^2}{e^2 + f^2}.$$

Quant aux exemples numériques, on les obtiendra très facilement.

Pour la première équation, on se reportera aux réponses **459** et **460** (**1895**, 370; **1896**, 228).

Pour la seconde équation, il suffira de prendre les identités

$$2(1^2 + 2^2) = 1^2 + 3^2,$$

ou encore

$$2(2^2 + 11^2) = 9^2 + 13^2,$$

indiquées toutes deux dans l'énoncé. H. Brocard.

Soit un entier $N = \frac{A^2 + B^2}{a^2 + b^2}$ (N égal ou non à 2), on a

$$N^n = \frac{(A^2 + B^2)^n}{(a^2 + b^2)^n} = \frac{A_n^2 + B_n^2}{a_n^2 + b_n^2},$$

d'après un théorème connu. Lt-Colonel Allan Cunningham.

Réponses analogues de MM. A. Boutin, Gleizes, Mathieu, Mehmed-Nadir, Plakhowo, G. Quijano et J. Rose.

On peut obtenir une formule analogue pour les puissances *paires*, en appliquant la règle de Pythagore :

$$n^{2p} = (n^p)^2 = \left[\frac{(n^p)^2 + 1}{2}\right]^2 - \left[\frac{(n^p)^2 - 1}{2}\right]^2$$

lorsque $n^p$ est impair, et la règle d'Archytas et de Platon :

$$n^{2p} = (n^p)^2 = \left[\frac{(n^p)^2}{4} + 1\right]^2 - \left[\frac{(n^p)^2}{4} - 1\right]^2$$

si $n^p$ est pair. Gleizes.

3172. (**1907**, 50) (*Arcitenens*). — Posant

$$n^{2p} = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y),$$

puis

$$x - y = n^{2p-1}, \qquad x + y = n,$$

on a immédiatement

$$n^{2p} = \left[\frac{n(n^{2p-2} + 1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n^{2p-2} - 1)}{2}\right]^2.$$

H. Brocard.

La formule demandée est

$$n^{2p+1} = \left[\frac{n^p(n^2 + 1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n^p(n^2 - 1)}{2}\right]^2.$$

*Ahem*, A. Boutin, Mehmed-Nadir.

Soit $\Omega$, E un nombre impair ou pair respectivement, on a

$$\Omega^n = [\tfrac{1}{2}\Omega^n + 1)]^2 - [\tfrac{1}{2}(\Omega^n - 1)]^2,$$

quel que soit $n$, et, si $E = 2^k.\Omega$,

$$E^{2n} = (2^k.\Omega)^{2n} = [2^{nk-1}.(\Omega^{2n} + 1)]^2 - [2^{nk-1}.(\Omega^{2n} - 1)]^2.$$

Lt-Colonel Allan Cunningham.

La solution résulte de l'identité

$$n^k = \left(\frac{n^h + n^{k-h}}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^h - n^{k-h}}{2}\right)^2.$$

G. Quijano (Xérès).

3177. (**1907**, 51) (G. Lemaire). — *Francœur avait-il préparé une Histoire des Mathématiques?* — Les recueils biographiques sont muets sur ce point, qui sans doute est éclairci dans les deux documents plus importants publiés sous les titres suivants :

Jomard. — Discours sur la vie et les travaux de Louis Benjamin Francœur, prononcé à l'assemblée générale de la Société pour l'instruction élémentaire, le 15 juin 1851.

FRANCŒUR fils. — Notice sur la vie et les Ouvrages de M. L.-B. Francœur, 1853.

*Bibliothèque nationale*, Ln²⁷, nᵒˢ 7961 et 7962.

H. BROCARD.

3178. (1907, 51) (G. LEMAIRE). — *Journaux français de topographie.* — Il y en a eu deux; je crois qu'ils existent encore, mais je ne puis le vérifier.

Voici leurs titres :

I. Bulletin de la Société de Topographie de France. Trimestriel. Fondé en 1876. 14, rue de Sèvres (Paris, 7ᵉ).

II. Bulletin mensuel de la Société nationale de Topographie pratique. Mensuel. Fondé en 1881. 3 et 5, rue Chanaleilles (Paris, 7ᵉ).

H. BROCARD.

3184. (1907, 52). (G. DE SANTIS). — *Résolution de l'équation indéterminée*

$$y^2 + z^2(1 - x^2) = z^3.$$

L'équation proposée est identiquement vérifiée par les substitutions

$$y = t(1 - x^2 + t^2),$$
$$z = 1 - x^2 + t^2.$$

On a ainsi toutes les solutions.

GLEIZES, GRIGORIEF, E. MALO, MATHIEU.

On déduit immédiatement

$$y^2 = z^2(x^2 + z - 1);$$

donc $x^2 + z - 1$ doit être un carré, ou bien $z - 1$ la différence de deux carrés : $z$ sera pair ou de la forme $4k + 1$.

Cela posé, on pourra faire

$$z - 1 = a^2 - b^2,$$

et alors

$$x = b, \qquad y = a(a^2 - b^2 + 1).$$

G. QUIJANO (Xérès).

Autres réponses de MM. BINI, BROCARD, A. BOUTIN, MEHMED NADIR, J. ROSE.

**3185.** (**1907**, 52) (G. DE SANTIS). — *Résolution en nombres entiers de l'équation*

$$x^2 - x(y-z) + (y-z)^2 = t^3.$$

Posant $y - z = s$ on a à résoudre

$$x^2 - sx + s^2 = t^3.$$

Les formules de Lagrange permettent d'écrire

$$x = u^3 - uv^2 + v^3,$$
$$s = 3uv(u-v),$$
$$t = u^2 - uv + v^2.$$

Par exemple, pour $u = 4$, $v = 3$, on aura

$$x = -17, \qquad s = 36, \qquad t = 13;$$

pour $u = 5$, $v = 2$,

$$x = 73, \qquad s = 90, \qquad t = 19;$$

etc. E. MALO.

Posons : $y - z = u$, puis $x = \frac{u \pm v}{2}$; on est amené à résoudre en nombres entiers l'équation

$$4t^3 = 3u^2 + v^2,$$

qui est complètement résolue par les identités

$$4(3a^2 + b^2)^3 = (6a^2b + 2b^3)^2 + 3(6a^3 + 2ab^2)^2,$$
$$4(3a^2 + b^2)^3 = (9a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)^2 + 3(3a^3 + 3a^2b + ab^2 + b^3)^2,$$

où $a$ et $b$ sont des entiers quelconques. A. BOUTIN.

Réponse presque identique de M. G. QUIJANO (Xérès), qui remplace la dernière identité par

$$4(3a^2 + b^2)^3 = (2b^3 - 18ba^2)^2 + 3(6b^2a - 6a^3)^2.$$

Autres réponses de MM. BROCARD, MEHMED-NADIR et PLAKHOWO. Une réponse de M. U. Bini paraîtra prochainement.

# QUESTIONS.

**3247.** [**I 19**] 1° Je trouve que les plus petits nombres consécutifs, dont la somme des carrés soit un carré, sont 3 et 4, et que les plus petits nombres consécutifs dont la somme des carrés soit un bicarré, sont 119 et 120.

Je voudrais avoir de même les plus petits nombres consécutifs, dont la somme des carrés soit ou un cube, ou une cinquième puissance, ... ou une $k^{\text{ième}}$ puissance.

2° Le plus petit nombre qui soit de deux façons somme de deux carrés est $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$. Le plus petit nombre qui soit de trois façons somme de deux carrés est $325 = 1^2 + \overline{18}^2 = 6^2 + \overline{17}^2 = \overline{10}^2 + \overline{15}^2$. Je voudrais avoir le plus petit nombre qui soit de 4, 5 ..., $n$ façons somme de deux carrés. *Arcitenens.*

**3248.** [**K** et Σ] 1° (Σ) On propose d'étudier, comme *généralisation* du point de Lemoine, le point du plan d'un triangle tel que ses distances aux côtés sont proportionnelles aux nombres $l$, $m$, $n$.

2° J'ai résolu la question suivante par le calcul :

*Les centres de similitude externe et interne du cercle circonscrit à un triangle et de son cercle des neuf points sont respectivement l'orthocentre et le centre de gravité du triangle.*

J'en désire obtenir une solution géométrique.

3° Je désire savoir si l'on a étudié les points de rencontre

de la droite d'Euler d'un triangle avec : 1° le cercle circonscrit; 2° le cercle des neuf points. E. Barisien.

3249. [T6] La *théorie géométrique* des isogones ou courbes sphériques d'égale déclinaison, dans l'hypothèse que le magnétisme terrestre est dû à un aimant central, a-t-elle été développée? L. de la Rive (Genève).

3250. [K22a] Lorsque, dans une épure de Géométrie descriptive, la projection horizontale et la projection verticale d'une figure sont mises en concordance de telle manière que les deux projections d'un même point se trouvent toujours sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, on sait que le lieu des points à projections confondues est un plan qu'on appelle souvent *second plan bissecteur*.

Mais dans la pratique, pour des motifs divers, la projection horizontale et la projection verticale d'une figure peuvent ne pas être en concordance, tout en étant tracées dans le même plan; alors tout plan de profil est représenté par deux projections dont l'une est perpendiculaire à la ligne de terre de la projection horizontale, et dont l'autre est perpendiculaire à la ligne de terre de la projection verticale. Si l'on cherche, dans ce cas, le lieu des points à projections confondues, on trouve une droite dont les deux projections sont confondues sur la bissectrice des semi-droites perpendiculaires aux deux directions de la ligne de terre et représentant deux à deux les projections d'un même plan de profil.

Cette droite varie avec l'angle que font entre elles les deux directions de la ligne de terre; elle varie aussi, tout en restant parallèle à elle-même, avec la position des projections d'un premier plan de profil.

A-t-on déjà remarqué ces droites et quelles sont les recherches auxquelles elles peuvent avoir donné lieu?

F. Chomé (Bruxelles).

3251. [I1] Dans sa *Théorie des nombres* (p. 51), Lucas

énonce la proposition suivante : « Si un nombre n'est pas un cube parfait, tout nombre formé en permutant les chiffres du premier d'une manière quelconque, et en intercalant des o et des 9, n'est pas un cube parfait. »

Si l'on prend, par exemple, le nombre 775 qui n'est pas un cube parfait et si, après avoir permuté les chiffres, on intercale un o et un 9, on forme le nombre 79507 qui est le cube de 43. Comment faut-il modifier l'énoncé de cette proposition pour la rendre exacte? (¹). MATHIEU.

**3252.** **[K22a]** Je n'ai pas trouvé l'expression *ligne de terre* dans les Ouvrages de MONGE, LACROIX et HACHETTE sur la Géométrie descriptive, mais bien celle de *commune intersection des deux plans de projection*. L.-L. VALLÉE me paraît être le premier auteur qui, dans un *Traité de Géométrie descriptive*, se soit servi de l'expression *ligne de terre*. Voudrait-on me dire quand, où et par qui cette expression a été introduite dans le langage de la Géométrie descriptive, à l'imitation de ce qui se faisait déjà avant MONGE, je pense, dans le langage de la Perspective (²). *Eix.*

**3253.** **[I19c]** Je voudrais avoir la preuve rigoureuse du théorème suivant dont l'exactitude me paraît certaine :

Le bicarré de tout nombre entier peut être représenté comme la différence de deux nombres entiers de la forme $u^4 + v^4$ et aussi sous l'aspect de la différence de deux nombres entiers de la forme $u^4 + 2v^4$.

Je possède déjà le moyen de représenter le bicarré de tous les nombres entiers sous forme des différences ci-dessus, à

---

(¹) Dans le même Ouvrage (Paris, 1891), p. 326, il y a une faute d'impression : on doit écrire

$$2^{58} + 1 = 5 \times 107\,367\,629 \times 536\,903\,681.$$

J.-B. SPRAGUE (Ashburton).

(²) L'auteur serait heureux d'avoir une prompte réponse.

l'exception des nombres de la forme $3k$, $k$ n'étant pas multiple de 3 (c'est-à-dire des nombres 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, ...).

Cependant voici des exemples qui montrent que cette exception n'en est peut-être pas une :

1° $$42^4 = 17^4 + 43^4 - 1^4 - 25^4,$$

2° $$5460^4 = 5462^4 + 2.3999^4 - 2^4 - 2.4191^4.$$

Peut-être se trouvera-t-il un correspondant qui voudra bien donner une preuve complète du théorème que j'ai avancé? E. GRIGORIEF (Kazan, Russie).

**3254. [I19c]** Trouver deux nombres entiers consécutifs dont le premier soit la somme de trois bicarrés, le second soit le triple d'un bicarré.

Exemples :

$$2^4 + 5^4 + 9^4 = 3.7^4 - 1,$$
$$3^4 + 4^4 + 25^4 = 3.19^4 - 1.$$

E. GRIGORIEF (Kazan, Russie).

**3255. [I19c]** On peut trouver une infinité de couples de nombres entiers consécutifs dont le premier soit de la forme $a^4 + b^4$, le second de la forme $c^4 + 2d^4$.

Exemples :

$$22^4 + 23^4 = 26^4 + 2.13^4 - 1,$$
$$313^4 + 314^4 = 362^4 + 2.181^4 - 1.$$

Je résous cette question à l'aide de l'identité

$$p^2 + 9pq - 3q^2)^4 + (2p^2 - 6q^2)^4$$
$$= (2p^2 + 6q^2)^4 + 2(p^2 + 3q^2)^4 - (p^2 - 6pq - 3q^2)^4,$$

à la condition que

$$p^2 - 6pq - 3q^2 = 1;$$

mais je voudrais avoir des solutions (sauf 2, 3) obtenues par un procédé autre que celui de l'identité précédente.

E. Grigorief (Kazan, Russie).

**3256.** [**I19c**] L'équation

$$x^4 + y^4 + z^4 = 3u^4$$

est-elle possible en nombres entiers?

E. Grigorief (Kazan, Russie).

**3257.** [Σ et **I1**] On peut encore généraliser les questions **3039** (**1906**, 89) et **3221** (**1907**, 121), en admettant que le chiffre *zéro* peut occuper, comme tous les autres, la première place à gauche du nombre N, et en considérant une sorte quelconque de nombres spéciaux. Ainsi :

Quels sont les nombres puissances $n^{\text{ièmes}}$, les nombres triangulaires, polygonaux, figurés, etc., qui, dans le système de numération de base $q$, sont représentables par un nombre N formé à l'aide des $q$ chiffres, ou des $q-1$ chiffres significatifs (le *zéro* exclu), chacun étant écrit une et une seule fois?

J. Rius y Casas (Saragosse).

**3258.** [**K8**] Soient ABCD un quadrilatère plan convexe, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ les angles de ce quadrilatère, et $\omega$ l'angle entre ses diagonales. Calculer le rapport de ses côtés.

Nazarevsky (Kharkov, Russie).

**3259.** [**K20**] Peut-on calculer les produits suivants :

1° $$\sin a \sin 2a \sin 3a \ldots \sin ma,$$

2° $$\cos a \cos 2a \cos 3a \ldots \cos ma?$$

Nazarevsky (Kharkov, Russie).

**3260.** [**I7**] Peut-on démontrer par un procédé élémen-

taire la formule connue de la théorie des nombres

$$\sum_r \sin \frac{2r\pi}{p} = \frac{1}{2}\sqrt{p},$$

dans laquelle $r$ doit parcourir le système des *résidus* quadratiques de $p$ et $p$ est un nombre premier de la forme $4n+3$?

NAZAREVSKY (Kharkov, Russie).

**3261.** [**I7d**] Quelle est la forme des nombres premiers dont 10 est un résidu biquadratique?

NAZAREVSKY (Kharkov, Russie).

**3262.** [**Hgd**] Intégrer l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A \frac{\partial^2 \log_e z}{\partial y^2} = 0,$$

dans laquelle A est une constante.

EM. LEFÈVRE (Bruxelles).

**3263.** [Σ] (Extrait d'un Mémoire de M. R. Bricard, *J. E. P.*, 2e série, Cahier IX, 1904, p. 150). — Le limaçon de Pascal et l'hypocycloïde à trois rebroussements sont deux courbes du quatrième ordre admettant chacune une infinité de coniques tritangentes égales entre elles.

Il serait intéressant de rechercher quelles sont les courbes algébriques, les plus simples d'ordre ou de classe, jouissant de la même propriété.

E. MAILLET.

# RÉPONSES.

**637.** (**1895**, 314; **1904**, 209) (P.-H. Schoute). — *Voir :*

W. Bouwman. — Les nombres de Plücker de la courbe de déviation (*M. A.*, t. XLIX, 1897, p. 24-38, et *B. D.*, 2[e] Part., 1907, p. 84).

H. Brocard.

**1069.** (**1897**, 122; **1907**, 74) (*Rosace*). — *Identité.* — Nous poserons $\varphi_n(x) = \frac{x^n}{n!}(\log x - c_n)$, où $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{n}$; de sorte que $\varphi'_n(x) = \varphi_{n-1}(x)$ et $\varphi'_1(x) = \log x$. $\zeta(a, 2)$ représentant la série

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{(a+n)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(a+n)^2} + \ldots,$$

convergente pour toutes les valeurs de $a$, on a

$$\zeta(a, 2) = \left(a - \frac{1}{2}\right)^{-1} - \frac{1}{24}\zeta''(a, 2) - \ldots$$
$$- \frac{1}{(2k+1)!\,2^{2k}}\zeta^{(2k)}(a, 2) - \ldots$$

pour les valeurs de $a$ telles que $|a+n| > \frac{1}{2}$ pour $n$ entier positif ou nul. Pour ces valeurs de $a$, l'équation

$$\psi(a) = \log\left(a - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{24}\zeta'(a, 2) - \ldots$$
$$- \frac{1}{(2k+1)!\,2^{2k}}\zeta^{(2k-1)}(a, 2) - \ldots$$

définit une fonction $\psi(a)$ régulière, dont la dérivée est égale

à $\zeta(a, 2)$ :

$$\psi'(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right)^{-1} - \frac{1}{24}\zeta''(a, 2) - \ldots$$
$$- \frac{1}{(2k+1)!\,2^{2k}}\zeta^{(2k)}(a, 2) - \ldots$$

ou

$$\psi'(a) + \frac{1}{24}\psi'''(a) + \ldots + \frac{1}{(2k+1)!\,2^{2k}}\psi^{(2k+1)}(a) + \ldots = \left(a - \frac{1}{2}\right)^{-1},$$

ce qui donne

$$\psi\left(a + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(a - \frac{1}{2}\right) = \left(a - \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

et

$$\psi(a+1) - \psi(a) = \frac{1}{a}.$$

Cette dernière égalité permet de calculer $\psi(a)$ pour les valeurs de $a$ ne satisfaisant pas aux inégalités $|a+n| > \frac{1}{2}$ et, en outre, pour $a$ entier positif, donne

$$\psi(a+1) - \psi(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{a};$$

ainsi $\psi(1)$ est la constante d'Euler 0,57721566449..., prise avec le signe — : $\psi(1) = -C$.

De même, posons

$$\psi_1(a) = \varphi_1\left(a - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{24}\zeta(a, 2) - \ldots$$
$$- \frac{1}{(2k+1)!\,2^{2k}}\zeta^{(2k-2)}(a, 2) - \ldots;$$

on a $\psi'_1(a) = \psi(a)$, $\psi_1(a+1) - \psi_1(a) = \log a$, quel que soit $a$, et $\psi_1(a+1) - \psi_1(1) = \log 2 + \log 3 + \ldots + \log a$ pour $a$ entier positif; $\psi_1(a+1) - \psi_1(1)$ égale donc $\log\Gamma(a)$.

Puis

$$\psi_2(a) = \varphi_2\left(a - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{24}\psi(a) - \ldots$$
$$- \frac{1}{(2k+1)!\,2^{2k}}\psi^{(2k-2)}(a) - \ldots;$$

on a $\psi'_2(a) = \psi_1(a)$, $\psi_2(a+1) - \psi_2(a) = \varphi_1(a) = a(\log a - 1)$,

quel que soit $a$, et $\psi_2(a+1)-\psi_2(1)=\varphi_1(1)+\varphi_1(2)+\ldots+\varphi_1(a)$ pour $a$ entier positif.

D'une manière générale, posons

$$\psi_n(a)=\varphi_n\left(a-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{24}\psi_{n-2}(a)-\ldots$$
$$-\frac{1}{(2k+1)!\,2^{2k}}\psi_{n-2}^{(2k-2)}(a)-\ldots;$$

on a $\psi_n(a+1)-\psi_n(a)=\varphi_{n-1}(a)$, $\psi'_n(a)=\psi_{n-1}(a)$, quel que soit $a$, et $\psi_n(a+1)-\psi_n(1)=\varphi_{n-1}(1)+\varphi_{n-1}(2)+\ldots+\varphi_{n-1}(a)$ pour $a$ entier positif.

Le nombre $A_k$ de la question n'est autre que $e^{-\psi_{k+1}(1)}$. $\psi_n(1)$ tend vers o, et, par suite, $A_n$ tend vers 1 lorsque $n$ tend vers l'infini positif.

A. Pellet.

La formule proposée contient une inexactitude (¹). Mise sous la forme logarithmique, la vraie formule s'écrit

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k\log\frac{\nu}{n}=-\zeta'(-k)-\zeta(-k)\log n-\frac{n^{k+1}}{(k+1)^2}$$
$$+\sum_{\nu=1,2,3,\ldots}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu}\varphi_\nu(k)\,n^{k+1-2\nu},$$

où $B_1=\frac{1}{6}$, $B_2=\frac{1}{30}$, $B_3=\frac{1}{42}$, ... sont les nombres de Bernoulli et où l'on a posé

$$\varphi_\nu(x)=\binom{2\nu-x-2}{2\nu-1}\sum_{\mu=0}^{2\nu-2}\frac{1}{\mu-x},$$

puis

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots.$$

D'après une relation bien connue entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$, on a $\zeta(-2\mu)=0$ $(\mu=1,2,3,\ldots)$, puis $-\zeta(1-2\mu)=(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{2\mu}$, faits bien connus.

(¹) Toutefois l'inexactitude disparaît, si la suite des nombres bernoulliens positifs s'écrit $2B_2$, $-4B_4$, $6B_6$, ..., en posant $B_{2\nu+1}=0$. Mais une telle écriture n'est guère employée.

Quant à la quantité

$$\log A_k = -\zeta'(-k),$$

la même relation permet de conclure que l'on a, pour $k$ entier,

$$\log A_{2\mu} = (-1)^{\mu-1} \frac{(2\mu)!}{2(2\pi)^{2\mu}} \zeta(2\mu+1) \qquad (\mu > 0),$$

$$\log A_{2\mu-1} = (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu}{2\mu} \left[ \log(2\pi) - \frac{\Gamma'(2\mu)}{\Gamma(2\mu)} - \frac{\zeta'(2\mu)}{\zeta(2\mu)} \right].$$

La démonstration résulte immédiatement de la théorie de la fonction

$$R(w, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^s};$$

je la développerai dans un article qui va être envoyé aux *Annales de l'École Polytechnique de Porto.*

M. LERCH (Brünn, Autriche).

**2052.** (**1901**, 82) (E.-N. BARISIEN). — *Évaluation graphique de* $\pi$ (**1901**, 268; **1907**, 81). — Signalons cette évaluation très aisée, très approchée et très oubliée due à Huygens (*De Circuli magnitudine inventâ,* Leyde, 1654, Prop. XI, p. 18) :

On prend sur la circonférence un arc BC de corde égale au rayon; on le bissecte : soit M son milieu et soit AM un diamètre. Soient G et H les points où les droites AB et AC coupent le diamètre DE perpendiculaire à AM. Dans le triangle AGH on aura

$$\textit{Quart de circonf.} = AG + GH - \varepsilon,$$

ou, en supposant $R = 1$,

$$\tfrac{1}{2}\pi = AG + GH - \varepsilon.$$

« L'erreur par excès $\varepsilon$ est, dit Huygens, inférieure à $\frac{1}{1100}$ du rayon. » Huygens part de cette observation : si $a_{12}$ et $a'_{12}$ désignent les côtés des polygones réguliers convexes inscrit et circonscrit de 12 côtés, on a

$$AG = 2a_{12} = 2 \times 0{,}51764\ldots \quad \text{et} \quad GH = a'_{12} = 0{,}53590\ldots.$$

Signalons, du même Huygens (*Ibid.,* Prop. XII, p. 19) et très

oubliée, cette *rectification approchée de l'arc de cercle,* plus rapide même que la belle rectification de M. d'Ocagne (*N. A.*, janvier 1907) et très approchée :

Soit $\varphi$ l'arc AB à rectifier; on le bissecte : soit M son milieu; désignons par $a$ la corde AB et par $b$ la corde AM; nous aurons

$$\varphi = 2b + \frac{2b - a}{3} + \varepsilon.$$

Pratiquement, en deux coups de compas, on prend sur la direction AM la longueur AK = AB et la longueur ML = MA; puis, prenant (à vue ou au compas) le tiers de KL, on prolonge AL d'une longueur LX = $\frac{1}{3}$KL. On aura

$$\varphi = AX + \varepsilon.$$

« L'erreur par défaut $\varepsilon$ est, dit Huygens, inférieure à $\frac{1}{1200}$ de AX pour $\varphi = 90°$ et inférieure à $\frac{1}{6000}$ de AX pour $\varphi < 60°$. »

*Belga.*

**2807.** (**1904**, 165) (G. Candido). — Je crois devoir signaler à l'attention de l'auteur de la question la Note de J. Plana (*Cr.*, t. XVII, 1837, p. 331, et *N. A.*, 1848, p. 271-273) sur l'extraction d'une racine du binome $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$.

H. Brocard.

**2984.** (**1905**, 269) (E. Weber). — *Cycles non réversibles* (**1906**, 80, 165). *Voir :*

E. Carvallo. — Sur les cycles irréversibles et le théorème de Clausius (*Journal de Physique,* mars 1899).

Quand on fait suivre à un système un cycle fermé, l'intégrale $\int \frac{dQ}{T}$ est nulle, si le cycle est réversible. Elle est négative, si le cycle est irréversible.

Tel est le théorème de Clausius.

L'auteur cite des exemples de cycles irréversibles et montre que l'intégrale de Clausius y est certainement négative, différente de zéro. Il en donne, sous certaines hypothèses, une démonstration nouvelle et très simple.

(Extrait du résumé de M. Carvallo, d'après la Notice sur ses travaux scientifiques, 1901.)

H. Brocard.

3017. (**1906**, 36) (*Ymer*). — *Intégrale définie* (**1907**, 86). — Le moyen proposé par M. Brocard (**1907**, 86) pour calculer l'intégrale

$$s = \int \sqrt{\frac{x^4 + k^2(x^2\cos^2 x + \sin^2 x - x\sin 2x)}{x^4}}\,dx$$

ne me paraît pas pratique.

J'ai développé la quantité placée sous le radical et j'ai trouvé

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} 1 + y'^2 = 1 + k^2 \Bigg[ & \frac{1.2^4.5}{6!}x^2 - \frac{2.2^6.7}{8!}x^4 + \frac{3.2^8.9}{10!}x^6 - \ldots \\ & - \frac{2n.2^{4n+2}.(4n+3)}{(4n+4)!}x^{4n} \\ & + \frac{(2n+1).2^{4n+4}.(4n+5)}{(4n+6)!}x^{4n+2} - \ldots \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

La série entre crochets converge très lentement. Le coefficient de $x^{20}$ est

$$A_{10} = \frac{10 \times 2^{22} \times 23 \times k^2}{24!} = \frac{2k^2}{3^{10} \times 5^3 \times 7^3 \times \overline{11}^2 \times 13 \times 17 \times 19}.$$

Avec $k = 11{,}3$ nous obtenons

$$\log A_{10} = \overline{13}{,}297\,838\,96.$$

Pour $x = 2\pi$, nous obtenons

$$\log A_{10} \times (2\pi)^{20} = 3{,}261\,436\,33.$$

La valeur du dixième terme du développement est loin d'être négligeable pour de petites valeurs de $x$.

Pour profiter de calculs faits antérieurement, j'ai été amené à poser

$$x = \frac{\pi}{180}x_1.$$

Le calcul des coefficients du développement

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{1 + y'^2} = 1 + a_1 x_1^2 - a_2 x_1^4 + a_3 x_1^6 - a_4 x_1^8 + \ldots \\ + (-1)^{n+1} a_n x^{2n} - \ldots \end{aligned} \right.$$

m'a donné les résultats suivants :

| | |
|---|---|
| $\log a_1 = \overline{3},3346391$ | $\log a_6 = \overline{16},0150036$ |
| $\log a_2 = \overline{6},3554649$ | $\log a_7 = \overline{19},5772671$ |
| $\log a_3 = \overline{9},6901846$ | $\log a_8 = \overline{21},1061807$ |
| $\log a_4 = \overline{11},1191899$ | $\log a_9 = \overline{24},6668404$ |
| $\log a_5 = \overline{14},5970564$ | $\log a_{10} = \overline{26},2285056$ |

J'ai déduit de la loi de décroissance des caractéristiques de $\log a_n$ que la caractéristique du logarithme du coefficient de $x_1^{20}$ doit être $\overline{51}$. Il est très facile de vérifier que le terme $a_{20} x_1^{20}$ devient sensiblement égal à l'unité pour

$$x_1 = 18,80 = 18^\circ 48'.$$

Ce résultat semble prouver qu'il est inutile de chercher la solution de la question dans le développement de la quantité placée sous le radical et dans l'extraction de la racine carrée.

Dans tous les cas, le calcul des vingt premiers termes de la série est notoirement insuffisant : les limites imposées rendent ce calcul illusoire.

L'intégration graphique proposée par M. Maillet est sans aucun doute le meilleur moyen d'aboutir à la solution cherchée.

GLEIZES.

**3026.** (**1906**, 60) (G. LORIA). — (**1906**, 224 ; **1907**, 86). — Un article relatif à la méthode d'élimination de Labatie et à des méthodes analogues se trouve dans le Volume intitulé *L'élimination*, par H. Laurent (collection *Scientia*, n° 7 : série phys.-math.).

H. BROCARD.

**3078.** (**1906**, 163) (*Onponale*). — (**1907**, 39). — Pour une propriété géométrique des développantes successives d'un cercle, voir *N. A.*, p. 332-334, réponse **480**.

Au point de vue général, une étude sur les développantes d'une courbe présentera une certaine difficulté tenant à ce que la désignation d'une développante est un problème indéterminé, car on sait qu'une courbe admet une infinité de développantes. Cela compliquera singulièrement les essais de quadrature de ces lignes. Et, d'ailleurs, comment définir l'aire à évaluer ? H. BROCARD.

3094. (1906, 187) (G. Lemaire). — *Terminologie* (1907, 45). — Je pense que la réponse de M. Brocard à cette question n'est pas tout à fait satisfaisante, puisque M. Lemaire demandait probablement pourquoi dit-on *triangle, trilatère, quadrangle, quadrilatère, polygone, multilatère,* quand le mot *triangle,* grammaticalement, vaut la même chose que *quadrangle,* et justement on emploie le mot *triangle,* tandis que pour une figure qui possède quatre angles on emploie le mot *quadrilatère.* J'y répondrai qu'on doit maintenir ces dénominations, parce qu'elles ont été sanctionnées par l'habitude, quoiqu'elles ne soient pas concordantes.

N. Plakhowo (Russie).

3114. (1906, 257) (G. Lemaire). — Avec la meilleure volonté du monde, il est impossible de deviner à quelles questions il est fait ici allusion. L'auteur de l'énoncé ne pourrait-il en spécifier quelques-unes? H. Brocard.

3128. (1906, 261) (G. Lemaire). — Les questions relatives à des Musulmans sont le plus souvent compliquées par le désaccord dans la façon d'écrire leurs noms ou leurs désignatious. C'est, me semble-t-il, le cas pour l'Arabe Al-Baghadidi, dont je n'ai retrouvé aucune trace. Mais, s'il s'agit de Mohammed Bagdadinus, avec lequel il me paraît se confondre, au moins provisoirement, je puis dire qu'une Note à son sujet a été publiée dans la *B. M.* (1905, p. 321-322) par M. H. Suter : *Sur le Traité « De superficierum divisionibus » de Mohammed Bagdadinus.*

La traduction latine dudit Traité doit probablement être attribuée à Gérard de Crémone. H. Brocard.

3133. (1906, 262) (Lazzarini). — *Interprétation géométrique* (1907, 114). — La sphère

$$(x^2+y^2+z^2-1)(a^2+b^2+c^2-1)+4ax+4by+4cz=0$$

est orthogonale à la sphère imaginaire

$$(\mathrm{S}) \qquad x^2+y^2+z^2+1=0,$$

et les coordonnées de son centre $P(x, y, z)$ étant données par les

équations

$$x:y:z:1 = -2a : -2b : -2c : a^2 + b^2 + c^2 - 1,$$

les points $P(x, y, z)$, $P_1(a, b, c)$ se correspondent dans une transformation quadratique *double, spéciale,* bien connue, que l'on peut définir comme il suit : à un point $P(x, y, z)$ correspondent les deux points $P_1(a, b, c)$, $P_2(a', b', c')$ conjugués harmoniques par rapport aux points P, O, et réciproques par rapport à (S); à un point $P_1$ (et à son inverse $P_2$) correspond le point P conjugué harmonique du centre O de (S) par rapport à $P_1 P_2$. La sphère correspondant au point $P_1(a, b, c)$ est donc la sphère orthogonale à (S) et ayant son centre au point P, conjugué harmonique de O par rapport à $P_1$ et au point $P_2$, inverse de $P_1$ par rapport à (S).

V. Retali (Milan).

**3151.** (1907, 26) (Mehmed Nadir). — *Équation indéterminée.* — Voici quelques systèmes généraux de résolution en entiers de l'équation indéterminée :

$$11x^2 = y^2 - 3z^2 - w^2 + 2[u^2 + s^2 + 5t^2].$$

Les valeurs de certaines inconnues pourront être négatives, puisque l'exposant est pair; elles sont toutes différentes et dans le dernier système la valeur de $z$ est un carré :

$$(1)\quad 11(t+4)^2 = (37t+77)^2 - 3(t+1)^2 - (37t+76)^2 + 2[(t+3)^2 + (t+2)^2 + 5t^2],$$

$$(2)\quad 11(t+5)^2 = (24t+64)^2 - 3(t+1)^2 - (24t+62)^2 + 2[(t+3)^2 + (t+2)^2 + 5t^2],$$

$$(3)\quad 11(t+5)^2 = (8t+24)^2 - 3(t+1)^2 - (8t+18)^2 + 2[(t+3)^2 + (t+2)^2 + 5t^2],$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &11(b^2+15b+159)^2 \\ &\quad = (b^2-52b-549)^2 - 3(b^2+18b+81)^2 - (b^2+17b+107)^2 \\ &\qquad + 2[(b^2+19b+55)^2 + (b^2+20b+29)^2 + 5(b^2+21b+3)^2], \end{aligned} \right.$$

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &11(5f^2+17f+35)^2 \\ &\quad = (5f^2-50f-120)^2 - 3(5f^2+20f+20)^2 - (5f^2+19f+25)^2 \\ &\qquad + 2[(5f^2+21f+15)^2 + (5f^2+22f+10)^2 + 5(5f^2+23f+5)^2], \end{aligned} \right.$$

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &11(a^2+30a+636)^2 \\ &\quad = (a^2-104a-2196)^2 - 3(a+18)^4 - (a^2+34a+428)^2 \\ &\qquad + 2[(a^2+38a+220)^2 + (a^2+40a+116)^2 + 5(a^2+42a+12)^2]. \end{aligned} \right.$$

Voici les solutions les plus simples connues actuellement :

$$11.7^2 = 24^2 - 3.4^2 - 5^2 + 2[3^2 + 2^2 + 5.1^2].$$
$$11.57^2 = 165^2 - 3.45^2 - 7^4 + 2[41^2 + 37^2 + 5.33^2].$$
$$11.5^2 = 114^2 + 3.2^2 - 113^2 + 2[4^2 + 3^2 + 5.1^2].$$

A. Gérardin.

*P. S.* — Je suis à la disposition de M. Mehmed Nadir pour lui communiquer les méthodes employées dans cette résolution.

Autre réponse de M. Brocard, qui donne les solutions $(x, y, z, w, u, s, t)$ :

(10, 54, 7, 43, 1, 3, 4), (1, 18, 2, 29, 3, 4, 7), (7, 4, 8, 1, 12, 13, 3).

**3154.** (**1907**, 27) (G. Lemaire). — *Patrons des mathématiciens.* — Dans l'Ouvrage de Rebière : *Les femmes dans la Science,* sainte Hildegarde est désignée comme patronne des physiciens. Cette sainte (1100-1180) est la fondatrice du monastère du mont Saint-Ruppert, près de Bingen, sur les bords du Rhin. Ses Ouvrages sont :

*Physica,* en 4 livres qui contiennent beaucoup d'observations et de réflexions personnelles.

*Subtilités des natures ; De la Médecine.*

On trouve dans ces Ouvrages les germes de plusieurs découvertes modernes et des aperçus très curieux sur divers points des Sciences.

Voir *Hildegardis opera omnia,* édition Daremberg et de Reuss, chez Migne, 1882 ; 1 vol. in-8. J. Rose.

**3155.** (**1907**, 27) (E. Fauquembergue). — *Résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée* $x^4 + 2y^4 = z^4 + 2t^4$. — Cette question de M. E. Fauquembergue n'est qu'une variante de ma question n° **2604** (**1903**, 153) (¹) demeurée jusqu'ici sans réponse.

Il y a quatre ans, j'avais déjà connaissance que l'équation donnée admet une infinité de solutions. Mais les résultats auxquels je suis arrivé par la méthode ci-dessous sont, malheureusement, très compliqués.

Voici cependant cette méthode :

---

(¹) C'est aussi ce que M. H. Brocard nous a signalé.

En écrivant l'équation sous la forme

$$x^4 - z^4 = 2(t^4 - y^4)$$

et en substituant

$$x = u(a+b), \qquad t = v(c+d),$$
$$z = u(a-b), \qquad y = v(c+d),$$

on obtient

(1) $$u^4 ab(a^2+b^2) = 2v^4 cd(c^2+d^2).$$

Faisons maintenant dans l'équation précédente un changement de variables tel que

$$a^2+b^2 = c^2+d^2.$$

Pour cela posons

$$a = pr+qs, \qquad c = pr-qs,$$
$$b = ps-qr, \qquad d = ps+qr.$$

L'équation (1) devient

$$\frac{(pr+qs)(ps-qr)}{(pr-qs)(ps+qr)} = \frac{2v^4}{u^4},$$

ou, par la substitution

$$\frac{p}{q} = m \text{ et } \frac{r}{s} = n,$$

$$\frac{(mn+1)(m-n)}{(mn-1)(m+n)} = \frac{2v^4}{u^4}.$$

Une simplification importante se présente, si l'on prend

$$m-n = (mn-1)(m+n),$$

d'où

$$m = \frac{2-n^2}{n}.$$

On aura alors

$$3-n^2 = \frac{2v^4}{u^4},$$

ou, faisant

$$n = \frac{w}{u^2},$$

(2) $$3u^4 - 2v^4 = w^2.$$

D'après la solution évidente de l'équation dernière, savoir :

$$u = v = w = 1,$$

on peut en obtenir une infinité d'autres ; il en est donc de même de la question posée. Les plus simples solutions de l'équation (2) sont :

$$u_1 = 33, \qquad v_1 = 13, \qquad w_1 = 1871,$$
$$u_2 = 20577, \qquad v_2 = 8843, \qquad w_2 = 1410140689.$$
$$\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots$$

Les équations du genre (2) ont été traitées avec détails par Desboves (*C. R.*, 22 octobre 1878, 7 avril et 7 octobre 1879; *N. A.*, 1879, p. 438-440) et par Ed. Lucas (*N. A.*, 1879, p. 71).

En utilisant la première solution $u = 33$, $v = 13$ on trouve successivement

$$n = \frac{1871}{33^2}, \qquad m = -\frac{1128799}{2037519},$$
$$p = 1128799, \qquad r = 1871,$$
$$q = -2037519, \quad s = 1089;$$

ensuite, si on laisse de côté le facteur commun 2,

$$a = -53437631, \qquad c = 2165420560,$$
$$b = 2520730080, \qquad d = -1291467969;$$

donc enfin

$$x = 81420650817, \qquad z = 84947534463,$$
$$y = 44939550877, \qquad t = 11361383683.$$

C'est la plus petite solution établie d'après la méthode exposée.

Conformément à cela, le plus petit nombre entier susceptible d'être représenté de deux manières différentes par la forme $x^4 + 2y^4$ est extrêmement grand : il y a 44 chiffres.

Il serait bien désirable de trouver encore d'autres méthodes pour déterminer les plus simples résultats numériques,

E. Grigorief (Kazan, Russie).

3162. (1907, 29) (E.-N. Barisien). — *Quadrilatère inscriptible.* — Il suffit que les côtés et les diagonales soient commensurables, parce que, en réduisant les fractions qui les mesurent au même dénomi-

nateur, les numérateurs seront des nombres entiers vérifiant l'énoncé.

Or, si cos A est commensurable, il est toujours possible de vérifier l'égalité

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bc \cos A,$$

$a$, $b$ et $c$ étant des nombres commensurables.

En effet, on aurait

$$a^2 = (b \pm c \cos A)^2 + (1 - \cos^2 A)c^2;$$

mais $(1 - \cos^2 A)c^2$ peut être de beaucoup de manières la différence de deux carrés commensurables, c'est-à-dire

$$(1 - \cos^2 A)c^2 = u^2 - v^2;$$

donc, si nous faisons

$$b \pm c \cos A = v,$$

on déduira

$$a = u.$$

Cela posé, soient

$$a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 + 2b_1 c_1 \cos A$$
$$a_2^2 = b_2^2 + c_2^2 - 2b_2 c_2 \cos A,$$

M le plus petit nombre divisible à la fois par $a_1$ et $a_2$, et

$$a'_1 = M : a_1, \qquad a'_2 = M : a_2.$$

Le quadrilatère dont les côtés sont $a'_2 b_1$, $a'_2 c_1$, $a'_1 b_2$ et $a'_1 c_2$ et M une des diagonales est évidemment inscriptible : l'autre diagonale sera

$$\frac{a'_2 a'_1 b_1 b_2 + a'_2 a'_1 c_1 c_2}{M}$$

ou bien

$$\frac{a'_2 a'_1 b_1 c_2 + a'_2 a'_1 c_1 b_2}{M};$$

elle est commensurable dans l'un et l'autre cas.

G. Quijano (Xérès).

Autres réponses de MM. Bini (Rome) et Plakhowo (Russie).

**3166.** (**1907**, 49) (E.-N. Barisien). — *Aire du quadrangle formé par les pieds des quatre normales menées d'un point donné à une conique à centre.* — Je me bornerai à donner l'esquisse de la solution sans pousser jusqu'au bout l'exécution de calculs sans difficulté, mais un peu longs, et qui ne peuvent conduire à une formule explicite utilisable, le carré de l'aire demandée étant la racine d'une équation irréductible du troisième degré.

De l'équation de la conique rapportée à son centre et à ses axes, et, pour fixer les idées, supposée être une ellipse,

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

ainsi que de l'équation de l'hyperbole d'Apollonius,

$$c^2xy + b^2\alpha x - a^2\beta y = 0,$$

je commence par conclure, au moyen des substitutions

$$x = \alpha + \rho, \qquad y = \beta + \rho\theta,$$

l'équation aux coefficients angulaires des normales. En effet, par le moyen de l'équation de l'hyperbole, j'obtiens d'abord

$$\rho = \frac{b^2\alpha\theta - a^2\beta}{c^2\theta},$$

et, portant cette valeur dans l'équation de l'ellipse, il me vient

$$0 = b^2\alpha^2\theta^4 - 2b^2\alpha\beta\theta^3 + (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)\theta^2 - 2a^2\alpha\beta\theta + a^2\beta^2,$$

relation d'ailleurs bien connue.

Le double de l'aire du triangle PQR (en désignant par P, Q, R, S les pieds des normales) est alors exprimé par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha + \rho_1 & \beta + \rho_1\theta_1 & 1 \\ \alpha + \rho_2 & \beta + \rho_2\theta_2 & 1 \\ \alpha + \rho_3 & \beta + \rho_3\theta_3 & 1 \end{vmatrix}$$

qui se réduit immédiatement à

$$\begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_1\theta_1 & 1 \\ \rho_2 & \rho_2\theta_2 & 1 \\ \rho_3 & \rho_3\theta_3 & 1 \end{vmatrix}$$

et devient en développant

$$\frac{a^2\beta}{c^4}\,\frac{1}{\theta_1\theta_2\theta_3}\,\Sigma(b^2\alpha\theta_1-a^2\beta)(\theta_3-\theta_2)\theta_1,$$

c'est-à-dire, à cause de $\Sigma\theta_1(\theta_3-\theta_2)\equiv 0$, et en revenant à la forme de déterminant

$$\frac{a^2b^2\alpha\beta}{c^4}\,\frac{1}{\theta_1\theta_2\theta_3}\begin{vmatrix} 1 & \theta_1 & \theta_1^2 \\ 1 & \theta_2 & \theta_2^2 \\ 1 & \theta_3 & \theta_3^2 \end{vmatrix}.$$

On trouvera de même pour l'aire du triangle PRS la valeur

$$\frac{a^2b^2\alpha\beta}{c^4}\,\frac{1}{\theta_1\theta_3\theta_4}\begin{vmatrix} 1 & \theta_1 & \theta_1^2 \\ 1 & \theta_3 & \theta_3^2 \\ 1 & \theta_4 & \theta_4^2 \end{vmatrix},$$

puis par addition, en désignant par $\sigma$ l'aire du quadrangle,

$$-2\frac{c^4}{a^2b^2\alpha\beta}\sigma=\frac{(\theta_1-\theta_3)(\theta_2-\theta_4)(\theta_1\theta_3-\theta_2\theta_4)}{\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4}.$$

Le produit effectué $(\theta_1-\theta_3)(\theta_2-\theta_4)$ est $\theta_1\theta_2+\theta_3\theta_4-(\theta_1\theta_4+\theta_2\theta_3)$, et, si je pose pour abréger

$$\omega_1=\theta_1\theta_3+\theta_2\theta_4,\qquad \omega_2=\theta_1\theta_2+\theta_3\theta_4,\qquad \omega_3=\theta_1\theta_4+\theta_2\theta_3,$$

je pourrai écrire

$$-2\frac{c_4}{a^2b^2\alpha\beta}\sigma=\frac{(\omega_2-\omega_3)\sqrt{\omega_1^2-4\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4}}{\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4}.$$

Or les quantités $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont les racines d'une équation du troisième degré en $\omega$ ayant pour coefficients des expressions entières des coefficients de l'équation en $\theta$; d'autre part la valeur de $\sigma$ peut encore être mise sous la forme

$$=2\frac{c^4}{a^2b^2\alpha\beta}\sigma=\frac{\sqrt{(\omega_2-\omega_3)^2(\omega_1^2-4\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4)}}{\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4}$$

$$=\frac{\sqrt{[(\omega_2+\omega_3)^2-4\omega_2\omega_3](\omega_1^2-4\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4)}}{\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4}.$$

Le carré de $\sigma$ se ramènera par suite à une fonction entière du second degré, à coefficients rationnels, de la racine $\omega$ d'une certaine

équation cubique, et il ne peut être explicité qu'au moyen des formules de Cardan, illusoires précisément dans le cas qui offre principalement de l'intérêt. *E.-A. Majol.*

**3168.** (**1907**, 49) (E.-N. Barisien). — *Distances du point de Lemoine aux centres des cercles tritangents.* — J'ai donné (**1906**, 74) la formule suivante pour la distance de deux points en coordonnées normales absolues

$$\delta^2 = M(x'-x)^2 + N(y'-y)^2 + P(z'-z)^2,$$

$$M = \frac{b^2+c^2-a^2}{2h_a^2}, \qquad N = \frac{c^2+a^2-b^2}{2h_b^2}, \qquad P = \frac{a^2+b^2-c^2}{2h_c^2}.$$

Dans le cas du centre du cercle inscrit et du point de Lemoine

$$x = r = \frac{S}{p}, \qquad y = r, \qquad z = r,$$

$$x' = \frac{2aS}{a^2+b^2+c^2}, \qquad y' = \frac{2bS}{a^2+b^2+c^2}, \qquad z' = \frac{2cS}{a^2+b^2+c^2}.$$

Par suite, on a alors, en remplaçant $h_a$ par $\frac{2S}{a}$ et S disparaissant, la formule suivante :

$$\delta^2 = \sum \frac{(b^2+c^2-a^2)a^2}{2}\,\frac{[b(a-b)+c(a-c)]^2}{(a^2+b^2+c^2)^2(a+b+c)^2}.$$

Dans le cas d'un des centres des cercles ex-inscrits, par exemple de $I_a$, on a

$$y = -r_a = -\frac{S}{p-a}, \quad r_a, \quad r_a,$$

et, par suite,

$$\delta_a^2 = \frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)^2(a+b+c)^2}\left\{\begin{array}{l}(b^2+c^2-a^2)a^2[b(a+b)+c(a+c)]^2\\ +(c^2+a^2-b^2)b^2[c(b-c)-a(b+a)]^2\\ +(a^2+b^2-c^2)c^2[b(c-b)-a(c+a)]^2\end{array}\right\}.$$

On a des formules analogues pour $I_b$, $I_c$. J. Rose.

Soient

$P(\lambda', \lambda'', \lambda''')$ un point quelconque situé dans le plan d'un triangle $ABC = \Delta$, et $BCP = \lambda'\Delta$, $CAP = \lambda''\Delta$, $ABP = \lambda'''\Delta$;

M le centre du cercle circonscrit au triangle donné (rayon $= r$); on trouvera la distance $PM = \sqrt{r^2 - (a^2\lambda''\lambda''' + b^2\lambda'\lambda''' + c^2\lambda'\lambda'')}$.

[*Voir* TAFELMACHER, *Ueber einen geometrischen Ort und eine neue Art von Dreieckskoordinaten* (*Z. H.*, t. XXXVII, p. 5).]

En désignant par

$L\left(\frac{a^2}{n}, \frac{b^2}{n}, \frac{c^2}{n}\right)_{n=a^2+b^2+c^2}$ le point de Lemoine,

$J\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}\right)_{n=a+b+c}$, $J_1$, $J_2$, $J_3$ les centres des quatre cercles inscrits et exinscrits au triangle ABC;

$\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ les rayons;

A′, B′, C′ les points de contact du cercle J avec $a$, $b$, $c$,

et en posant

$$(1)\qquad \frac{a+b+c}{2} = \mathfrak{S}, \qquad \frac{-a+b+c}{2} = \alpha, \qquad \ldots;$$

$$(2)\qquad \begin{cases} -a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = m', \\ a^2\alpha - b^2\beta + c^2\gamma = m'', \\ a^2\alpha + b^2\beta - c^2\gamma = m'''; \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} a^2\mathfrak{S} + b^2\gamma + c^2\beta = m'_a, \\ a^2\mathfrak{S} - b^2\gamma + c^2\beta = m''_a, \\ a^2\mathfrak{S} + b^2\gamma - c^2\beta = m'''_a, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

on aura

$$(4)\qquad \text{l'aire } LB'C' = \varphi' = \frac{2m'\Delta}{bc(a^2+b^2+c^2)}, \qquad \ldots.$$

Si $\Delta'$ est l'aire du triangle A′B′C, on trouvera

$$(5)\qquad \Delta = \frac{abc}{2\alpha\beta\gamma}\Delta'.$$

[*Voir* HAGGE, *Zur Theorie der einem Dreieck eingeschriebenen Kreise* (*Z. H.*, t. XXXVIII, p. 1).]

En substituant cette valeur (5) dans l'équation (4), il viendra

$$\varphi' = \frac{am'\Delta'}{2\beta\gamma(a^2+b^2+c^2)}.$$

Le point J est le centre du cercle circonscrit au triangle A′B′C′ et

$A'B' = 2\gamma \sin \frac{C}{2}$, ..., d'où résulte la solution suivante :

$$LJ^2 = \rho^2 - \frac{m'm'' + m'm''' + m''m'''}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

et les relations analogues :

$$LJ_1^2 = \rho_1^2 + \frac{m'_a m''_a + m'_a m'''_a - m''_a m'''_a}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}, \qquad \ldots.$$

K. HAGGE (Kolsnap, Allemagne).

Autres réponses de MM. LEZ et PLAKHOWO, communiquées à M. Barisien.

3185. (**1907**, 52) (G. DE SANTIS). — *Équation indéterminée* (**1907**, 168). — L'équation peut s'écrire

$$\left(x - \frac{y - z}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y - z}{2}\right)^2 = t^3.$$

Si l'on pose

$$\frac{y - z}{2} = v, \qquad x - v = u,$$

$\alpha$, $\beta$ étant deux nombres entiers quelconques, on pourra écrire

$$u + v\sqrt{3} = (\alpha + i\beta\sqrt{3})^3 = \alpha^3 - 9\alpha\beta^2 + 3i(\alpha^2 - \beta^2)\beta\sqrt{3},$$
$$u - v\sqrt{3} = (\alpha - i\beta\sqrt{3})^3 = \alpha^3 - 9\alpha\beta^2 - 3i(\alpha^2 - \beta^2)\beta\sqrt{3},$$

d'où

$$u = \alpha^3 - 9\alpha\beta^2; \qquad v = 3(\alpha^2 - \beta^2)\beta; \qquad t = \alpha^2 + 3\beta^2;$$

et alors

$$x = u + v = \alpha^3 - 9\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta - 3\beta^3; \quad y - z = 2v = 6\alpha^2\beta - 6\beta^3.$$

Partant, une solution de l'équation proposée est

$$x = \alpha^3 - 9\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta - 3\beta^3; \qquad y = 6\alpha^2\beta; \qquad z = 6\beta^3;$$
$$t = \alpha^2 + 3\beta^2.$$

UMBERTO BINI (Rome).

# QUESTIONS.

**3264.** [Σ] (1) Soit la fraction continue

$$\Phi = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots.$$

I. Les $a_i$ étant entiers $> 0$, peut-on trouver des exemples de fractions $\Phi$ à quotients incomplets tels que $1 \leqq a_i \leqq \lambda$ ($\lambda$ nombre fixe), et qui soient à la fois quasi-périodiques et égales à la racine carrée d'un nombre de Liouville (comp. *Bull. Soc. math.*, 1906, p. 215)?

II. Une infinité des $a_i$ étant fractionnaires et les $a_i > 0$ : 1° peut-on trouver des exemples de fractions $\Phi$, quasi-périodiques ou non, avec même, si l'on veut, $a_i \geqq 1$, d'ordre $< (1, \infty)$ dans la première classification des fractions continues, ou $< (1, 1)$ dans la deuxième, et qui soient en même temps des nombres de Liouville (comp. *Journ. de Math.*, 1907, théorèmes VII et VIII, p. 325 et 331)?

2° Peut-on trouver des exemples de fractions $\Phi$ non-périodiques, mais quasi-périodiques, et qui soient des nombres rationnels ou des irrationnelles quadratiques, ou encore peut-on établir qu'il n'en peut exister?

3° Peut-on trouver une condition nécessaire pour qu'une fraction $\Phi$ soit un nombre transcendant, de Liouville ou non, au moins dans des cas étendus?

4° Les fractions illimitées $\Phi$ dont la valeur est rationnelle sont-elles caractérisées par quelque propriété spéciale? Par exemple, doivent-elles être périodiques? E. Maillet.

(1) A ce sujet, consulter mon Mémoire du *Journ. de Math.*, 1907.

3265. [V] On demande d'indiquer où l'on trouve énoncée, et pour la première fois, la propriété suivante de l'hyperbole équilatère :

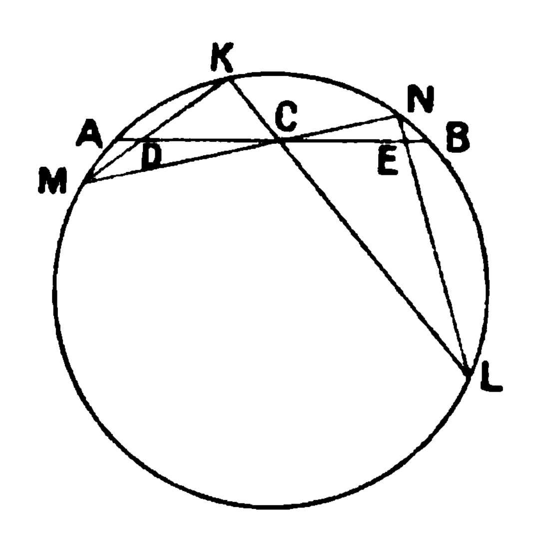
Soient $\rho$ le rayon de courbure au point M de la courbe et N le point où la normale coupe l'autre branche; on a

$$2\rho = MN.$$

S. Prieto (Pachuca, Mexique).

3266. [**L¹ 16a** et **K 10e**] Voici un théorème bien connu de la géométrie élémentaire :

*Par le milieu* C *de la corde* AB *d'un cercle on mène*




*deux cordes* KCL *et* MCN *quelconques. Les droites* KM *et* NL *coupent* AB *en* D *et* E *respectivement; on a* DC = CE.

Quel est le théorème dualistique ?

Quelle est la généralisation du théorème pour une section conique, et quel est le théorème dualistique ?

Je désirerais un résumé de la démonstration ou des références bibliographiques.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

3267. [**K2c**] Le cercle de Feuerbach (ou des neuf points) a été d'abord défini comme *site* de points remarquables (les neuf points); ultérieurement il a été considéré

comme *lieu* de points (centres des hyperboles équilatères circonscrites au triangle, foyer des paraboles admettant le triangle comme autopolaire) : je désirerais savoir si ce même cercle a été défini comme l'enveloppe de droites en liaison avec le triangle. *E.-A. Majol.*

**3268.** [**H 12 a** $\alpha$] Trouver la somme des $n$ premiers termes de

$$\frac{1.3}{1.2.3.4}+\frac{1.3.5}{1.2.3.4.5}+\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.5.6}+\ldots$$

(G. Chrystal, *Algebra*, t. II).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

**3269.** [**I 19**] J'ai trouvé la transformation de la forme cubique en carré et en bicarré sans aucune solution particulière. Soient V une racine de l'équation

$$aV^3+bV^2+cV+d=0,$$

U une racine d'une autre équation cubique telle que

$$\alpha^3+A\alpha^2+B\alpha+C-V(A'\alpha^2+B'\alpha+C')=(\alpha-V)(\alpha-U)^2.$$

On trouve

$$A=\frac{2b}{a},\qquad B=\frac{b^2}{a^2},\qquad C=\frac{4d}{a},$$

$$A'=-3,\qquad B'=-\frac{2b}{a},\qquad C'=\frac{b^2-4ac}{a^2},$$

$$V=-\frac{aU+b}{2a},$$

$$a^3U^3+a^2bU^2+a(4ac-b^2)U+b(4ac-b^2)-8a^2d=0,$$

d'où il suit

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=z^2,$$

$$M=a\alpha^3+b\alpha^2\beta+c\alpha\beta^2+d\beta^3,$$

$$x=(a^2\alpha^3+2ab\alpha^2\beta+b^2\alpha\beta^2+4ad\beta^3)M,$$

$$y=-[3a^2\alpha^2\beta+2ab\alpha\beta^2+(4ac-b^2)\beta^3]M,$$

$$z=\{a^3\alpha^3+a^2b\alpha^2\beta+a(4ac-b^2)\alpha\beta^2+[b(4ac-b^2)-8a^2d]\beta^3\}M^2,$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont arbitraires. On peut changer $a$, $b$, $c$, $d$, $x$, $y$ en $d$, $c$, $b$, $a$, $y$, $x$. Si l'on rend carré le premier facteur de $z$, on aura la représentation d'un bicarré par une forme cubique.

Ces formules sont-elles connues et cette méthode a-t-elle été employée? Ne peut-elle servir à la transformation des formes en puissances? A. Werebrusow (Russie).

3270. [L¹21] Les systèmes formés par des coniques de l'espace en nombre $\infty^r$, où $r > 1$, ont été très peu étudiés. Quels sont les géomètres qui ont étudié de tels systèmes et où leurs travaux ont-ils été publiés [1].

L. Godeaux (Mons, Belgique).

3271. [K22d] L'intersection de la surface d'intrados d'une voûte avec le plan de tête vertical éclairé par les rayons du Soleil porte ombre sur cette surface. La courbe d'ombre portée, qui sépare sur l'intrados la partie éclairée de celle qui est dans l'ombre, rencontre en un point A la courbe de tête du pont : comment détermine-t-on la tangente en A à cette courbe d'ombre? Paulmier.

---

[1] Voici les renseignements que je possède. Des congruences de coniques ont été étudiées par :

Montesano. — Su di un sistema lineare di coniche nello spazio (*At. di Torino,* t. XXVII, 1891-1892).

Pieri. — Sopra alcune congruenze di coniche (*At. di Torino,* t. XXVIII, 1892-1893).

Montesano. — Si i vari tripi di congruenze lineari di coniche dell spazio (*Rend. di Napoli,* 1895).

M. Stuyvaert. — Sur les plans qui coupent en des points d'une conique un système de lignes de l'espace (*Mémoires* in-8 de Bruxelles, 1902).

M. Stuyvaert. — Sur quelques surfaces algébriques (Gand, Hoste, 1902).

J. de Vries. — The congruence of the conics situated in the cubic surfaces of a pencil (*Proceedings, Amsterdam,* 1904).

J. de Vries. — A congruence of order two and class two formed by conics (*Proc., Amsterdam,* 1904).

Il existe une étude sur les complexes de coniques :

Humbert. — Sur un complexe de coniques et sur la surface du troisième ordre (*J. de l'École Pol.,* t. XIV, 1894).

**3272.** [**M**[1]] Je demande aux correspondants des renseignements sur les courbes suivantes (voir *I. M.*, 1897, p. 103) :

Aroïde, cercle d'Ulloa, chaîne cinématique, conchale, conchospirale, courbe baritrope, courbe de mortalité (Duvillard ?), courbe de Pappus (spirale?), courbe ponctuelle, courbe satellite, crémonienne, criticoïde, focoïde, isobathe, méloïde, néoïde, néphroïde, ophiuride, ridge-line, rotoïde, stéroïde, vésicoïde. C. Wargny (Valparaiso).

**3273.** [**K22b**] Peut-on déterminer, en Géométrie descriptive, à l'aide de droites et de cercles seulement, le point d'intersection d'une droite AB et du paraboloïde hyperbolique lieu des droites horizontales qui s'appuient sur deux autres droites CD et EF non situées dans le même plan ?

Paulmier.

**3274.** [**I 19**] Quel nombre entier faut-il substituer à $x$, pour que l'équation suivante se change en une identité absolue ?

$$\begin{aligned}[1+(x-m)]^2+2[2+(x-m)]^2+3[3+(x-m)]^2 \\ +4[4+(x-m)]^2+\ldots+(n-1)[(n-1)+(x-m)]^2 \\ =\frac{n(n+1)[n(3n-1)-2]}{12}.\end{aligned}$$

Mehmed Nadir (Alep, Syrie).

**3275.** [**R9d** et **T3**] Je demande à l'amabilité des lecteurs de l'*Intermédiaire* de me renseigner sur un fait que j'ai remarqué à l'aide de la photographie instantanée, que la partie supérieure des roues d'une automobile (marchant à grande vitesse) se mouvait plus vite que leur partie inférieure; ainsi les rayons étant distinctement visibles dans la partie inférieure se confondaient dans la partie supérieure. J'en conclus que chaque point de la partie supérieure est animé d'une vitesse plus grande que celle des points de la

partie inférieure; la forme circulaire de la roue serait donc altérée. N'y a-t-il pas une autre explication du phénomène?

GEORGES HITROVO (Russie).

3276. [O5a] Si l'on fait tourner une demi-ellipse E, autour d'un quelconque de ses diamètres D, le solide pointu résultant a le même volume qu'un ellipsoïde de révolution dont l'axe majeur de révolution est égal au diamètre D, et dont l'axe mineur est égal à la projection orthogonale du diamètre D' conjugué en E de D, sur une perpendiculaire à D.

S. DE LA CAMPA. (Barcelone).

3277. [L¹9d] Diviser en deux parties égales l'arc d'ellipse (égal à la moitié de son contour) compris entre les extrémités d'un diamètre. S. DE LA CAMPA (Barcelone).

3278. [L¹10d] Je trouve que :

1° La courbe lieu du point du plan d'une parabole à égale distance de la parabole et de son sommet est la même que celle du lieu du point dont les trois normales issues de ce point et la parallèle à l'axe menée par ce point forment un faisceau harmonique;

2° La courbe lieu du point du plan d'une parabole à égale distance de la parabole et de son foyer est la même que celle du lieu du point tel que l'une des normales abaissées de ce point sur la parabole soit bissectrice des deux autres.

En résulte-t-il, ce que je crois, que :

1° Si un point M du plan d'une parabole est à égale distance de la parabole et de son sommet, les trois normales issues de ce point et la parallèle à l'axe menée par M forment un faisceau harmonique?

2° Si un point M du plan d'une parabole est à égale distance de la parabole et de son foyer, l'une des normales issues de M est bissectrice des deux autres?

E.-N. BARISIEN.

# RÉPONSES.

3163. (**1907**, 29) (E.-N. Barisien). — *Lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère.* (**1907**, 143). — 1° Si M est le milieu de la diagonale AC du quadrilatère ABCD circonscrit au cercle O, les triangles BMO et DMO sont équivalents, ce dont il est facile de s'assurer en les évaluant par décomposition. Donc MO passe par le milieu N de la seconde diagonale (L. Anne, *Nouvelles Annales*, 1842).

2° Catalan rapporte une autre démonstration donnée par Newton, (*Principes mathématiques*, Livre I, Lemme 25, Corollaire 3).

Dans cette dernière, si EF est la perpendiculaire menée par le centre O du cercle à la bissectrice de l'angle des côtés AB, CD du quadrilatère circonscrit, on a

$$EA \times DF = EB \times CF = \overline{OE}^2.$$

Les points E, F partagent donc AB et CD en segments réciproquement proportionnels, et le milieu de EF, c'est-à-dire O, se trouve sur MN.

3° Par projection, la proposition se trouve alors démontrée pour une conique quelconque. P. Barbarin.

3168. (**1907**, 49) (E.-N. Barisien) — *Distances* KI, KI′, KI″, KI‴. (**1907**, 190). — La distance de deux points dont les coordonnées barycentriques sont : $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ est donnée par la formule

$$\delta^2 = \frac{\sum a^2(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2 - \sum(c^2+b^2-a^2)(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')(\alpha\beta'-\beta\alpha')}{\left(\sum\alpha\sum\alpha'\right)^2}$$

[*voir* notre Note : *Géométrie du triangle, angles et distances* (*J. E.*, 1889, p. 75)]. Il suffit donc, dans la formule précédente, de

faire successivement

$$\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2}, \qquad \frac{\alpha'}{a} = \frac{\beta'}{b} = \frac{\gamma'}{c},$$

$$\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2}, \qquad \frac{\alpha'}{-a} = \frac{\beta'}{b} = \frac{\gamma'}{c},$$

$$\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2}, \qquad \frac{\alpha'}{a} = \frac{\beta'}{-b} = \frac{\gamma'}{c},$$

$$\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2}, \qquad \frac{\alpha'}{a} = \frac{\beta'}{b} = \frac{\gamma'}{-c},$$

pour obtenir, en fonction des côtés $a$, $b$, $c$ du triangle de référence, les quatre distances indiquées. A. Boutin.

3169. (1907, 50) (E.-N. Barisien). — *Système d'équations indéterminées.* — Une solution en nombres entiers du système d'équations

$$(1) \qquad x + y + z = u + v + w,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

est fournie par les formules assez générales

$$\begin{cases} x = a, & u = a + b, \\ y = a + 2b + c, & v = a + c, \\ z = a + b + 2c, & w = a + 2b + 2c, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = a' + b' + c', & u = a' - b' - c', \\ y = a' - b', & v = a' + b', \\ z = a' - c', & w = a' + c', \end{cases}$$

$a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$ étant arbitraires.

Voici quelques résultats simples :

$$0^2 + 3^2 + 3^2 = 1^2 + 1^2 + 4^2,$$

$$1^2 + 4^2 + 4^2 = 2^2 + 2^2 + 5^2,$$

$$1^2 + 5^2 + 6^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2.$$

Pour $a = 7$, $b = 2$, $c = 7$, on a la solution de M. E.-N. Barisien.

E. Grigorief (Kazan, Russie).

L'identité

$$l^2 + (l - m - an)^2 + [l + (a - 1)m - n]^2$$
$$= (l - m - n)^2 + (l - an)^2 + [l + (a - 1)m]^2,$$

où $l$, $m$, $n$, $a$ sont des entiers quelconques, donne une infinité de solutions du système proposé.

L'exemple donné correspond au cas où

$$l = 18, \qquad m = 7, \qquad n = 2, \qquad a = 2.$$

MATHIEU.

Si nous désignons une solution par

$$(x, y, z) = (u, v, w),$$

on trouve aisément les solutions

$$(1, 4, 4) = (2, 2, 5), \qquad (1, 5, 6) = (2, 3, 7), \qquad \ldots.$$

On peut en trouver une infinité. [*Voir* Général FROLOV, *Égalités à deux degrés* (*S. M.*, t. XVII, 1889)]. A. BOUTIN.

Une solution immédiate est donnée par les nombres, tous différents,

$$x = a, \qquad y = 2a + 4, \qquad z = 3a + 2,$$
$$u = a + 2, \qquad v = 2a, \qquad w = 3a + 4.$$

On remarquera que les solutions des équations (1) et (2) vérifient aussi l'équation

$$(3) \qquad xy + xz + yz = uv + uw + vw.$$

En réalité, la question n'est pas nouvelle, car F. Proth [*Sur quelques identités* (*N. C.*, 1878, p. 377-378)] a indiqué, pour la solution des équations (1), (2), (3), les formules symétriques

$$x = a^2 + b^2 + ab,$$
$$y = c^2 + d^2 + cd,$$
$$z = (a + c)^2 + (b + d)^2 + (a + c)(b + d),$$
$$u = a^2 + c^2 + ac,$$
$$v = b^2 + d^2 + bd,$$
$$w = (a + b)^2 + (c + d)^2 + (a + b)(c + d).$$

*Notes.* — I. Les nombres de l'énoncé (sauf 7) ne rentrent pas dans le type $(e+f)^2 - ef$ de F. Proth. Les formules de celui-ci ne donnent donc pas toutes les solutions. En particulier, elles ne peuvent convenir à la question **2844** (**1904**, 261) qui pourtant s'en rapproche beaucoup.

II. Comparer aussi S. Realis (*N. A.*, 1879, p. 504-506).

H. Brocard.

Autres réponses de MM. Gleizes et Plakhowo, communiquées à M. Barisien.

Soit

$$y = x + \alpha, \qquad z = x + \beta, \qquad v = u + \alpha', \qquad w = u + \beta'.$$

On trouve :

$$x = \text{arbitr.}, \qquad u = x + \tfrac{1}{3}(\alpha + \beta - \alpha' - \beta'),$$
$$\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha, -\beta) = (\alpha', -\beta') = \text{arbitr.}$$

A. Werebrusow (Russie).

$a$ étant un entier positif arbitraire, on a la solution

$$x = a, \qquad y = a + 11, \qquad z = a + 16,$$
$$u = a + 2, \qquad v = a + 7, \qquad w = a + 18.$$

Mehmed Nadir (Alep).

*Extrait d'une réponse étendue de* M. L. Dujardin, communiquée à M. Barisien :

Si l'on pose

$$(x - u)(x - v) = \lambda\mu,$$

$u$, $v$, $x$ étant arbitraires, on a la solution

$$y = u + v - x + \lambda, \qquad z = u + v - x + \mu,$$
$$w = u + v - z + \lambda + \mu.$$

On peut aussi se donner $u$, $v$, $w$ et, par une autre méthode, ob-

tenir $x, y, z$; ainsi

| $u.$ | $v.$ | $w.$ | $x.$ | $y.$ | $z.$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 25 | 47 | 5 | 37 | 39 |
| | | | 7 | 29 | 45 |
| | | | 15 | 17 | 49 |

Incidemment, on résout ce problème : *Trouver trois triangulaires dont la somme égale trois autres triangulaires donnés.*

L. Dujardin.

Voici une formule simple, parmi des infinités d'autres :

$$x = f + 1, \qquad u = f + g + 2,$$
$$y = 2g + f + 2, \qquad v = f,$$
$$z = f + g, \qquad w = 2g + f + 1.$$

*Exemple.* — Soit $f = 1$, $g = 3$; on aura

$$x = 2, \quad y = 7, \quad z = 3, \quad u = 5, \quad v = 1, \quad w = 6.$$

A. Gérardin.

3171. (1907, 50) (E.-N. Barisien). — *Nombres de combinaisons de trois boules dont la somme des numéros est inférieure à $n'$.* — D'après les données numériques terminant l'énoncé de la question 3171, l'auteur paraît avoir eu en vue un problème de probabilité plutôt que de simple analyse combinatoire; il est évident en effet que si $n$, aux termes de l'énoncé, est supérieur à $n' - 4$, aucun des numéros dépassant ce dernier chiffre n'entre en jeu pour la solution du problème d'analyse combinatoire qui en fait ne dépend que de $n'$.

La solution générale de la question 3171 serait complexe, car il faudrait distinguer au préalable entre les valeurs de $n$ supérieures ou inférieures à $n' - 4$; entre les valeurs paires ou impaires et sans doute tenir compte du degré de divisibilité de $n$ et $n'$ par 3. Mais, en se bornant aux indications de l'énoncé (c'est-à-dire $n' < n$; $n'$ pair et multiple de 3 moins 1), on compte facilement le nombre des combinaisons favorables.

Énumérons les combinaisons en commençant par le chiffre inférieur associé à d'autres progressivement croissants :

1° *Combinaisons commençant par* 1 :

En associant 1 avec 2, on peut prendre comme troisième chiffre tous les nombres compris entre 3 et $n'-4$. Soit au total $n'-6$ combinaisons.

| | | | Total des combinaisons. |
|---|---|---|---|
| 1 avec 2 | 3ᵉ chiffre varie de | 3 à $n'-4$ | $n'-6$ |
| 1 » 3 | » » | 4 à $n'-5$ | $n'-8$ |
| 1 » 4 | » » | 5 à $n'-6$ | $n'-10$ |
| ........ | ........................... | | ....... |
| 1 » $h$ | » » | $h+1$ à $n'-h-2$ | $n'-2(h+1)$ |

La combinaison 1 avec $h$ sera la dernière à considérer si $h+1$ et $n'-h-2$ diffèrent de 0 ou de 1, suivant le degré de parité; si, en d'autres termes, le total $n'-2(h+1)$ a pour valeur 1 ou 2.

Pour $n'$ impair, on a

$$n'-2(h+1)=1 \qquad \text{ou} \qquad h=\frac{n'-3}{2}.$$

Pour $n'$ pair, on a

$$n'-2(h+1)=2 \qquad \text{ou} \qquad h=\frac{n'}{2}-2.$$

Nous avons considéré $h-1$ associations de 1 avec un autre chiffre; la somme totale des combinaisons ainsi formées sera

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= (h-1)n'-[6+8+10+\ldots+2(h+1)]\\ &= (h-1)(n'-h-4).\end{aligned}$$

Supposons $n'$ pair et, par suite, $h=\frac{n'}{2}-2$, on aura

$$\Sigma_1=\left(\frac{n'}{2}-3\right)\left(\frac{n'}{2}-2\right).$$

2° *Combinaisons commençant par* 2 :

| | | | Total des combinaisons. |
|---|---|---|---|
| 2 avec 3 | 3ᵉ chiffre varie de | 4 à $n'-6$ | $n'-9$ |
| 2 » 4 | » » | 5 à $n'-7$ | $n'-11$ |
| 2 » 5 | » » | 6 à $n'-8$ | $n'-13$ |
| ........ | ........................... | | ....... |
| 2 » $f$ | » » | $f+1$ à $n'-f-3$ | $n'-2f-3$ |

La combinaison 2 avec $f$ est la dernière si, dans le cas de $n'$ pair, on a

$$f+1 = n'-f-3; \qquad \text{d'où} \qquad f = \frac{n'}{2} - 2,$$

et, dans ce cas, la dernière somme $n'-2f-3$ est égale à 1. Le nombre total des combinaisons pour les $f-2$ classes considérées sera

$$\Sigma_2 = (f-2)(n'-f-6) = \left(\frac{n'}{2} - 4\right)^2.$$

3° *Combinaisons commençant par* 3 :

| | | Total des combinaisons. |
|---|---|---|
| 3 avec 4 | 3ᵉ chiffre varie de 5 à $n'-8$ | $n'-12$ |
| 3 » 5 | » » 6 à $n'-9$ | $n'-14$ |
| ........ | ........................... | ....... |
| 3 » $e$ | » » $e+1$ à $n'-e-4$ | $n'-2e-4$ |

La combinaison 3 avec $e$ sera la dernière si, $n'$ étant pair, $n'-2e-4$ a pour valeur 2. D'où $e = \frac{n'}{2} - 3$ et, dans ces conditions, on a

$$\Sigma_3 = (e-3)(n'-e-8) = \left(\frac{n'}{2} - 6\right)\left(\frac{n'}{2} - 5\right).$$

4° *Combinaisons commençant par* 4 :

| | | Total des combinaisons. |
|---|---|---|
| 4 avec 5 | 3ᵉ chiffre varie de 6 à $n'-10$ | $n'-15$ |
| 4 » 6 | » » 7 à $n'-9$ | $n'-17$ |
| ........ | ........................... | ....... |
| 4 » $d$ | » » $d+1$ à $n'-d-5$ | $n'-2d-5$ |

d'où

$$\Sigma_4 = (d-4)(n'-d-10).$$

La dernière somme partielle est égale à 1, d'où $d = \frac{n'}{2} - 3$ et, par suite,

$$\Sigma_4 = \left(\frac{n'}{2} - 7\right)^2.$$

En continuant cette énumération, on verrait sans peine que les sommes impaires et paires se suivent en formant deux progressions séparées dont les lois sont simples : $x$ désignant un nombre impair,

$y$ un nombre pair, on a

$$\Sigma_1 = \left(\frac{n'}{2} - 3\right)\left(\frac{n'}{2} - 2\right), \qquad \Sigma_2 = \left(\frac{n'}{2} - 4\right)^2,$$

$$\Sigma_3 = \left(\frac{n'}{2} - 6\right)\left(\frac{n'}{2} - 5\right), \qquad \Sigma_4 = \left(\frac{n'}{2} - 7\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \qquad \Sigma_y = \left(\frac{n'}{2} - \frac{3y}{2} - 1\right)^2,$$

$$\Sigma_x = \left[\frac{n'}{2} - \frac{3}{2}(x+1)\right]\left(\frac{n'}{2} - \frac{3x+1}{2}\right).$$

Les deux facteurs composant $\Sigma_x$ sont de parité différente, le produit est toujours pair; la plus petite valeur de $\Sigma_x$ serait donc 2, ce qui entraînerait les égalités

$$\frac{n'}{2} - \frac{3}{2}(x+1) = 1, \qquad \frac{n'}{2} - \frac{3x+1}{2} = 2;$$

d'où

$$x = \frac{n'-5}{3}.$$

$x$ est un nombre entier quand on suppose $n' = 50$ ou, en général, quand $n'$ est un multiple de 3, moins 1.

Dans les mêmes conditions, le minimum de $\Sigma_y$ est 9 et l'on a $y = \frac{n'-8}{3}$; $y$ aura une valeur inférieure d'une unité à celle de $x$.

Il reste à sommer séparément les $\Sigma$ d'indice impair et les $\Sigma$ d'indice pair :

1° $\Sigma_1 + \Sigma_3 + \ldots + \Sigma_x$

$$= \left(\frac{n'}{2} - 3\right)\left(\frac{n'}{2} - 2\right) + \left(\frac{n'}{2} - 6\right)\left(\frac{n'}{2} - 5\right) + \ldots + \left(\frac{n'}{2} - \frac{n'-2}{2}\right)\left(\frac{n'}{2} - \frac{n'-4}{2}\right).$$

On démontre sans difficulté que cette somme partielle a pour expression

$$\frac{(n'-2)(n'^2-4n'-8)}{72}.$$

2° $\Sigma_2 + \Sigma_4 + \ldots + \Sigma_y$

$$= \left(\frac{n'}{2} - 4\right)^2 + \left(\frac{n'}{2} - 7\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n'}{2} - \frac{n'-6}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(n'-2)(n'-5)(n'-8)}{72}.$$

En réunissant les termes impairs et pairs, on trouvera pour la somme totale cherchée l'expression suivante :

$$N = \frac{n'-2}{72}(2n'^2 - 17n' + 32),$$

applicable à tous les cas pour lesquels $n'$ est un nombre pair, multiple de 3, moins 1. Dans ces conditions, on obtient les valeurs numériques suivantes :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n'$.... | 8 | 14 | 20 | 26 | 32 | 38 | 44 | 50 | 56 | 62 |
| N.... | 2 | 31 | 123 | 314 | 640 | 1137 | 1841 | 2788 | 4014 | 5555 |

*Note complémentaire.* — A cette solution particulière on peut en joindre cinq autres de manière à comprendre tous les cas possibles; suivant que $n'$ sera un nombre pair ou impair, multiple de 3 ou non, on obtiendra une série de six formules différentes qu'il y a intérêt à classer d'après l'ordre numérique des plus petites valeurs de $n'$ convenant à chaque cas. La plus petite de toutes celles-ci est évidemment 7, correspondant à la somme des trois premiers numéros : $1 + 2 + 3 = 6$.

| $n'$. | Expression de N. | Minimum de N. |
|---|---|---|
| 7 | $\frac{n'-1}{72}(2n'^2 - 19n' + 47)$ | 1 |
| 8 | $\frac{n'-2}{72}(2n'^2 - 17n' + 32)$ | 2 |
| 9 | $\frac{n'-3}{72}(2n'^2 - 15n' + 21)$ | 4 |
| 10 | $\frac{n'-4}{72}(2n'^2 - 13n' + 14)$ | 7 |
| 11 | $\frac{n'-5}{72}(2n'^2 - 11n' + 11)$ | 11 |
| 12 | $\frac{n'-6}{72}(2n'^2 - 9n' + 12)$ | 16 |

On voit immédiatement comment se succèdent les coefficients des expressions de N et l'on vérifie sans peine que les valeurs numériques de N présentent une différence seconde constante. Mais il y a discontinuité à la fin de chaque série de six valeurs pour passer à la suivante; il ne peut en être autrement, car, si l'on fait varier $n'$ par

intervalles de six unités, la fonction du troisième degré doit présenter une différence seconde variable, la constance ne se retrouvant qu'à la différence troisième.

Il y a, du reste, une règle très simple pour la formation successive de toutes les valeurs de N : on ajoutera une unité à la septième valeur obtenue en considérant la différence seconde comme constante et l'on obtiendra ainsi la première valeur de la série suivante; on ajoutera la différence seconde augmentée d'une unité à la sixième différence première et ce sera la valeur de $\Delta u_0$ pour la série suivante; enfin on augmentera d'une unité la différence seconde.

Voici, comme application, le calcul des premières valeurs de N.

| $n'$. | N. | Δ. | $\Delta^2$. | $n'$. | N. | Δ. | $\Delta^2$. | $n'$. | N. | Δ. | $\Delta^2$. | $n'$. | N. | Δ. | $\Delta^2$. | $n'$. | N. | Δ. | $\Delta^2$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 1 | 1 | 13 | 23 | 8 | 2 | 19 | 102 | 21 | 3 | 25 | 274 | 40 | 4 | 31 | 575 | 65 | 5 |
| 8 | 2 | 2 | 1 | 14 | 31 | 10 | 2 | 20 | 123 | 24 | 3 | 26 | 314 | 44 | 4 | 32 | 640 | 70 | 5 |
| 9 | 4 | 3 | 1 | 15 | 41 | 12 | 2 | 21 | 147 | 27 | 3 | 27 | 358 | 48 | 4 | 33 | 710 | 75 | 5 |
| 10 | 7 | 4 | 1 | 16 | 53 | 14 | 2 | 22 | 174 | 30 | 3 | 28 | 406 | 52 | 4 | 34 | 785 | 80 | 5 |
| 11 | 11 | 5 | 1 | 17 | 67 | 16 | 2 | 23 | 204 | 33 | 3 | 29 | 458 | 56 | 4 | 35 | 865 | 85 | |
| 12 | 16 | 6 | | 18 | 83 | 18 | | 24 | 237 | 36 | | 30 | 514 | 60 | | 36 | 950 | | |
| | 22 | | | | 101 | | | | 273 | | | | 574 | | | | | | |

Pour achever la solution du problème, il resterait à examiner le cas de $n < n' - 4$. A défaut de formule générale, on peut signaler deux cas simples :

1° Si la valeur de $n$ est plus faible que celle de $\frac{n'+2}{3}$, le nombre des combinaisons cherché est celui de $n$ numéros 3 à 3. La somme la plus considérable que l'on puisse obtenir est en effet

$$n - 2 + n - 1 + n \quad \text{ou} \quad 3n - 3$$

et la condition à réaliser est

$$3n - 3 \overline{\gtrless} n' - 1$$

ou

$$n \overline{\gtrless} \frac{n'+2}{3}.$$

Toutes les combinaisons possibles de $n$ nombres 3 à 3 sont favorables.

2° Si la valeur de $n$ est supérieure à $\frac{n'-1}{2}$, on peut trouver simplement le nombre des combinaisons favorables. Il suffit de retrancher du nombre N précédemment calculé une correction dont l'expression sera différente suivant le degré de $n$ et $n'$.

Désignons par $\alpha$ la différence impaire $n' - 4 - n$, le chiffre à retrancher de N sera donné par la formule

$$\frac{(\alpha+1)(\alpha+3)(2\alpha+1)}{24}.$$

Si $\beta$ est une différence paire $n' - 4 - n$, la correction sera

$$\frac{\beta(\beta+2)(2\beta+5)}{24}.$$

Ph. Hatt.

Autre réponse de M. G. Quijano (Xérès) qui traite en détail par les mêmes procédés le cas $n = 100$, $n' = 50$ et trouve aussi pour le nombre de *combinaisons* demandé 2788, en indiquant que la méthode suivie s'étend au cas général. M. Quijano ajoute, sans démonstration, que, si l'on remet la boule dans l'urne après chaque extraction, le nombre des *arrangements* possibles est $\frac{(n'-3)(n'-2)(n'-1)}{6}$.

La Rédaction.

Autres réponses de MM. Dujardin, Gleizes, Mathieu, communiquées à M. Barisien.

Pour l'évaluation de la probabilité demandée, le nombre des cas possibles étant donné par une formule simple, il ne s'agit que d'évaluer le nombre des cas favorables dans les conditions de l'énoncé.

Or Euler (*Introductio ad Analysin Infinitorum*) a remarqué qu'en posant

$$\begin{aligned} f(z) &= (1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)\ldots(1-x^nz) \\ &= 1 - P_1z + P_2z^2 - \ldots + (-1)^m P_m z^m + \ldots, \end{aligned}$$

le coefficient $P_m$ de $(-z)^m$ est une fonction entière de $x$ de la forme $\Sigma\varpi_N x^N$, où $\varpi_N$ est le nombre des partitions de N en $m$ nombres inégaux et ne surpassant pas $n$. La définition de la fonction $f(z)$ permet de conclure aisément à une autre forme de $P_m$ qui est

$$P_m = x^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})(1-x^{n-2})\ldots(1-x^{n-m+1})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^m)},$$

et, particulièrement pour $m = 3$,

$$P_3 = x^6 \frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})(1-x^{n-2})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}.$$

Si le nombre $n$ grandit indéfiniment, ou tout au moins est suffi-

samment grand relativement au nombre N (c'est le cas pour l'application numérique prévue dans la question 3171), on peut faire simplement

$$P_3 = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},$$

en supposant le module de $x$ (qui ne sert d'ailleurs que de porte-exposants) inférieur à 1. Il faut alors effectuer le produit des séries

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots,$$
$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots,$$
$$1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \ldots$$

et augmenter les exposants de 6. Le produit des deux premières est

$$1 + x + 2(x^2 + x^3) + 3(x^4 + x^5) + 4(x^6 + x^7) + \ldots,$$

et la multiplication par $1 + x^3 + x^6 + \ldots$ donne

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6$$
$$+ 7x^7 + 10x^8 + 12x^9 + 14x^{10} + \ldots :$$

par conséquent, 6 et 7 ne sont partageables que d'une seule manière en trois nombres inégaux; 8 l'est de deux manières; 9, de trois, etc. Mais, dans l'ordre d'idées où l'on doit se placer ici, il faut supposer $N = 6, 7, 8, \ldots, 49$, et faire la somme des résultats, c'est-à-dire la somme des coefficients des premiers termes de la dernière série écrite jusqu'à celui d'exposant $49 - 6 = 43$. Or, d'après la manière même dont cette série a été obtenue, le total se compose des sommes partielles

$$2(1 + 2 + 3 + \ldots + 21 + 22) = 22.23,$$
$$2(1 + 2 + 3 + \ldots + 19 + 20) + 21 = \overline{21}^2,$$
$$2(1 + 2 + 3 + \ldots + 18 + 19) = 19.20,$$
$$2(1 + 2 + 3 + \ldots + 16 + 17) + 18 = \overline{18}^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

c'est-à-dire de la somme

$$3^2(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 7^2) = 1260,$$

augmentée de la somme

$$1.2 + 4.5 + 7.8 + \ldots + 19.20 + 22.23 = 1528;$$

le total est donc 2788 et la valeur de la probabilité cherchée s'obtient en divisant par $\frac{100.99.98}{6} = 161700$ : elle est ainsi, simplification faite, égale à

$$\frac{17.41}{3.5.7^2.11} = \frac{697}{40425} = 0,0172\ldots.$$

E. MALO.

3179. (1907, 52) (G. LEMAIRE). — La notion d'aire algébrique positive ou négative se présente trop naturellement dans la théorie des grandeurs dirigées pour qu'elle n'ait pas été rencontrée, invoquée ou formulée à diverses reprises, et de façon indépendante, par les fondateurs et vulgarisateurs de la Théorie des équipollences. Je ne serais donc pas éloigné d'en attribuer la paternité à G. Bellavitis, antérieurement à Grassmann.

D'après les Ouvrages et divers écrits de M. Laisant, je suis fondé à proposer la bibliographie sommaire que voici :

G. BELLAVITIS. — *Annales des Sc. du royaume lomb. vénit.*, t. IV, 1834, p. 256.

GRASSMANN. — Ausdehnungslehre, 1844.

R.-B. HAYWARD. — On a extension of the term Area to any closed circuit in space (*P. L. M. S.*, t. IV, 1873, p. 289-291).

C.-A. LAISANT. — Théorie et applications des équipollences (traduction de l'Ouvrage de G. Bellavitis, publié en 1854 (*N. A.*, 1873 et 1874; Ouvrage séparé, 1874 et nouv. éd. 1887).

G. PEANO. — Applicazioni geom. del calc. infin., Turin, 1887.

G. PEANO. — Sulla definizione dell' area d'una superficie (*R. R. Acc. dei Lincei*, 19 janv. 1890).

C.-A. LAISANT. — Aire d'une courbe gauche fermée (*A. F.*, Boulogne, 1899, p. 135-140). L'auteur a échangé quelques idées à ce sujet avec MM. P. Appell et F. Lucas.

M. FRÉCHET. — Sur une généralisation des notions d'aire et de plan (*N. A.*, 1904, p. 241-248).

G. VACCA. — Note bibliographique (*N. A.*, 1904, p. 361).

H. BROCARD.

D'après Max Simon (*Die Entwickelung der Elementargeometrie im* XIX *Jahrhundert*, p. 115), le premier qui a imaginé d'attribuer un signe aux aires, quand on parcourt le périmètre de la figure en laissant l'aire à gauche ou à droite, est Möbius.

Mais encore avant, Meister, le fondateur de la Société mathématique de Hambourg, et sur qui Baltzer a appelé l'attention, discernait déjà les parties positives et négatives des aires.

N. Plakhowo (Russie).

**3182.** (**1907**, 52) (G. de Santis). — *Invariants.* — Appliquons les transformations infinitésimales du groupe linéaire projectif de l'espace

$$(1)\quad \begin{cases} p = \dfrac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \dfrac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \dfrac{\partial f}{\partial z}, \\ xp, \quad yp, \quad zp, \quad xq, \quad yq, \quad zq, \quad xr, \quad yr, \quad zr \end{cases}$$

aux points de la surface

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v).$$

Si

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad f_2 = \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad f_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \qquad f_4 = \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v}, \qquad f_5 = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

et

$$p_s = \frac{\partial f}{\partial x_s}, \qquad q_s = \frac{\partial f}{\partial y_s}, \qquad r_s = \frac{\partial f}{\partial z_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, 5),$$

prolongeons les transformations (1) deux fois : en les égalant à zéro on a le système

$$\begin{array}{lll} \sum_1^5 x_s p_s = 0, & \sum_1^5 x_s q_s = 0, & \sum_1^5 x_s r_s = 0, \\ \sum_1^5 y_s p_s = 0, & \sum_1^5 y_s q_s = 0, & \sum_1^5 y_s r_s = 0, \\ \sum_1^5 z_s p_s = 0, & \sum_1^5 z_s q_s = 0, & \sum_1^5 z_s r_s = 0. \end{array}$$

Pour le rendre jacobien, résolvons-le par rapport à $p_h$, $q_h$, $r_h$ ($h = 1, 2, 3$). Soient

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

et $\Delta_{s4}$, $\Delta_{s5}$ ce que devient $\Delta$ lorsque, aux éléments de la colonne $s$,

on met respectivement $x_4, y_4, z_4, x_5, y_5, z_5$; en posant encore

$$a_{s4} = \frac{\Delta_{s4}}{\Delta}, \qquad a_{s5} = \frac{\Delta_{s5}}{\Delta},$$

on obtient

$$\begin{aligned} P_s(f) &= p_s + a_{s4}p_4 + a_{s5}p_5 = 0, \\ Q_s(f) &= q_s + a_{s4}q_4 + a_{s5}q_5 = 0, \\ R_s(f) &= r_s + a_{s4}r_4 + a_{s5}r_5 = 0 \\ &(s = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

En vertu des identités, bien faciles à vérifier,

$$\begin{aligned} x_1\Delta_{14} + x_2\Delta_{24} + x_3\Delta_{34} &= x_4\Delta, & x_1\Delta_{15} + x_2\Delta_{25} + x_3\Delta_{35} &= x_5\Delta, \\ y_1\Delta_{14} + y_2\Delta_{24} + y_3\Delta_{34} &= y_4\Delta, & y_1\Delta_{15} + y_2\Delta_{25} + y_3\Delta_{35} &= y_5\Delta, \\ z_1\Delta_{14} + z_2\Delta_{24} + z_3\Delta_{34} &= z_4\Delta, & z_1\Delta_{15} + z_2\Delta_{25} + z_3\Delta_{35} &= z_5\Delta, \end{aligned}$$

on a

$$P_s(a_{mn}) = Q_s(a_{mn}) = R_s(a_{mn}) = 0 \qquad (s, m = 1, 2, 3;\ n = 4, 5).$$

D'après cela les invariants demandés sont

$$a_{14}, \quad a_{15}, \quad a_{24}, \quad a_{25}, \quad a_{34}, \quad a_{35}.$$

En les exprimant par les coefficients E, F, G, D, D', D'' et les symboles de Christoffel de la surface donnée, on trouve

$$a_{14} = \frac{D'}{D}, \qquad a_{15} = \frac{D''}{D},$$

$$a_{24} = \frac{D\begin{Bmatrix}1 & 2\\ 2\end{Bmatrix} - D'\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 2\end{Bmatrix}}{D}, \qquad a_{25} = \frac{D\begin{Bmatrix}1 & 2\\ 1\end{Bmatrix} - D'\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 1\end{Bmatrix}}{D},$$

$$a_{34} = \frac{D\begin{Bmatrix}2 & 2\\ 2\end{Bmatrix} - D''\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 2\end{Bmatrix}}{D}, \qquad a_{35} = \frac{D\begin{Bmatrix}2 & 2\\ 1\end{Bmatrix} - D''\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 1\end{Bmatrix}}{D}.$$

U. Bini (Rome).

3183. (**1907**, 53) (G. de Santis). — *Équation indéterminée* (**1907**, 168, 192). — L'équation donnée est un cas particulier de l'équation plus générale

$$px^2 + mxy + qy^2 = z^2.$$

Cette dernière équation est résolue par les formules

$$x = p(f^3 - 3pqfg^2 - mpqg^3),$$
$$y = p^2 g[3f^2 + 3mfg + (m^2 - pq)g^2],$$
$$z = p(f^2 + mfg + pqg^2)$$

($f$ et $g$ arbitraires) (**1902**, 311).

*Voir* aussi :

A. Desboves. — Mémoire sur la résolution en nombres entiers de l'équation $aX^m + bY^m = cZ^n$ (*N. A.*, 1879, p. 269-270).

E. Grigorief (Russie, Kazan, Gymnase impérial).

Solutions évidentes :

$$x = y = z = u^3, \qquad t = u^2.$$

A. Gérardin.

3186. (**1907**, 53) (U. Bini). — *Bibliographie du quadrilatère de Poncelet.* — Profitant d'une obligeante indication de M. F. J. relative à la question 3072 (**1906**, 141; **1907**, 20, 92) je suis en mesure de rappeler que les propriétés des quadrilatères inscrits et circonscrits à deux cercles ont été traitées dans les études suivantes :

J.-B. Durrande (*A. G.*, t. XV, 1824-1825, p. 133-145).

Poncelet. — Traité des propriétés projectives des figures, 2e édition, 1865, et Applications d'Analyse et de Géométrie, 1862, t. I.

Terrats. — (*N. A.*, quest. 1027, 1871, p. 456).

Wolstenholme. — (*P. L. M. S.*, t. VIII, 1876-1877, p. 136-139).

R. Malloizel. — (*J. E.*, 1879, p. 365-369).

G. Leudesdorf. — (*N. A.*, quest. 1334, 1879, p. 479; 1880, p. 470).

Déprez. — (*M.*, quest. 608, 1888, p. 237).

Gino Loria. — I poligoni di Poncelet, 1889.

Gino Loria. — Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet (*B. M.*, 1889).

M. Lelieuvre. — Sur les polygones de Poncelet (*E. M.*, 1900, p. 410).

*I. M.*, **1901**, 56, rép. 1999.

G. Pesci. — (*R. T. M.*, 1905, p. 192).

*I. M.*, **1906** et **1907**, quest. et rép. 3072.

H. Brocard.

Dans le *Bulletin scientifique*, rédigé par M. E. Lebon, 4e année,

n° 9, 20 juin 1890, p. 291, on trouve la solution du problème suivant :

*Inscrire un quadrilatère à un cercle donné, sachant que le quadrilatère cherché est circonscriptible à un cercle et connaissant une de ses diagonales et leur angle.*

*Un correspondant.*

Autre réponse de M. Plakhowo, communiquée à M. Bini.

**3188.** (**1907**, 75) (Bayle). — *Équation différentielle.* — L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(b-ax^2)y=c \tag{1}$$

peut s'intégrer au moyen d'une transformation analogue à celle de Laplace.

Soit

$$y=\int_\alpha^\beta \mathrm{T}e^{tx^2}\,dt, \tag{2}$$

T étant une fonction indéterminée de $t$, $\alpha$ et $\beta$ des constantes arbitraires.

Nous aurons

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}=4\displaystyle\int_\alpha^\beta x^2t^2\mathrm{T}e^{tx^2}dt+2\int_\alpha^\beta t\mathrm{T}e^{tx^2}dt \\ \quad =4\displaystyle\int_\alpha^\beta t^2\mathrm{T}\,\frac{\partial(e^{tx^2})}{\partial t}\,dt+2\int_\alpha^\beta t\mathrm{T}e^{tx^2}dt \\ \quad =4\,[t^2\mathrm{T}e^{tx^2}]_\alpha^\beta-4\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{\partial(t^2\mathrm{T})}{\partial t}e^{tx^2}dt+2\int_\alpha^\beta t\mathrm{T}e^{tx^2}dt, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} x^2y=\displaystyle\int_\alpha^\beta x^2\mathrm{T}e^{tx^2}dt=\int_\alpha^\beta \mathrm{T}\,\frac{\partial(e^{tx^2})}{\partial t}\,dt \\ \quad =[\mathrm{T}e^{tx^2}]_\alpha^\beta-\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}e^{tx^2}dt, \end{cases}$$

d'où

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+(b-ax^2)y=\displaystyle\int_\alpha^\beta e^{tx^2}\left[(a-4t^2)\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}+(b-6t)\mathrm{T}\right]dt \\ \quad +4\,[t^2\mathrm{T}e^{tx^2}]_\alpha^\beta-a\,[\mathrm{T}e^{tx^2}]_\alpha^\beta. \end{cases}$$

Nous poserons donc

$$(6)\qquad (4t^2 - a)\frac{\partial T}{\partial t} + (6t - b)T = 0$$

et

$$(7)\qquad 4(t^2 T e^{tx^2})_\alpha^\beta - a(T e^{tx^2})_\alpha^\beta = c.$$

L'équation (6) a pour intégrale

$$(8)\qquad KT = \frac{(2t - \sqrt{a})^{A'}}{(2t + \sqrt{a})^{B'}}$$

avec

$$(9)\qquad \begin{cases} A' = \dfrac{b - 3\sqrt{a}}{4\sqrt{a}}, & A' + 1 = \dfrac{b + \sqrt{a}}{4\sqrt{a}} = A, \\[2ex] B' = \dfrac{b + 3\sqrt{a}}{4\sqrt{a}}, & B' - 1 = \dfrac{b - \sqrt{a}}{4\sqrt{a}} = B, \end{cases}$$

et l'équation (7) nous donne

$$(10)\quad K = \frac{1}{C}\left[\frac{(2\beta - \sqrt{a})^{A'}}{(2\beta + \sqrt{a})^{B'}}(4\beta^2 - a)e^{\beta x^2} - \frac{(2\alpha - \sqrt{a})^{A'}}{(2\beta + \sqrt{a})^{B'}}(4\alpha^2 - a)e^{\alpha x^2}\right],$$

d'où enfin la solution cherchée

$$(11)\quad y = \frac{1}{C}\left[\frac{(2\beta - \sqrt{a})^{A}}{(2\beta + \sqrt{a})^{B}}e^{\beta x^2} - \frac{(2\alpha - \sqrt{a})^{A}}{(2\alpha + \sqrt{a})^{B}}e^{\alpha x^2}\right]\int_\alpha^\beta \frac{(2t - \sqrt{a})^{A-1}}{(2t + \sqrt{a})^{B+1}}e^{tx^2}\,dt,$$

$$(9)\qquad A = \frac{b + \sqrt{a}}{4\sqrt{a}}, \qquad B = \frac{b - \sqrt{a}}{4\sqrt{a}},$$

$\alpha$ et $\beta$ = constantes arbitraires.

P. Hendlé.

Autres réponses de MM. W. Kapteyn, Brocard et Maillet, qui paraîtront dans le numéro d'octobre.

# QUESTIONS.

3279. [C et H] Dans beaucoup de raisonnements d'Analyse intervient la condition bien connue de Lipschitz. Or, il est souvent possible de la remplacer par des conditions plus favorables. Les exemples suivants le font voir :

1° M. Goursat (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1903, p. 184-192) a étudié l'existence des fonctions implicites définies par l'équation $F(x, y) = 0$. Son raisonnement subsiste, pourvu qu'on ait

$$(1) \qquad \varphi(x) < \frac{F(x, y') - F(x, y'')}{y' - y''} < \psi(x),$$

où $\varphi(x)$, $\psi(x)$ peuvent devenir infinies au voisinage de $x = 0$.

2° M. Lalesco (*Bull. des Sciences math.*, mars 1907, p. 77-79) complète un théorème connu sur la dérivée du potentiel logarithmique de simple couche. L'inégalité (2) de son article peut être remplacée par la suivante :

$$(2) \qquad |\mu(s) - \mu(s_0)| < \frac{a}{\log \frac{1}{|s - s_0|} \cdots \left(\log_k \frac{1}{|s - s_0|}\right)^{1+\varepsilon}}$$
$$(a > 0, \ \varepsilon > 0).$$

3° On peut prouver l'existence d'une intégrale unique de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (*voir* Picard, *Traité d'Analyse*, 2e édit., t. II, p. 322), pourvu qu'on ait

$$(3) \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| < \frac{A|y_1 - y_2|}{|x|^m} \log \frac{1}{|y_1 - y_2|} \cdots \log_k \frac{1}{|y_1 - y_2|}$$
$$(0 < m < 1, \ A > 0).$$

Il y aurait donc intérêt à indiquer d'autres raisonnements, où intervient cette condition, et qu'on pourrait préciser d'une façon semblable.

ALFRED ROSENBLATT (Cracovie).

**3280.** [Σ] Soit $\varphi(x)$ une fonction de $x$ :

$$\varphi[\varphi(x)] = \varphi_2(x), \qquad \varphi[\varphi_2(x)] = \varphi_3(x), \qquad \ldots.$$

Trouver une fonction réelle $\varphi(x)$ qui, *pour $x$ réel,* soit toujours croissante et telle que

$$\varphi_n(x) = e_k(x),$$

où

$$e_1(x) = e^x, \qquad e_2(x) = e^{e_1(x)}, \qquad \ldots,$$

$$e_0(x) = x, \quad e_{-1}(x) = \operatorname{log\,nép.} x, \quad e_{-2}(x) = \log\log x = \log_2 x, \quad \ldots$$

($x$ réel et positif quand $k < 0$).

On peut évidemment se poser le problème pour d'autres fonctions que $e_k(x)$. C'est là une question d'itération : consulter **3181** (**1907**, 52, et Suppl. juillet, p. x, octobre, p. XIII).

E. MAILLET.

**3281.** [**H12a**] Quelle est la forme la plus générale des séries pour lesquelles le premier terme de chaque suite des différences d'ordre impair des termes de la série est nul? Cela est vrai pour la série

$$1, \quad 1, \quad \frac{a+2}{a+1}, \quad \frac{(a+2)(a+4)}{(a+1)(a+2)}, \quad \frac{(a+2)(a+4)(a+6)}{(a+1)(a+2)(a+3)}, \quad \ldots.$$

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

**3282.** [**O2c$\delta$**] En projetant un segment de droite sur une courbe, on obtient un certain arc dont la longueur peut être considérée comme étant la projection du segment; ceci posé, on demande de déterminer la courbe pour laquelle

la projection d'un segment de droite restera constante quelle que soit la direction des projetantes.

G. Petit Bois
(José, par Herve, Belgique).

**3283.** **[M' 3 j β, M' 8 b et d]** Saurait-on indiquer des détails sur la courbe parallèle à la *cubique de Tschirnhausen*, outre qu'elle se décompose en deux courbes de la même espèce? La cubique de Tschirnhausen a pour équation polaire

$$\rho = \frac{a}{\cos^3 \frac{\theta}{3}}.$$

(*Voir* la bibliographie donnée par R.-C. Archibald, *I. M.*, t. VIII, 1901, p. 10.) H. Wieleitner (Spire).

**3284.** **[V]** Où a été publiée une théorie scientifique du Boomerang? *Trinitario.*

**3285.** **[V]** Où pourrai-je trouver la solution de ce problème :

*Étant donnés les côtés d'un polygone inscriptible, construire le polygone.* *Trinitario.*

**3286.** **[V]** Où pourrai-je trouver la solution du problème :

*Partager un polygone en parties équivalentes, au moyen de lignes droites issues d'un même point extérieur au polygone.* *Trinitario.*

**3287.** **[K 1]** Un triangle *abc* étant donné et prenant un point $\alpha$ sur *bc*, un autre $\beta$ sur *ac* et un autre $\gamma$ sur *ab*, obtenir une expression des distances $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ et $\alpha\beta$ telle, qu'en posant $\alpha\gamma + \gamma\beta = \alpha\beta$, l'on déduise le théorème de Ménélaus. *Trinitario.*

3288. [V] Quel est le point lumineux de Poisson? Où pourrai-je trouver des indications sur ce point?

*Trinitario.*

3289. [K 21] Steiner a démontré que toutes les constructions pouvant être effectuées dans le plan au moyen de la droite et du compas, peuvent être résolues avec la droite et un cercle fixe; je demande :

1° Ces constructions peuvent-elles aussi être résolues au moyen d'une section conique fixe donnée et de droites, en supposant donnés aussi certains éléments de la conique? Par exemple, serait-il possible de les résoudre au moyen de lignes droites et d'une hyperbole équilatère dont le centre et les foyers ou d'autres éléments seraient donnés ?

2° A-t-on généralisé la question pour l'espace?

*Trinitario.*

3290. [I 14 b] Le nombre de classes de déterminant donné dépend de l'indice $n$ de la première solution entière $T_n$, $U_n$ de l'équation $T^2 - DU^2 = 1$ pour laquelle $U_n$ est divisible par $p$, où $p$ est un facteur premier de D. Je désirerais des exemples du cas où $n = 1$, c'est-à-dire où $T_n$, $U_n$ est la solution fondamentale (minima) de l'équation. Je voudrais en particulier des exemples du cas où $D = p$ ou $2p$, $p$ étant un nombre premier $4n + 3$. Je n'ai que le seul exemple

$$D = 46, \qquad T_n = 24335, \qquad U_n = 3588 \equiv 0 \pmod{23}$$

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

3291. [K 8] ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O, M et M′ sont deux points de la circonférence.

1° L'angle des droites de Newton (joignant les milieux des diagonales) des quadrilatères podaires de M et M′ par rapport à ABCD est égal à l'angle MOM′.

2° La droite de Newton du quadrilatère podaire de M par rapport à ABCD enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements quand M parcourt la circonférence ABCD. Le centre de cette astroïde est G, point de concours des droites qui joignent les milieux des côtés opposés de ABCD. Les tangentes aux points de rebroussement de cette astroïde sont les parallèles aux bissectrices des angles E et F, menées par G. E et F, intersections des côtés opposés : AB et CD, AD et BC.

3° Les quatre points de ABCD dont les droites de Newton des quadrilatères podaires sont les tangentes de rebroussement sont les sommets d'un carré dont les diagonales sont parallèles à ces tangentes, c'est-à-dire aux bissectrices de E et F.

4° La portion de droite de Newton du quadrilatère podaire de M comprise entre les tangentes aux points de rebroussement est constante et égale au rayon du cercle ABCD.

Je désirerais une démonstration géométrique de ces propositions, que j'ai déjà signalées dans le *J. E.*, année 1896, p. 177.

A. Boutin.

**3292.** [V] Je désirerais une liste des quelques erreurs qui ont pu être reconnues dans les Tables les plus usitées (Schrön, Dupuis et Callet notamment). Ainsi, dans les Tables de Vazquez Queipo (2e édition française, Gauthier-Villars, 1876), à la Table XIX, l'angle correspondant à l'arc de 9 centièmes doit être $5°9'23'',83$ et non $5°9'23'',38$.

G. Lemaire (Rachgia, Cochinchine).

**3293.** [K 22] La surface d'un piédouche étant engendrée par la révolution, autour d'un axe vertical, de deux quarts de circonférences de rayons inégaux ayant une même tangente verticale, j'ai déterminé graphiquement la courbe d'ombre propre de cette surface supposée éclairée par un flambeau S. J'ai été très étonné de ce que cette courbe n'est pas continue·

il paraît y avoir en effet un point anguleux dans celle-ci à l'endroit où elle rencontre le parallèle de raccordement des deux tores. Un lecteur de l'*Intermédiaire* pourrait-il m'en donner la raison? PAULMIER.

**3294.** [**K 22**] Deux cônes de sommets S et T ont pour base commune une courbe plane et sont tangents en $n$ points $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Les $2n$ tangentes en ces points à l'intersection des cônes se rencontrent en deux points B et C qui sont fixes sur la droite des sommets. Un correspondant de l'*Intermédiaire* pourrait-il me donner la démonstration de ce fait, vérifié par moi sur un grand nombre d'épures, ou dire à quelles conditions ceci a lieu? PAULMIER.

**3295.** [**D 2**] Soient $X_1$, $X_2$, $\alpha$, K quatre quantités qui sont liées par la relation

$$X_1^2 + X_2^2 + \alpha X_1 X_2 = K^2.$$

Formons les équations :

(1) $X_2^2 + X^2 + \alpha X_2 X = K^2$ qui a pour racines $X_1$, $X_3$,

(2) $X_3^2 + X^2 + \alpha X_3 X = K^2$ » $X_2$, $X_4$,

(3) $X_4^2 + X^2 + \alpha X_4 X = K^2$ » $X_3$, $X_5$,

... ......................................,

$(n-1)$ $X_n^2 + X^2 + \alpha X_n X = K^2$ » $X_{n-1}$, $X_{n+1}$,

..............................................

On demande la condition pour que la suite

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \ldots,\ X_n, \ldots$$

soit périodique. S. PRIETO (Pachuca, Mexique).

# RÉPONSES.

**2954.** (**1905**, 200) (*Rudis*) et **2965** (**1905**, 242) (H. Koechlin). — *Fractions continues* (**1906**, 28, 119, 217; (**1907**, 84, 134). — Je désire appeler l'attention sur les importants travaux de M. Thomas Muir à ce sujet. J'en ai donné une liste dans ma réponse à la question **2559** (**1905**, 157).

M. Muir a publié dans *P. R. S. E.*, t. VIII, 1873, p. 234, un théorème très général, dont plusieurs théorèmes de M. de Jonquières ne sont que des cas particuliers. Ce théorème a aussi été indiqué par K.-E. Hoffmann (*A. Gr.*, t. LXIX, p. 205-213), mais sous une forme spéciale.

Dans l'article de M. Muir, *The researches of M. E. de Jonquières on periodic continued fractions* (*P. R. S. E.*, t. XII, 1883-1884, p. 389-400), l'auteur montre que beaucoup des théorèmes de M. de Jonquières ne sont pas nouveaux.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

**3053.** (**1906**, 94) (E. Grigorief). — *Méthodes des mathématiciens japonais* (**1906**, 256; **1907**, 87). — Consulter un article de M. G. Loria paru au *Bullettino di bibl. e storia delle sc. mat.*, 1906: *Matematica e matematici del Giappone, a proposito di un' opera recente.* [Il s'agit de l'Ouvrage de M. T. Hayashi, *A brief history of the japanese matematics* (*Nieuw. Arch. v. Wisk.*, 1905).]

H. Brocard.

**3060.** (**1906**, 97) (N.-E. Barisien). — *Intersection d'une ellipse et de sa développée* (**1906**, 276; **1907**, 87). — Une inexactitude s'est glissée dans ma Note (**1907**, p. 89, ligne 16) au sujet de la propriété où il est écrit que les *points de contact sont les foyers*. En réalité, les points de contact sont les mêmes que les points de contact des

cercles-foyers (de rayon nul) avec l'ellipse, et ces points de contact sont sur les directrices.

Voici donc comment on peut énoncer la propriété, en remarquant en outre que le cercle de Monge passe par ces points de contact : *L'ellipse et sa développée sont tangentes entre elles en quatre points imaginaires qui sont les points où les cercles-foyers sont tangents à l'ellipse ; ces points de contact sont situés deux à deux sur chacune des directrices, ils sont aussi sur le cercle de Monge de l'ellipse.* E.-N. BARISIEN.

**3092.** (**1906**, 187) (*Milèse*) (**1907**, 137). — La dernière référence (*loc. cit.*) doit être ainsi complétée :

1860, 13 p. in-8°, 1 pl.

Pour l'analyse de ce travail (Voir *N. A.*, 1861, 2e Partie, p. 31-34).

H. BROCARD.

**3125.** (**1906**, 260) (G. LEMAIRE). — *L'arpentage chez les Aztèques.* — J'ai soumis la question à M. Léon Ligeal [1], chargé du Cours d'Antiquités américaines au Collège de France. Je transcris sa réponse :

« On peut consulter sur ce sujet le travail de Brinton, dans *Proceedings of the American Philosophical Society*, n° **12**, pages 197-207, et intitulé : *The lineal measures of the semi-civilized Nation of Mexico and Central America,* travail qui n'est d'ailleurs pas très approfondi, mais contient tout le nécessaire. »

F. FARJON.

**3141.** (**1907**, 6) (*Arcitenens*). — *Tables de nombres premiers* (**1907**, 116; 139). — Dr J.-C. Morehead (*S. M. Am.*, t. XII, 1906, p. 449-451) indique le nombre premier

$$2^{75}.4 + 1 = 188894659314785808547841$$

C.-E. Bickmore (*N. A.*, 3e série, t. XV, 1896, p. 222-227) indique le nombre premier composé de 23 chiffres égaux à l'unité $\frac{10^{23}-1}{9}$.

On peut ajouter aux questions de l'*I. M.* mentionnées par M. Brocard, les suivantes :

Tables de facteurs et de nombres premiers, 1208 (**1898**, 5, 144 ;

---

[1] Décédé récemment.

**1900**, 132; **1905**, 34): **2182** et **2183** (**1901**, 249; **1904**, 97; **1905**, 177). Plus grand nombre premier, **1613** (**1899**, 197; **1900**, 222; **1901**, 8; **1903**, 158; **1904**, 80); **1633** (**1899**, 219; **1900**, 38, 244).

M. D.-N. Lehmer, professeur à l'Université de Californie, prépare une Table de facteurs des 12 premiers millions qui sera publiée sous une forme condensée analogue à la Table de Lebesgue. L'œuvre sera publiée par le « Carnegie Institute, Washington (D. C.) ».

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

A propos des Tables de nombres premiers, nous croyons utile de signaler les récents travaux de MM. E. Lebon et G. Tarry.

E. Lebon. — Sur le nombre des nombres premiers de 1 à $n$ (*A. F.*, Congrès de Cherbourg, 1905; *Mém.*, p. 8). — Table de caractéristiques (*Soc. Phil.*, 9e série, t. VIII, 1906, p. 168). — Indicateurs et caractéristiques (*Id.*, p. 270).

G. Tarry. — Construction de Tables de facteurs premiers (*Soc. Phil.*, 9e série, t. VIII, 1906, p. 174). — Tables de facteurs premiers (*Id.*, p. 194). — Théorie des tablettes des cotes (*Id.*, t. IX, 1907). — Tablettes des cotes relatives à la base 20580 des facteurs premiers d'un nombre inférieur à N et non divisible par 2, 3, 5 ou 7; *première Partie* : $N = \overline{317}^2 = 100489$. Paris, Gauthier-Villars. 1906.

*Voir* encore *R. A. L. R.*, avril 1906; *S. M. Am.*, mai 1906; *A. F.*, 1906 et 1907; *Il Pitagora*, Palerme, 1907. La Rédaction.

**3145**. (**1907**, 7) (G. Lemaire). — (**1907**, 142). — Il existe, en allemand, un Ouvrage excellent répondant au desideratum exprimé par M. Lemaire :

*Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung*, von Dr Johannes Tropfke. Berlin, Veit, 1902 et 1903; 2 vol. in-8°.

L'auteur ne suit pas l'ordre chronologique, mais donne l'histoire de toutes les propositions importantes des mathématiques élémentaires, dans l'ordre logique de ces propositions.

Pour plus de renseignements, *voir* les comptes rendus très détaillés et fort élogieux qui ont été donnés à l'apparition de cet Ouvrage, notamment dans la *Revue des Questions scientifiques* de Bruxelles (avril 1905) et dans la *Bibliotheca mathematica* de Leipzig, 3e série, t. IV, 1903. *H. Braid.*

La quatrième édition du *Cours de Mathématiques élémentaires* (*Exercices de Géométrie*), par F. G. M. (Tours, Mame, et Paris, Poussielgue, 1907), 1228 pages, vient de paraître. *L'I. M.* et ses correspondants y sont souvent cités. Il en sera rendu compte ultérieurement dans la Partie bibliographique. LA RÉDACTION.

3148. (**1907**, 8) (C.-A. MILLER). — *Origine de quelques signes d'inégalités.* — Les signes $>$ et $<$ de TH. HARRIOT s'étant peu à peu répandus depuis l'apparition posthume de son *Artis analyticæ praxis* (1631), signes que bon nombre d'imprimeurs remplaçaient économiquement par un radical couché $\succ$ et $\prec$, ou même parfois par les symboles $\sqsupset$ et $\sqsubset$, les signes d'inégalité $\not<$ (*non inférieur à*) et $\not>$ (*non supérieur à*) apparurent avec le XVIII[e] siècle dans la correspondance manuscrite des savants et bientôt dans l'imprimerie; EULER s'en sert.

Goldbach, dans une lettre à Euler du 1[er] octobre 1744, lui signale les signes plus clairs $\geqq$ et $\leqq$, que l'astronome P. BOUGUER, l'inventeur de l'héliomètre, introduit dans ses articles des *Mém. de l'Acad. pour* 1734 : « Der Hr Bouguer brauchet, vor das signum so Ew. schreiben $\not<$, dieses $\geqq$, welches zwar nicht compendiös, aber sehr expressif ist. » (P.-H. VON FUSS, *Corresp. de savants du* XVIII[e] *siècle*, t. I, Saint-Pétersbourg, 1843, p. 304.)

Le signe $\mp$, avec une barre transverse verticale (et non oblique), pour signifier *non égal à*, était usité à cette même époque (1744) par EULER souvent et par GOLDBACH couramment (cf. FUSS, *Ibid.*). Au lieu de ce signe, plusieurs algébristes, pendant la première moitié du XVIII[e] siècle, utilisaient le signe $\sim$ et, dit Savérien (*Dictionn. de Math.*, 1753, v° *Caractères*), « voulant signifier que $a$ surpasse ou est surpassé par $b$, on écrit $a \sim b$ et la chose reste indécise ». Le signe $\sim$ ne resta guère employé en ce sens; les *Miscellanea* de Berlin recommandent de désigner par ce symbole $\sim$ la similitude de deux figures, comme Leibnitz, Wolf, Weidler le firent habituellement. Depuis un tiers de siècle au moins, ce signe $\sim$, ressuscité comme symbole d'inégalité, mais avec un rôle moins large, signifie couramment *peu différent de* et l'on écrit, par exemple,

$$\sqrt{a^2 + r} \sim a + \frac{r}{2a}.$$

*Belga.*

Autre réponse de M. PLAKHOWO.

3169. (**1907**, 30) (E.-N. Barisien). — *Système d'équations indéterminées* (**1907**, 200). — *Première solution :*

$$x = a + d, \quad y = b - d, \quad z = c, \quad u = a, \quad v = b + d,$$
$$w = c - d,$$

avec

$$a + c = 2b.$$

*Deuxième solution :*

$$x = a + b, \quad y = c, \quad z = d, \quad u = c + d, \quad v = a, \quad w = b,$$

avec

$$ab = cd.$$

U. Bini (Rome).

3188 (**1907**, 73) (Bayle). — *Équation différentielle* (**1907**, 215). — Soient $y_1$ et $y_2$ deux intégrales indépendantes de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - (ax^2 - b)y = 0,$$

on aura

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = \text{const.} = m,$$

et l'intégrale générale de l'équation donnée s'écrira

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 \mp \frac{c}{m} y_1 \int y_2\, dx \pm \frac{c}{m} y_2 \int y_1\, dx,$$

si $A_1$ et $A_2$ représentent deux constantes arbitraires.

On n'aura donc qu'à déterminer deux intégrales particulières indépendantes de l'équation (1). Pour y arriver je supposerai, ce qui paraît conforme à l'intention de l'auteur,

$$a = \alpha^2 = \text{pos.}$$

Posons, pour y arriver,

$$y = \int_P^Q e^{kz^2t}\, T\, dt,$$

P et Q étant des limites indépendantes de $z$, $k$ une constante indéterminée et T une fonction inconnue de $t$. En substituant cette valeur dans l'équation (1), on obtient

$$\int_P^Q e^{kz^2t}[(4k^2t^2 - \alpha^2)z^2 + 2kt + b]\, T\, dt = 0,$$

ce qui se réduit aisément à

$$[e^{kz^2t}T(4k^2t^2 - z^2)]_P^Q$$
$$+ \int_P^Q e^{kz^2t}\left[(z^2 - 4k^2t^2)\frac{dT}{dt} + (bk - 6k^2t)T\right] dt = 0.$$

Choisissons maintenant $k = -\frac{a}{2}$ et supposons que $a$ soit un nombre positif. Dans ce cas, la première partie de cette équation s'évanouit si l'on prend $P = -1$, $Q = 1$ ou $P = 1$, $Q = \infty$. Dans ce dernier cas, il est sous-entendu que $z \gtrless 0$. Quant à l'intégrale, il est nécessaire et il suffit de prendre

$$T = (1+t)^{\frac{b-3a}{4a}}(1-t)^{-\frac{b+3a}{4a}}.$$

De cette discussion résulte que

$$y_1 = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{az^2t}{2}}(1+t)^{\frac{b-3a}{4a}}(1-t)^{-\frac{b+3a}{4a}},$$

$$y_2 = \int_{1}^{\infty} e^{-\frac{az^2t}{2}}(1+t)^{\frac{b-3a}{4a}}(1-t)^{-\frac{b+3a}{4a}}$$

sont deux intégrales particulières indépendantes de l'équation (1).

On se convaincra aisément que ces intégrales ont un sens si l'on admet $a > b > 0$. W. Kapteyn.

En prenant les dérivées des deux membres de l'équation, on obtient une équation différentielle linéaire à laquelle s'applique le théorème de Fuchs (Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 1re division); l'intégrale générale n'a pas de point critique à distance finie et est une fonction entière, à rayon de convergence infini. Dès lors, il en est de même de l'intégrale générale de l'équation proposée, et l'on peut, par substitution directe, obtenir une formule de récurrence donnant les coefficients du développement en série de l'intégrale générale. Il resterait toutefois, ce qui est peut-être difficile, à déduire de cette formule de récurrence le terme général.

Observons que, souvent, pour des équations différentielles, *quand on a en vue une application*, il peut être plus simple de discuter directement les intégrales *réelles* que de les former. Mais, pour cela, il faut connaître l'application visée.

H. Brocard, E. Maillet.

Autre réponse de M. Escott.

3191. (1907, 75) (*Nobel*). — ***Historique du calcul des décimales de π.*** — On trouvera des renseignements abondants et généralement exacts dans les ***Récréations et Problèmes mathématiques*** de W.-W. Rouse-Ball, trad. Fitz-Patrick, Paris, 1898 (Chap. VIII).

*Voir* aussi l'*Histoire des Mathématiques* de Cantor (*passim*).

En vue d'une étude plus complète, on consultera :

Montucla. — Hist. des recherches sur la Quadrature du cercle, 1754 (rééditée : Paris, 1831), complétée dans l'Hist. des Mathém. du même auteur (t. IV de la 2ᵉ édition, 1802 : 3ᵉ supplément, p. 618-643).

Lehman. — *Archiv. de Math.* de Grunert, 1853, p. 159 et suiv. : Mémoire le plus complet jusqu'à cette époque; Lehman vérifie les 273 premières décimales : Richter venait d'en trouver 330.

*Nouv. Ann. de Math.*, 1850, p. 12; 1851, p. 198; 1854, p. 253 et 419; 1855, p. 209; 1859, p. 46. — *Rev. des Quest. scientif. de Brux.*, 1885, t. I, p. 477 (Carbonnelle, *Les Nombres et la Philosophie*), et 1884 (Ph. Gilbert, *Adrianus Romanus et les Sciences exactes dans l'ancienne Université de Louvain*).

D. Bierens de Haan. — Notes sur quelques quadrateurs du cercle dans les Pays-Bas (dans *Bullettino de Boncompagni*, t. VII, 1874, p. 99-144; *cf.* t. I, 1868, p. 141-156). Du même auteur : Matériaux pour l'Hist. des Math. en Hollande (*Mém. Acad. des Sc.* de Holl.), résumés dans *Nouv. Corr. math.* de Catalan, 1879, p. 14-18.

Rudio. — Archimède, Huygens, Lambert, Legendre (Leipzig, 1892).

Enriquès. — Questioni riguardanti la Geometria elementare, Bologne, 1900 (l'art. XIV par B. Calo).

Paul Tannery et l'abbé Clerval. — Une Correspondance d'Écolâtres du xiᵉ siècle (publiée dans *Notices et Extr. des manuscrits de la Bibl. Nat.*, t. XXXVI, 2ᵉ partie, 1901, p. 487-583). L'Introduction par P. Tannery éclaire vivement l'histoire de la quadrature du cercle au moyen âge. Ce problème, *Quadratura circuli*, indiqué par Boèce en son *Commentaire sur les Catégories d'Aristote* (230, D) comme résolu approximativement par Archimède, a préoccupé les écolâtres lotharingiens, logiciens très convenables, arithméticiens non méprisables, mais géomètres excessivement médiocres, comme l'étaient déjà le Pseudo-Boèce et Gerbert, leurs maîtres : ils ne connaissaient d'Euclide que les énoncés décousus de quelques propositions, inintelligibles pour eux, et ignoraient

même la proposition du carré de l'hypoténuse. Francon de Liège, écolâtre du Chapitre de Saint-Lambert, écrit en 1054 un *De quadraturâ circuli,* retrouvé par le cardinal Maï à la Vaticane et publié en 1882 à Leipzig par Winterberg : le cercle, dit-il, équivaut à un rectangle de 11 pieds sur 14, si le diamètre est de 14 pieds. Peu avant lui, un moine connu par sa seule initiale, le moine B., écrit à l'écolâtre Ragimbold de Cologne (mort avant 1033), que le cercle équivaut au carré ayant pour diagonale les $\frac{5}{4}$ du diamètre du cercle. Un *De quadraturâ circuli* antérieur à l'année 1050, dû peut-être à l'écolâtre Adelman, plus tard évêque de Liége (1042-1048), prétend que le cercle équivaut au carré ayant pour côté les $\frac{8}{9}$ du diamètre et que les arcs interceptés par le carré concentrique et équivalent au cercle sont de 60°; en réalité, ils sont de 55°11'40". L'Occident latin s'éloignait donc peu du chiffre archimédien $\pi = \frac{22}{7}$.

Résumons l'historique des décimales de $\pi$.

Avant Archimède, on se contentait de $\pi = 3$. *Cf.* la Bible : 3 *Reg.*, 7,23; 2 *Paralip.*, 4,2. Cependant le papyrus Rhind (voir *Interm.*, **1907**, p. 127), déchiffré et publié en 1877 par Eisenlohr, donnait il y a 27 siècles $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,16$; car il dit que le cercle équivaut au carré construit sur les $\frac{8}{9}$ du diamètre, idée que rencontrera aussi au moyen âge le moine liégeois Adelman ou un de ses disciples.

Archimède (287-212) introduit la valeur $\pi = \frac{22}{7} = 3,14$.

L'*Almageste* de Ptolémée (128-168) fournit

$$\pi = 3\,\frac{17}{120} = \frac{355 + 22}{113 + 7} = 3,14166\ldots$$

(*N. A.*, 1854, p. 253).

Les Hindous obtiennent de remarquables résultats. Aryabhata au VII$^e$ siècle de notre ère ignore peut-être Archimède (car il attribue à la sphère le volume $v = \sqrt{\pi^3}\,R^3$) et obtient par les polygones réguliers

$$\pi = \frac{62830}{20000} = 3,1416$$

(voir *Journal asiatique,* 1879, t. I). Un siècle plus tard, Brahmagupta donne $\pi = \sqrt{10}$. Le troisième et dernier des grands mathématiciens de l'Inde, Bhaskara, au XII$^e$ siècle, donne le chiffre $\frac{22}{7}$, qui

lui vient de la Grèce, et la fraction d'Aryabhâta simplifiée $\frac{3927}{1250}$.
Les Arabes avec Al Howarez, surnommé Al Khorizmi, auteur de l'*Al djebr w' al mokâbalah* (vers 820), reproduit ces trois valeurs grecque et hindoues : $\frac{22}{7}$, $\sqrt{10}$, $\frac{3927}{1250}$, c'est-à-dire 3,14, 3,162, 3,1416.

Le moyen âge vit avec le $\pi = \frac{22}{7}$ d'Archimède.

A la Renaissance, deux remueurs d'idées, Cusanus (le cardinal Nicolas de Cuse) et Regiomontanus (Jean Müller, de Kœnigsberg), veulent avoir mieux qu'Archimède : le premier propose

$$\pi = \sqrt{972 : \left(98 \frac{7}{16}\right)},$$

et le second, dans son *De Triangulis,*

$$\pi = \frac{1562}{497},$$

c'est-à-dire l'un 3,1423 et l'autre 3,1428.

La fin du XVI^e^ siècle se signale par un essaim de quadrateurs du cercle, qui surgit dans les Pays-Bas. Simon van der Eycke, *Quadrature du cercle,* Delf, 1584, donne

$$\pi = 3 \frac{69}{484} = \left(\frac{39}{22}\right)^2 = 3,142.$$

Ludolf van Ceulen, de Huldesheim en Saxe (et non de Cologne), dans son *Van der Circkel,* Delf, 1596, donne 30 décimales exactes obtenues par les polygones réguliers de $2^{33} \times 60$ côtés, et son Livre posthume *Aritmetische en Geometrische Fundamenten,* Leyde, 1615, donne 32 (Montucla dit à tort 34) décimales : il avait calculé 35 décimales par les polygones de $2^{62}$ côtés, et ces 35 décimales sont gravées en exergue sur sa pierre tombale en l'église Saint-Pierre, à Leyde. Le Hollandais Adriaan Anthonisz (1527-1607), bourgmestre d'Alkmaar, donne dans un manuscrit, vers 1585, la valeur $\pi = \frac{355}{113}$, remarquable par la répétition des mêmes chiffres (1, 1, 3, 3, 5, 5) et répondant à 6 décimales exactes : $\pi = 3,141592$ : elle fut publiée par son fils Adraan, surnommé *Metius*. Adrianus Romanus, de Louvain, l'ami et le rival de Viète, avait, dès 1593, calculé 15 décimales.

Le grand HUYGENS, dans son *De Circuli magnitudine*, Leyde, 1654, perfectionne la méthode d'Archimède : entre ses mains elle donne 3,14 dès les polygones à 12 côtés; Archimède avait dû pousser jusqu'à 96 côtés. En allant jusqu'à 10800 côtés, Huygens obtient 14 décimales exactes : la méthode non perfectionnée eût donné 6 décimales seulement. En 1651, il publia une méthode de quadrature basée sur des considérations barycentriques.

Aux XVIII$^e$ et XIX$^e$ siècles on utilise les formules dues au Calcul différentiel. On obtient 72 décimales (SHARP, 1699); 100 (MACHIN, avant 1706); 112 (LAGNY, 1719); 136 (VÉGA, 1790); 200 (DAHSE, 1844); 440 (RUTHERFORD, 1853). Le patient WILLIAM SHANKS atteint la 607$^e$ décimale (même année 1853), et même la 707$^e$ en 1873 (*Proceedings of the Royal Soc.*, 1873-1874. p. 45).

Après tout, $\pi$ est un nombre incommensurable (LEGENDRE, 1794), et même transcendant et d'une transcendance infinie (LINDEMANN, 1882). Il suffit amplement au géomètre d'orner sa mémoire des dix premières décimales, fût-ce à l'aide du premier des piètres et célèbres hexamètres (*Nouv. Corresp. math.*, 1879, p. 448) :

« Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages,
» Immortel Archimède, *etc.* »;

dont les mots indiquent par le nombre de leurs lettres les chiffres successifs de $\pi = 3,1415926535 89\ldots$ *Belga.*

*P.-S.* — Dans les Indes, à la période primitive de la Géométrie hindoue, très antérieurement (semble-t-il) à l'ère chrétienne, APASTAMBA, l'un des auteurs des *Sulvasutras*, ou *Préceptes du cordeau* (Géométrie rituelle des brahmanes), dit que le cercle équivaut à peu près à un carré ayant pour côté les $\frac{13}{15}$ du diamètre ($\pi = 3$, à peu près).

A cette époque, les Grecs n'avaient pas encore été les initiateurs scientifiques des Hindous, meilleurs arithméticiens que géomètres.

Quant à ARYABHATA (VI$^e$ siècle), s'il n'a pas connu Archimède, il a subi cependant l'influence des écoles grecques et arrive, comme Apollonius, à calculer $\pi$ par la méthode archimédéenne des polygones réguliers poussée jusqu'au polygone de 384 côtés. *Belga.*

Autre réponse de M. J. ROSE plus abrégée et contenant quelques-uns des renseignements ci-dessus. LA RÉDACTION.

Un exposé très détaillé des approximations successivement réali-

sées pour l'évaluation du nombre $\pi$ a été donné dans le Volume des *Récréations mathématiques* de M. W.-W. Rouse Ball, 1892, p. 162-173, avec l'indication des sources bibliographiques.

*Voir* aussi la traduction française de M. Fitz Patrick, 1898, p. 252-268.

Voici, en substance, le résumé de ce Chapitre :

| | | Décimales | |
|---|---|---|---|
| Calculateurs. | Dates. | obtenues. | exactes. |
| Archimède | 220 | | 2 |
| Arya Batha | 530 | | 3 |
| Fr. Viète | 1579 | 11 | 10 |
| P. Metius | 1583 | 7 | 6 |
| Adr. Romain | 1593 | | 15 |
| L. von Ceulen | 1596 | | 20 |
| W. Snellius | 1621 | | 34 |
| Grienberger | 1630 | | 39 |
| Abr. Sharp | 1699 | 72 | 71 |
| Machin | 1706 | 100 | 100 |
| F. de Lagny | 1719 | 127 | 112 |
| Vega | 1789 | 143 | 126 |
| Vega | 1794 | 140 | 136 |
| Rutherford | 1841 | 208 | 152 |
| Dase | 1844 | 205 | 200 |
| Clausen | 1847 | 250 | 248 |
| Rutherford | 1853 | 440 | 440 |
| W. Shanks | 1853 | 530 | |
| W. Shanks | 1853 | 607 | |
| Richter | 1853 | 333 | 330 |
| Richter | 1854 | 400 | |
| Richter | 1855 | 500 | |
| W. Shanks | 1873 | 707 | |

Voir *I. M.*, **1894**, p. 8, question 30; **1894**, p. 15, 215, 241; **1895**, p. 321 et 389.

H. Brocard.

L'historique, que M. *Nobel* désire connaître, a été fait. Il peut consulter : *Verhandelingen* de l'Académie royale d'Amsterdam, t. IV, 1858, où se trouve une étude de feu le professeur Bierens de

Haan; ensuite une étude de Glaisher : *Remarks on the calculation of* $\pi$, dans *The Messenger of Mathematics*, 1873, p. 119. On y devrait seulement ajouter le calcul de 707 décimales, fait par M. Shanks dans les *Proc. Royal Soc.*, t. XXII, 1873, p. 45, qui est maintenant le champion dans cette arène mathématique.

Naturellement, les listes de Bierens de Haan et de Glaisher ont besoin de quelques rectifications et extensions.

Une note sur cette question paraîtra prochainement dans le *Wiskundig Tijdschrift*. N. QUINT (La Haye).

M. G. Lemaire nous a adressé un historique rédigé en grande partie d'après W.-W. Rouse Ball (*Récr. et probl. math.*, trad. Fitz-Patrick; Paris, Hermann, 1898) et donnant : 1° la date et l'auteur du calcul; 2° le nombre de décimales calculées et, s'il y a lieu, le nombre de décimales exactes; 3° les références.

Cette réponse et une autre de M. Plakhowo ont été communiquées à M. *Nobel*. LA RÉDACTION.

3193. (**1907**, 76) (U. BINI). — *Équations algébriques.* — Dans mon Mémoire *Sur une extension du calcul des substitutions linéaires*, inséré dans le tome VI (5ᵉ série) du *Journal de Mathématiques* (1900), j'ai donné, entre autres, la solution du problème général suivant :

*Étant donné un polynome* $f(x)$ *de degré* $m$ *et une fonction entière symétrique* $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)$ *de* $s$ *variables* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ ($s \leqq m$), *trouver l'équation de degré* $\binom{m}{s}$, *ayant pour racines les* $\binom{m}{s}$ *valeurs que prend la fonction*

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)$$

*pour les diverses combinaisons des racines de* $f(x)$ *prises* $s$ *à* $s$.

C. STÉPHANOS (Athènes).

Pour ce qui est des équations aux produits deux à deux des racines d'une équation donnée, je ne suis pas en mesure d'éclaircir à aucun degré la question; pour ce qui est des équations dont les racines sont les puissances d'ordre $m$ des racines d'une équation donnée, je rappellerai simplement que la considération de ces équations sert de fondement à la méthode de Gräffe, exposée et étendue par M. Car-

vallo dans un Mémoire (thèse de doctorat) publié en 1890. Toutefois, la formation des équations n'est indiquée que dans l'hypothèse particulière que le nombre $m$ est une puissance de 2.

J'ajouterai que, personnellement, dans un travail vieux de 20 ans que des raisons toutes particulières m'ont fait renoncer à publier, j'ai traité non seulement le cas de $m$ quelconque, mais celui d'équations d'une généralité beaucoup plus grande, par le moyen desquelles le problème de la détermination des racines d'une équation numériquement donnée quelconque doit être considéré comme intégralement résolu.

Je fournirai au besoin à M. Bini des éclaircissements plus circonstanciés qui ne sauraient prendre place ici. E. Malo.

3194. (1907, 76) (U. Bini). — *Enveloppes.* — Considérant $a$, $b$, $c$ comme fonctions données de deux paramètres, les équations paramétriques de la surface $\Sigma$ lieu des centres des sphères

$$(1)\qquad (x^2+y^2+z^2-1)(a^2+b^2+c^2-1)+4ax+4by+4cz=0,$$

sont

$$x=-2a:(a^2+b^2+c^2-1),$$
$$y=-2b:(a^2+b^2+c^2-1),$$
$$z=-2c:(a^2+b^2+c^2-1);$$

et, comme la sphère variable (1) demeure orthogonale à la sphère imaginaire fixe

$$(\mathrm{S})\qquad x^2+y^2+z^2+1=0,$$

son enveloppe est simplement *une surface anallagmatique par rapport à la sphère directrice* (S) *et ayant pour déférente la surface* $\Sigma$. Si l'on considère $a$, $b$, $c$ comme coordonnées d'un point variable $P_1$, les formules (2) et leurs inverses

$$a=x:\left(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}\right),$$
$$b=y:\left(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}\right),$$
$$c=z:\left(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}\right)$$

définissent une *transformation double spéciale* en laquelle la sphère imaginaire (S) est en même temps quadrique *double* et quadrique *limite*, c'est-à-dire lieu des points de l'*espace double* à chacun

desquels correspondent deux points coïncidents de l'*espace simple*. et lieu de ces couples formés par deux points coïncidents. La transformation *conjointe* est une inversion ordinaire par rapport à la sphère (S), etc. (*cf.* ma réponse à la question 3133).

V. Retali (Milan).

3197. (1907, 77) (*Pysurneuf*). — Simple question d'examen. — La discussion sommaire de la fonction

$$(x^2+1)x^{x^2+x+1}+x-642$$

dans l'intervalle $-2$ à $+4$, suffit pour manifester clairement l'impossibilité d'une autre racine réelle que $x=2$, indiquée dans l'énoncé.

H. Brocard.

3199. (1907, 78) (G. Lemaire). — *Planimètre d'Amsler*. — J'ai eu l'occasion de faire une expérience beaucoup plus étendue.

Sur 374 parcelles calculées, j'ai obtenu 100 fois, $a>b$; 32 fois, $a=b$; 242 fois, $a<b$; moyenne des $(a-b)$ égale 0,00085; moyenne des $(b-a)$ égale 0,00147.

La plus grande série des $a>b$ a été de 4, moyenne correspondante des $(a-b)$ égale 0,00087; la plus grande série des $a=b$ a été de 5; la plus grande série des $a<b$ a été de 18, moyenne correspondante des $(b-a)$ égale 0,00209.

L'accord des deux expériences, très sensible, ne fait qu'augmenter ma curiosité et mon désir de voir solutionner cette question.

G. Lemaire (Cochinchine).

3200. (1907, 98) (E.-N. Barisien). — *Axes d'une ellipse*. — L'ellipse a pour équation

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0,$$

et la développée a son équation sous l'une des deux formes

$$(1)\qquad (ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{4}{3}}=0,\qquad c^2=a^2-b^2,$$

$$(2)\qquad (a^2x^2+b^2y^2-c^4)^3+27a^2b^2c^4x^2y^2=0.$$

En un point $(x, y)$ d'intersection des deux courbes, la tangente à l'ellipse a pour coefficient angulaire

$$(3)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varepsilon}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Suivant que l'on considère soit (1), soit (2), le coefficient angulaire de la tangente à la développée au point $(x, y)$ a l'une des deux valeurs

$$(4)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_\delta = -\left(\frac{a^2 y}{b^2 x}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$(5)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_\delta = -\frac{a^2 x}{b^2 y}\left[\frac{(a^2x^2+b^2y^2-c^4)^2+9b^2c^4y^2}{(a^2x^2+b^2y^2-c^4)^2+9a^2c^4x^2}\right].$$

Il est probable que M. Barisien se sera servi de la formule (5), ce qui lui aura donné des calculs inextricables ; tandis qu'avec la formule (4) le calcul est simple. Il est d'ailleurs assez difficile de démontrer l'identité des formules (4) et (5).

Je dois, du reste, dire que c'est sur le conseil de M. H. Brocard que j'ai employé la formule (4).

Si donc on pose

$$(6)\qquad t = -\left(\frac{a^2 y}{b^2 x}\right)^{\frac{1}{3}},$$

il en résulte

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\delta = t, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_\varepsilon = \frac{1}{t^3}.$$

Donc, on a pour l'angle V des deux courbes

$$\operatorname{tang} V = \frac{\dfrac{1}{t^3} - t}{1 + t \times \dfrac{1}{t^3}} = \frac{1-t^4}{t(1+t^2)} = \frac{1-t^2}{t},$$

et, en remplaçant $t$ par (6),

$$(7)\qquad \operatorname{tang} V = \frac{(a^2y)^{\frac{2}{3}} - (b^2x)^{\frac{2}{3}}}{(a^2b^2xy)^{\frac{1}{3}}}.$$

Or, les coordonnées $(x, y)$ sont (3060, 1907, 88) pour l'un de ces points réels (à condition que $a > b\sqrt{2}$) d'intersection des deux courbes

$$(8)\qquad x = \frac{a^2}{c}\left(\frac{a^2-2b^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad y = \frac{b^2}{c}\left(\frac{2a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ces valeurs étant substituées dans (7), on a finalement

$$(9)\qquad \operatorname{tang} V = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{(a^2-2b^2)(2a^2-b^2)}}.$$

On aura $V = 45°$, si

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - 2b^2)(2a^2 - b^2),$$

ou

$$a^4 + b^4 - 7a^2b^2 = 0.$$

On en déduit

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

Le signe — convient seul, puisque $b < a$. Donc

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}.$$

Le rapport des axes demandé par M. Barisien est donc

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}} = 0,382 = \text{environ } \frac{1}{3}.$$

Voici d'autres remarques intéressantes concernant l'angle V.

1° Si $a = b\sqrt{2}$, on a $V = 90°$. En effet, dans ce cas, les points de rebroussement situés sur le petit axe coïncident avec les sommets du petit axe.

2° En général, si $\tang V = \lambda$, on a

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{5\lambda^2 + 2 \pm 3\lambda\sqrt{\lambda^2 + 4}}{2(2\lambda^2 - 1)}.$$

3° Ainsi, si $V = 60°$, $\lambda = \sqrt{3}$ et

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{17 - 3\sqrt{21}}{10}.$$

4° Si $V = 30°$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$, alors

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{11 \pm 3\sqrt{13}}{-2}.$$

$\frac{b^2}{a^2}$ est négatif, $\frac{b}{a}$ est donc imaginaire.

Il en résulte que *jamais l'intersection d'une ellipse et de sa développée n'a lieu sous l'angle de* 30°.

5° Si l'on applique la formule (7) à l'un des points imaginaires d'in-

tersection dont les coordonnées sont (3060, 1907, 88)

$$x = \frac{a^2}{c}, \qquad y = \frac{b^2}{c}\sqrt{-1},$$

on trouve

$$\operatorname{tang} V = \frac{(\sqrt{-1})^{\frac{2}{3}} - 1}{(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}} = -\frac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{-1}}} = -\frac{2}{\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}.$$

L'angle V est alors imaginaire, comme il fallait s'y attendre, mais offre ceci de remarquable qu'*il est toujours le même, quelles que soient les dimensions de l'ellipse.* *Picpus.*

$x$, $y$ étant les coordonnées du point de l'ellipse, X, Y celles du centre de courbure, on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad X = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \qquad Y = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi;$$

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Soit $\varphi$ le paramètre du point d'intersection de l'ellipse et de sa développée, et posons $z = \operatorname{tang}^2\varphi$; nous aurons

$$(1) \qquad \frac{c^4}{a^4} + \frac{c^4}{b^4}z^3 = (1 + z)^3.$$

Les coefficients angulaires des tangentes aux deux courbes ayant les valeurs

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = \left(\frac{b}{a}\cot\varphi\right)^3, \qquad Y' = \frac{a}{b}\operatorname{tang}\varphi,$$

la condition du problème s'écrit

$$\frac{y' - Y'}{1 + y'Y'} = \pm 1$$

ou bien

$$\frac{1 - \left(\frac{a}{b}\operatorname{tang}\varphi\right)^2}{\frac{a}{b}\operatorname{tang}\varphi} = \pm 1.$$

Introduisant comme inconnue la quantité

$$u = \frac{a}{b}\operatorname{tang}\varphi,$$

on aura l'équation $u^2 \pm u = 1$ qui donne

$$u = \mp \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \mp \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

En désignant par $k$ l'une ou l'autre des deux quantités

$$u^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

posons $\dfrac{b^2}{a^2} = v$ et exprimons que l'équation (1) est satisfaite par $z = kv$; cela donne, réduction faite,

$$v = \frac{k^3 - 3k - 2}{2k^3 + 3k^2 - 1}.$$

Mettant $k = \dfrac{3+\sqrt{5}}{3}$, on trouve

$$v = \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^2 < 1;$$

l'autre valeur de $k$ fournirait $v > 1$; donc il y a une solution et une seule

$$\frac{a}{b} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

M. Lerch (Brünn).

Réponses analogues de MM. Lez et Malo. Autres réponses de MM. L. Bickart, Brocard et Dujardin.

# QUESTIONS.

**1083.** [**X6**] (**1897**, 126) Pour trouver l'aire d'une figure au moyen du *planimètre polaire d'Amsler,* on glisse la tige divisée dans sa coulisse de manière que l'*index* coïncide exactement avec une des divisions marquées de 10□$^{m}$ $\frac{1}{1000}$, etc. Aux échelles $\frac{1}{1000}$ et $\frac{1}{200}$, la division est la même, mais la première est précédée du n° 10 et la seconde du n° 0,4.

Peut-on faire usage indistinctement de l'une ou de l'autre échelle ? Quels sont dans ce cas les coefficients à adopter ?

*Rayon Vert.*

**1084.** (**1897**, 145) Sujet d'étude. — *Géométrie du triangle.* — La Géométrie du triangle a pris depuis quelques années une telle extension, qu'il est malheureusement impossible, pour la plupart des personnes qui s'intéressent à cette Géométrie, de connaître les nombreuses propositions y relatives qui sont éparses dans un nombre considérable de Mémoires ou publications.

M. Vigarié, dans divers *Comptes rendus de l'Association pour l'avancement des Sciences*, a déjà rendu un réel service en donnant la liste des Mémoires relatifs à la Géométrie du triangle. Il est bien évident que ce répertoire est insuffisant pour le chercheur qui ne se trouve pas à portée d'une grande bibliothèque mathématique et qui ne voudrait pas étudier des questions déjà connues.

Un géomètre compétent en la matière qui voudrait bien publier un Livre contenant toutes les propriétés qu'il connaîtrait du triangle, aussi bien anciennes que nouvelles, sans aucune démonstration, rendrait un réel service à ceux qui s'intéressent à la Géométrie du triangle et qui pourraient

ainsi à coup sûr entreprendre un champ nouveau d'investigation. *Elgnairt.*

1093. [I2] (1897, 47) On voit facilement que l'équation

$$y^2-(2x+1)y+x(x-1)=0$$

n'a pas d'autres solutions entières que les groupes de deux nombres triangulaires *consécutifs*. Je voudrais savoir s'il y a des propriétés analogues relativement aux nombres pyramidaux, triangulo-triangulaires, etc.

JUAN-J. DURAN-LORIGA (La Corogne).

1095. [I1] (1897, 148) Quelle est la manière la plus facile de reconnaître si une expression de la forme

$$\sqrt[m]{\alpha}\pm\sqrt[n]{\beta}\pm\sqrt[p]{\gamma}\pm\ldots$$

est commensurable ?

J.-J. DURAN-LORIGA (La Corogne).

1097. [M¹m] (1897, 148; 1902, 173, n° 2383) Peut-on citer quelque circonstance intéressante concernant la courbe représentée par l'équation

$$x=-\frac{\cos\theta}{2}y$$
$$\pm\left[\sqrt{p-\left(\frac{1-\cos^2\theta}{4}\right)y^2}+\frac{\sqrt{p}}{2}\,\mathrm{L}\frac{\sqrt{\frac{4p}{4-\cos^2\theta}}-\sqrt{\frac{4p}{4-\cos^2\theta}-y^2}}{\sqrt{\frac{4p}{4-\cos^2\theta}}+\sqrt{\frac{4p}{4-\cos^2\theta}-y^2}}\right],$$

dans laquelle $\theta$ désigne l'angle des axes ?

J'ai trouvé cette courbe par la propriété que les triangles formés par la tangente, l'ordonnée et l'axe des $x$ soient équipotentiels (c'est-à-dire que la somme des carrés des côtés soit constante).

Si $\theta=90°$, la longueur de la tangente est constante; la courbe est donc une généralisation de la *spirale tractrice*.

J.-J. DURAN-LORIGA (La Corogne).

**3296.** [Σ] A-t-on déjà étudié la courbe lieu des points situés à égale distance d'une conique donnée et d'un point fixe? En particulier quel est son degré?

Ce qui me porte à proposer ce sujet d'étude, c'est que ce lieu est une cubique intéressante, lorsque la conique est une parabole et que le point fixe est soit le sommet, soit le foyer de la parabole. *Arcitenens.*

**3297.** [**I19**] Peut-on obtenir une formule générale concernant trois nombres entiers consécutifs dont la somme des cubes soit aussi somme de deux carrés? En voici un cas particulier :

$$\overline{11}^3 + \overline{12}^3 + \overline{13}^3 = \overline{30}^2 + \overline{66}^2.$$

*Picpus.*

**3298.** [**K21a**δ] Un corespondant pourait-il me doner la manière la plus simple, come construction, de diviser une longueur donée AB en trois parties égales? Je n'ai pu abaisser la simplicité géométrografique au-dessous de 19.

E. Lemoine.

**3299.** [**J1**] Je lis dans un journal amusant que : le nombre de parties de dominos essentiellement différentes entre deux joueurs prenant au début de la partie chacun 7 dominos sur les 28 que compte le jeu, est

137 680 171 200.

Comment parvient-on à ce nombre? E.-N. Barisien.

**3300.** [**E5**] Quels sont les répertoires anciens ou modernes d'intégrales indéfinies ou définies, qui ont été publiés soit en France, soit ailleurs? E.-N. Barisien.

**3301.** [**I1**] Je trouve que, si l'on considère tous les nombres ayant $n$ chiffres, le nombre de leurs chiffres est

$$N_n = 9n \times 10^{n-1} \qquad \text{(les zéros compris);}$$

le nombre de tous ces nombres est

$$P_n = 9 \times 10^{n-1};$$

la somme des chiffres de ces nombres est

$$S_n = 45(9n+1) \times 10^{n-2};$$

et la somme de tous ces nombres est

$$\Sigma_n = 45 \times 10^{n-2}[11 \times 10^{n-1} - 1].$$

Je désirerais connaître des formules analogues lorsqu'on ne tient pas compte des zéros comme chiffres, ni des nombres ayant des zéros comme chiffres significatifs.

E.-N. Barisien.

**3302.** [**I19c**] Peut-on m'indiquer d'autres solutions en nombres entiers de l'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = u^5$$

que la suivante

$$x = 3, \quad y = 12, \quad z = 11, \quad u = 2.$$

*Arcitenens.*

**3303.** [**Q1d**] S'il est reconnu exact que l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \mathfrak{p}(x, y)$$

admet toujours une *intégrale* [ c'est-à-dire une équation *finie,* de la forme $y = P(x, x_0, y_0)$ qui se réduise à $y_0$ pour $x = x_0$], ne s'ensuit-il pas nécessairement que cette équation différentielle (1) qui est précisément, remarquons-le, celle d'une section horizontale quelconque produite par le plan variable $z = h$ dans la pseudo-surface particulière

$$(2) \qquad dz = \mathfrak{p}(x, y)dx - dy,$$

où l'on suppose $\mathfrak{q}(x, y) = -1$, ne s'ensuit-il pas, dis-je,

que cette équation (1) doit être, *en même temps,* l'équation différentielle de la section horizontale correspondante produite par le plan $z = h$, dans une certaine *surface* que nous n'avons pas à caractériser davantage ici? Comment, en effet, sans cela, l'équation *finie* d'une telle section, supposée obtenue, pourrait-elle coïncider, ainsi qu'il le faut, avec l'intégrale relatée ci-dessus?

Mais, d'autre part, un tel fait, s'il a lieu, n'implique-t-il pas la négation pure et simple de l'existence géométrique (très certaine pourtant) et de la pseudo-surface choisie (2) et des pseudo-surfaces, en général? Issaly.

3304. [**Q1d**] Parmi les méthodes adoptées pour établir que l'équation canonique

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

admet une intégrale, la plus répandue, peut-être, est celle qui consiste à écrire, d'abord (d'après Maclaurin)

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y) = A_{00} + A_{10}x + A_{01}y + \ldots + A_{ij}x_i y_j + \ldots,$$

puis à démontrer que, sous cette forme, l'équation (1) admet, pour intégrale, une série entière convergente

$$(3)\qquad y = F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots.$$

Comme, de celle-ci, on tire

$$(4)\qquad \frac{dy}{dx} = F'(x) = A_1 + 2A_2 x + \ldots + nA_n x^{n-1} + \ldots,$$

il n'y a plus, ce semble, qu'à identifier (2) et (4)?....

Mais, dirons-nous aussitôt : cette opération est-elle *légitime?* L'équation (4) définit le coefficient angulaire de la tangente à la *courbe proprement dite* ou *ordinaire* $y = F(x)$, tandis que l'équation (2) définit celui de la tangente à la *pseudo-courbe* section *horizontale* de la pseudo-surface

particulière ([1])

$$dz = f(x, y)\,dx - dy.$$

Or, ces lieux géométriques sont de nature différente, voire *irréductible*.

Ne s'ensuit-il pas, ajouterons-nous, que la véritable intégrale cherchée n'est autre que la pseudo-courbe en question?

ISSALY.

3305. [I19a] Résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^2 + my^2 + nz^2 + 2ayz + 2bxy + 2cxz = s^2$$

pour $m = b^2 + 1$, $m = b^2$ au moins. U. BINI.

3306. [I12b] Quelle forme doivent avoir $p$, $q$, $r$, pour que l'équation

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

soit à racines entières? U. BINI.

3307. [I19c] La méthode que M. Desboves donne dans *N. A.*, 1879, p. 269-270, pour résoudre en nombres entiers l'équation

$$X^2 + aXY + bY^2 = Z^n$$

ne conduit pas à la détermination de la forme de Y, X, Z quel que soit l'entier $n$. Je désire une méthode donnant les expressions de X, Y, Z. U. BINI.

---

(1) *Voir* notre Ouvrage intitulé : *Les pseudo-surfaces appliquées*, etc., n° 2, Hermann.

# RÉPONSES.

**7.** (**1894**, 2) (H. Poincaré). — *Construction du neuvième point d'intersection de cubiques* (**1894**, 11, 157; **1896**, 155). — *Voir :*

A. Cayley. — On the construction of the ninth point of intersection of cubics which pass through eight given points (*Q. J.*, t. V, 1862, p. 222-233, et *Coll. Math. Papers*, t. IV, p. 495).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.)

**416.** (**1895**, 5) (G. de Rocquigny). — *Tables de carrés* (**1896**, 40, 69). — Autre indication :

F. Retsin. — Table des carrés des nombres entiers de 1 à 10000. Gand; Ad. Hoste, $0^{fr},75$. G. Lemaire (Cochinchine).

**691.** (**1895**, 417; **1904**, 235) (R. Bricard). — *Résidus quadratiques* (**1905**, 34). — Réponse de M. E.-B. Escott, transmise à M. R. Bricard. La Rédaction.

**820.** (**1896**, 85) (G. Arnoux). — (**1896**. 259; **1897**, 82; **1905**, 77). — Autre réponse de M. A. Boutin communiquée à M. G. Arnoux.

La Rédaction.

**3201.** (**1907**, 98) (E.-N. Barisien). — *Enveloppes.* — La méthode dont j'ai fait usage est applicable à une courbe $F = 0$ quelconque. Supposons qu'on ait formé :

1° L'équation tangentielle de cette courbe : $f(A, M, N) = 0$, c'est-à-dire la condition pour que la droite $Ax + My + N = 0$ soit tangente à la courbe F;

2° L'équation *normalienne :* $\varphi(A, M, N) = 0$, c'est-à-dire la condition pour que la droite $Ax + My + N = 0$ soit normale à la courbe $F = 0$, ou la tangentielle de la développée.

Cela posé, soit $\lambda x + \mu y + \nu = 0$ l'équation de la droite dont on demande l'enveloppe.

Dans chacun des deux problèmes proposés, les droites

$$\mathrm{A}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda x + \mu y + \nu = 0$$

sont perpendiculaires l'une à l'autre et se rencontrent au même point de l'axe des $x$.

On a donc

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{A}\lambda + \mathrm{M}\mu = 0;$$

$$\frac{\nu}{\lambda} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{A}\nu - \mathrm{N}\lambda = 0.$$

De ces équations, on tire

$$\frac{\mathrm{A}}{\lambda\mu} = \frac{\mathrm{M}}{-\lambda^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mu\nu}.$$

De ces relations, connaissant $f$ et $\varphi$, on déduit immédiatement l'équation tangentielle de l'enveloppe, savoir :

Problème (1), parallèle TP menée par T à MN :

$$\psi = f(\lambda\mu, -\lambda^2, \mu\nu) = 0;$$

Problème (2), parallèle NP menée par N à MT :

$$\chi = \varphi(\lambda\mu, -\lambda^2, \mu\nu) = 0.$$

Dans le cas dont il s'agit, l'équation de l'ellipse étant

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

on a

$$f = a^2\mathrm{A}^2 + b^2\mathrm{M}^2 - \mathrm{N}^2 = 0,$$

$$\varphi = b^2\mathrm{A}^2\mathrm{N}^2 + a^2\mathrm{M}^2\mathrm{N}^2 - c^4\mathrm{A}^2\mathrm{M}^2 = 0.$$

Par suite, les équations tangentielles des enveloppes sont :

Problème (1) :

$$\psi = a^2\lambda^2\mu^2 + b^2\lambda^4 - \mu^2\nu^2 = 0;$$

Problème (2) :

$$\chi = b^2\mu^2\nu^2 + a^2\lambda^2\nu^2 - c^4\lambda^4 = 0.$$

De ces équations on peut déduire les équations cartésiennes, en éliminant respectivement $\lambda$, $\mu$, $\nu$ entre :

Problème (1) :

$$\psi = 0; \qquad \frac{\psi'_\lambda}{x} = \frac{\psi'_\mu}{y} = \frac{\psi'_\nu}{1};$$

Problème (2) :

$$\chi = 0; \qquad \frac{\chi'_\lambda}{x} = \frac{\chi'_\mu}{y} = \frac{\chi'_\nu}{1}.$$

On peut d'ailleurs, dans chaque groupe, substituer

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0$$

à une des équations.

On trouve ainsi, après des éliminations assez faciles, par les méthodes connues :

Problème (1) :

$$\Phi = 16 b^4 y^4 + b^2(-x^4 + 20 a^2 x^2 + 8 a^4) y^2 - a^2(x^2 - a^2)^3 = 0;$$

Problème (2) :

$$\Psi = a^8 y^6 + (3 a^6 b^2 x^2 - 8 a^4 b^2 c^4) y^4$$
$$+ (3 a^4 b^4 x^4 - 20 a^2 b^4 c^4 x^2 + 16 b^4 c^8) y^2 + a^2 b^6 x^6 - b^6 c^4 x^4 = 0.$$

La courbe $\Phi = 0$ comprend dans chaque quadrant une branche infinie, tangente, à son point de départ, à l'axe des $x$, à l'extrémité du grand axe.

La courbe $\Psi = 0$ comprend dans chaque quadrant (par exemple, celui des coordonnées positives) une branche limitée, tangente, au départ, à l'axe des $x$, au centre de l'ellipse, et s'éloignant de cet axe jusqu'au point $\left(x = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{c^2}{a}, \ y = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{c^2 b}{a^2}\right)$ où elle éprouve un rebroussement, pour revenir couper normalement l'axe des $x$ au point $\left(x = 0, \ y = \frac{c^2}{a}\right)$.

La tangente commune au point de rebroussement a pour coefficient angulaire $\frac{\sqrt{2}.b}{a}$.

Dans le cas de la parabole $y^2 - 2px = 0$, on obtient directement les équations cherchées qui sont :

Problème (1) :

$$27 p y^2 + 8 x^3 = 0;$$

Problème (2) :

$$y^2 + 2p(x - p) = 0$$

faciles à interpréter.

DUJARDIN.

Autres réponses de MM. T.-W. EDMONSON (New-York), LEZ et *E. A. Majol* indiquant les mêmes équations pour les deux enveloppes, et communiquées à M. Barisien.

3202. (**1907**, 98) (*Arcitenens*). — *Nombres premiers* 11...1. — (**1894**, 22; **1895**, 323; **1900**, 51; **1903**, 183). — Question déjà posée ici, au début même du Journal (**1894**, n° **57**, p. 22) et surabondamment étudiée depuis longtemps.

*Voir* **1895**, 323; **1900**, 51.

*Voir* aussi *N. A.* :

W. LOOF. — Sur les fractions décimales périodiques (1855, p. 115-117). (Au n° 13, il faut lire 53 × 79 × 265371653).

G.-E. BICKMORE. — Sur les fractions décimales périodiques (1896, p. 222-227).

A signaler aussi :

VAN DEN BROECK. — *Mathesis*, quest. **511**, 1886, p. 235.

ANTHONY. — *Mathesis*, quest. **720**, 1891, p. 175.

H. BROCARD.

Sous le titre « Variétés », dans le *Journal de Math. élém.*, 2ᵉ série, 1886, p. 160, Ed. Lucas a donné les facteurs des nombres $N = \frac{10^n - 1}{9}$ jusqu'à $n = 42$, sauf pour $n = 19, 23, 37$, où aucun facteur n'est indiqué.

Dans les *Nouv. Ann. de Math.*, t. XIV, 1855, p. 116, les facteurs donnés pour $\frac{10^{23} - 1}{9}$ sont *incorrects;* dans ce même Journal (1896, p. 225), ce dernier nombre est indiqué comme premier d'après le Dr Loof; mais, en réalité, celui-ci n'est peut-être pas absolument affirmatif.

Il n'y a pas de raison de supposer que tous les nombres

$$\frac{1}{9}(10^n - 1) > 11$$

sont premiers pour $n$ premier; tout ce qu'on sait pour les cas douteux, c'est que les facteurs premiers, s'il en existe, sont $> 112000$.

ALLAN CUNNINGHAM (Londres).
[D'après l'anglais. (LA RÉD.)]

Autres réponses de MM. ESCOTT, G. LEMAIRE, GINO LORIA, MALO et PLAKHOWO, communiquées à M. *Arcitenens*.

**3203.** (**1907**, 98) (E.-N BARISIEN). — *Combinaisons de trois chiffres.* — Je crois avoir répondu par avance aux deux questions comprises dans le n° **3203**.

La deuxième n'est que la reproduction de la question **3171** dans le cas particulier où le nombre des boules numérotées est égal au chiffre que la somme de trois d'entre elles ne doit pas atteindre. Les formules que j'ai indiquées pour le nombre des combinaisons possibles trois à trois sont au nombre de six, une pour chacun des cas qui peuvent se rencontrer dans la recherche de la divisibilité de $n$ par 6.

La solution de la première question résulte immédiatement de ces mêmes formules. Il est évident, en effet, que la différence entre le nombre des combinaisons dont la somme est inférieure à $n+1$ et le nombre des combinaisons dont la somme est inférieure à $n$ donnera le nombre de celles qui présentent une somme égale à $n$. Il suffira donc de faire les différences successives des formules indiquées pour obtenir les six expressions suivantes résolvant le problème :

| | | | |
|---|---|---|---|
| multiple de | 6 | ( 6)...... | $\frac{1}{12}[n^2-6n+12]$ |
| » | 6 + 1 | ( 7)...... | $\frac{1}{12}[n^2-6n+5]$ |
| » | 6 + 2 | ( 8)...... | $\frac{1}{12}[n^2-6n+8]$ |
| » | 6 + 3 | ( 9)...... | $\frac{1}{12}[n^2-6n+9]$ |
| » | 6 + 4 | (10)...... | $\frac{1}{12}[n^2-6n+8]$ |
| » | 6 + 5 | (11)...... | $\frac{1}{12}[n^2-6n+5]$ |

En regard de chaque formule, figure la valeur minimum que peut prendre $n$; les autres valeurs auxquelles elle s'applique s'obtiendront en ajoutant un multiple de 6 à ce chiffre minimum. Pour $n = 50$, la formule applicable est en face du chiffre 8 ($50 = 6 \times 7 + 8$), et l'on a :

$$\frac{1}{12}[50^2 - 6 \times 50 + 8] = 184.$$

PH. HATT.

La question revient à chercher le nombre des solutions entières de l'équation

$$a+b+c=n \qquad (a>b>c>0).$$

Écrivant les inconnues $x$, $x+y$, $x+y+z$, on voit qu'il s'agit du nombre des combinaisons d'entiers positifs $x$, $y$, tels que

$$2y+3x<n,$$

d'où l'on tire

$$N=\sum E\left(\frac{n-1-3x}{2}\right) \qquad (x=1,\,2,\,3,\,\ldots).$$

En traitant à part les $x$ pairs $2\mu$ et les $x$ impairs $2\mu-1$, il vient

$$N=\sum E\left(\frac{n-1}{2}-3\mu\right)+\sum E\left(\frac{n+2}{2}-3\mu\right)$$
$$(\mu=1,\,2,\,3,\,\ldots),$$

d'où enfin

$$\begin{aligned}N = {} & E\left(\frac{n-1}{6}\right)E\left(\frac{n-1}{2}\right)\\ & + E\left(\frac{n+2}{6}\right)E\left(\frac{n+2}{2}\right)\\ & -\frac{3}{2}E\left(\frac{n-1}{6}\right)E\left(\frac{n+5}{6}\right)\\ & -\frac{3}{2}E\left(\frac{n+2}{6}\right)E\left(\frac{n+8}{6}\right).\end{aligned}$$

Le nombre cherché dans la deuxième partie de la question est

$$M=\sum E\left(\frac{n-1-3x}{2}\right)E\left(\frac{n-2-3x}{2}\right)$$
$$(x=1,\,2,\,3,\,\ldots).$$

En posant donc

$$F(m)=\sum_{\nu=1}^{\left(\frac{m}{6}\right)}E\left(\frac{m}{2}-3\nu\right)E\left(\frac{m+1}{2}-3\nu\right),$$

il vient

$$M=F(n-2)+F(n+1).$$

Or, on trouve, avec la notation

$$E\left(\frac{m}{6}\right) = k,$$

$$F(m) = k\,E\left(\frac{m}{2}\right)E\left(\frac{m+1}{2}\right) - \frac{3mk(k+1)}{2} + \frac{3}{2}k(k+1)(2k+1).$$

Ainsi, pour $n = 50$,

$$M = F(48) + F(51),$$
$$F(48) = 1260, \qquad F(51) = 1528.$$

La décomposition en éléments simples des fonctions génératrices

$$\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} \quad \text{et} \quad \frac{x^7}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}$$

fournirait une solution équivalente. M. Lerch (Brünn).

1° La question posée peut s'énoncer ainsi :

De combien de manières peut-on décomposer l'entier positif $n$ en trois nombres entiers, positifs, différents et dont aucun ne soit nul?

Soit $(n', n'', n''')$ une telle décomposition et supposons, pour fixer les idées :

$$0 < n' < n'' < n'''.$$

En désignant par $x$, $y$, $t$ trois nombres entiers positifs quelconques, on pourra poser :

$$n' = 1 + x,$$
$$n'' = 2 + x + y,$$
$$n''' = 3 + x + y + z.$$

Il ne reste donc plus qu'à résoudre l'équation

$$3x + 2y + z = n - 6$$

en valeurs entières et positives. Le nombre de décompositions cherché $d_n$ est identique au nombre de systèmes de solutions de cette équation. On obtient facilement :

$$d_n = \frac{1}{72}[6n^2 - 36n + 47 + 9(-1)^n + 8(\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n)]$$

($\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, racines cubiques imaginaires de l'unité).

2° Étant donnés $n$ nombres consécutifs 1, 2, ..., $n$, de combien de manières la somme de trois de ces nombres est-elle inférieure à $n$?

Le nombre cherché $\delta_n$ s'obtient en faisant la somme

$$\delta_n = d_6 + d_7 + \ldots + d_{n-1}$$

$$\delta_n = \frac{1}{72}\left[2n^3 - 21n^2 + 66n - 55 + 9\frac{(-1)^{n-1}-1}{2} + 8\frac{\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_2^{n-1} - \varepsilon_1^n - \varepsilon_2^n}{3}\right].$$

Exemple pour $n = 50$ :

$$d_{50} = 184, \qquad \delta_n = 2788.$$

H. Kreis (Zurich).

Autres solutions de MM. Dujardin, F. Fitting, Gleizes et Mathieu, communiquées à M. Barisien.

3210. (1907, 101) (E. Lebon). — La réponse me paraît devoir être affirmative. En d'autres termes, il a été fait des remarques sur les caractères de divisibilité par les nombres premiers inférieurs à 138. Il me suffira de citer *J. E.*, 1889, p. 66 (pour 37); p. 107-110 (pour 7, 9, 11, 13, 37, 73, 101, 137); p. 121-123 (Loir) (pour 23, 43, 59) et *N. A.*, 1855, p. 118-120.

L'extension à 239, 271, 9091 et 9901 se fera sans doute aisément suivant les mêmes principes, si elle n'a été déjà effectuée ailleurs, peut-être même dans certains écrits demeurés inédits, le sujet ayant depuis longtemps fixé l'attention des chercheurs, ce qui rend difficile toute revendication de priorité. H. Brocard.

Autres réponses de MM. Mehmed Nadir (Alep) et Plakhowo (Russie), communiquées à M. E. Lebon.

M. Mehmed Nadir renvoie à l'*Encyclopédie mathématique*, d'après les *Principes de la philosophie des Mathématiques* de Wronski, par Montferrier, t. II, p. 95; M. Plakhowo renvoie à Ripert, *Enseign. math.*, 1904, p. 92. La Rédaction.

3216. (1907, 103) (A. Aubry). — *Vulgarisation des Mathématiques.* — Il y a vingt ans, je commençais la Géométrie descriptive avec un vieux professeur.

Curieux comme tous les enfants, j'ouvrais plusieurs Traités de cette science, pour voir la manière des divers auteurs. Hélas! elle

était uniforme, traditionnelle sans doute, et tous les rabattements et toutes les rotations convergeaient lentement aux problèmes du tas de sable et de la croix de pierre. Quelle mélancolie!

Inutile d'ajouter que j'étais, de suite, réfractaire à une science qui m'apparaissait aussi étroite, et que si j'ouvrais, aujourd'hui, d'autres éditions nouvelles,

La dune d'autrefois encor m'apparaîtrait!

Ainsi, ce qui manque, à mon avis, dans les Ouvrages ou dans les classes élémentaires, ce sont les applications vraiment utiles ou franchement gaies; des aperçus, tout au moins, sur les courbes de chemin de fer, le dévers des pistes, les conditions du looping, la résistance de l'hammerless, les jeux et paradoxes, etc., etc. Et ce qui manque, ou plutôt ce qui manquait de mon temps, à certains professeurs, c'est l'art de faire accepter leurs leçons et le souci de les faire aimer.

Les Mathématiques sont comme les personnes laides : elles ont besoin, pour passer, d'une compensation sérieuse, utile ou agréable.

G. Lemaire, Rachgia (Cochinchine).

3218. (**1907**, 104) (*Zed*). — Resal a donné une théorie du joint de Clémens (*Mécanique générale*, t. VII, p. 318). Il y a quelques erreurs. Je lui ai communiqué en 1890 une théorie simplifiée qu'il a adoptée et que j'ai reproduite dans le cours autographié de l'École Polytechnique (2e division, 1903-1904, p. 133). Ed. Caspari.

3219. (**1907**, 104) (N. Plakhowo). — Dans la Notice académique *Éloge de Augustin-Louis Cauchy* (lue le 10 janvier 1898), J. Bertrand a exposé des détails très circonstanciés sur la résidence et les premières années de Cauchy. Il n'y a pas fait la moindre allusion à un séjour quelconque de Cauchy ni de son père à Lyon.

J. Bertrand n'eût certainement pas manqué de le rappeler, comme donnée biographique de nature à faire impression et à redoubler la sympathique attention sur la personne de Cauchy.

L'abbé Moigno ayant, je crois, connu Cauchy, je conseillerais de vérifier aussi, dans la collection de ses *Actualités scientifiques*, le volume intitulé : *Sept leçons de Physique générale*, par Augustin Cauchy, avec une préface sur la vie et les travaux de Cauchy, par M. l'abbé Moigno, 1885.

*Note.* — Dinet fut répétiteur annuel d'Analyse à l'École Polytechnique, de 1799 à 1804, année où il fut nommé examinateur d'admission.

En 1816, il fut encore nommé à cet emploi, et Cauchy fut chargé d'un des cours d'Analyse.

En 1812, Dinet était devenu professeur au Lycée Napoléon, et un autre de ses élèves, Piobert, entra aussi à l'Institut, Académie des Sciences, le 30 mars 1840. H. Brocard.

**3225.** (**1907**, 124) (H. Laurent). — *Intégrale.* — La valeur de l'intégrale définie

$$H = \int \dots \int dx_1 \dots dx_n,$$

relative à la région

$$|x_\nu| < \frac{1}{2}, \qquad \left|\sum_\nu x_\nu\right| < \alpha \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

est donnée par la formule

$$H = \frac{1}{n!\, 2^n} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \varepsilon_\nu (n - 2\nu + 2\alpha)^n,$$

où $\varepsilon_\nu = \operatorname{sgn}(n - 2\nu + 2\alpha)$ représente le signe de la quantité entre parenthèses.

Cette formule représente différentes fonctions suivant l'intervalle dont fait partie la variable positive $\alpha$; ces intervalles sont

$$\left(\frac{n}{2}, \dots, \infty\right), \qquad \left(\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}\right), \qquad \left(\frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 1\right), \qquad \dots.$$

M. Lerch (Brünn).

**3226.** (**1907**, 125) (J. Raibaud). — *Méthode des moindres carrés.* — Le beau théorème que M. Raibaud énonce sous la forme

$$X = \frac{\Sigma x_1 \beta_1}{\Sigma \beta_1^2}$$

a été énoncé et démontré en 1902 par P.-J.-E. Goedseels dans son Cours à l'Université de Louvain (*Théorie des erreurs d'observation,* par P.-J.-E. Goedseels, administrateur-inspecteur de l'Obser-

vatoire royal de Belgique, professeur à l'Université catholique de Louvain; Louvain, Peeters, et Paris, Gauthier-Villars, 1902; n° **124**, p. 117). On trouvera en ce même Ouvrage plusieurs autres remarquables théorèmes du même capitaine-commandant Goedseels relatifs à la théorie des moindres carrés, et aussi sa Méthode très neuve (n$^{os}$ 177 et 178) et plus rapide que les anciennes pour arriver aux valeurs les plus approximatives correspondant à une série quelconque d'équations de condition linéaires. *Belga.*

Je ne saurais dire si le théorème a été énoncé, mais j'ai eu occasion de le vérifier dans un cas simple, en cherchant la position d'un point géodésique déterminé par plusieurs droites concourantes. Les expressions des inconnues $x$ et $y$ définissant la position du point d'intersection moyen sont de la forme

$$x = \frac{x_1\beta_1^2 + x_2\beta_2^2 + \ldots}{\beta_1^2 + \quad \beta_1^2 + \ldots},$$

$x_1, \ldots$ désignant les abscisses des points obtenus par les intersections des droites combinées 2 à 2; $\beta_1, \ldots$ désignant, suivant la notation de l'auteur, le dénominateur de la valeur de $x_1$.

HATT.

**3229.** (**1907**, 126) (*Nester*). — *Solution de l'équation*

$$(n^2+1)(5n^2+1) = r^2.$$

$n^2+1$ et $5n^2+1$ n'ont d'autre facteur commun que 2 ou 4. Donc : ou bien

$$n^2+1 = a^2, \qquad 5n^2+1 = b^2;$$

ou bien

$$n^2+1 = 2a^2, \qquad 5n^2+1 = 2b^2.$$

Le premier système donne $a^2 - n^2 = 1$, ce qui est évidemment impossible en nombres entiers.

$5n^2+1 = 2b^2$ est aussi impossible en nombres entiers, car 2 n'est pas résidu quadratique de 5.

L'équation proposée est donc impossible en nombres entiers quand $n > 0$. E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

Mêmes réponses de MM. A. BOUTIN, BROCARD, GLEIZES, M. LERCH (Brünn), H.-B. MATHIEU, MEISSNER (Zofingen, Suisse), S. PRIETO (Pachuca, Mexique), WOODALL (Londres).

M. A. Boutin indique aussi que $(n^2-1)(5n^2-1)$ n'est jamais un carré quand $n \neq 0$.

Autre réponse de M. Plakhowo. La Rédaction.

3230. (**1907**, 126) (*Nester*). — $a$, $b$, $m$ étant supposés entiers, on a, par la formule du binome,

$$(a+b)^m - a^m - b^m = \mathrm{M}\,abm.$$

Si, en particulier, on suppose $a = b = 1$, on voit que

$$2^m - 2 = \mathrm{M}\,m \qquad \text{(ou non)},$$

ce qui ramène la question à la notion des nombres dits *de Mersenne*.

*Voir* aussi le n° 3231.

*Note.* — A l'occasion de la même relation, E. Catalan a formulé la proposition que voici, demeurée non démontrée :

$m$ étant un nombre premier impair et P un polynome à coefficients entiers, l'équation

$$(a+b)^m - a^m - b^m = mab(a+b)\mathrm{P}^2$$

n'est vérifiée que par $m = 7$, $\mathrm{P} = a^2 + ab + b^2$ (*J. S.*, quest. **80**, 1883, p. 240).

Comparer aussi formule de Waring, et questions 70 (*N. A.*, 1843, p. 327; 1847, p. 399, 427) et 479 (*N. A.*, 1859, p. 172, 249; 1861, p. 155, 174, 264). H. Brocard.

Si le nombre $2n+1$ est un nombre premier,

$$\frac{(a+b)^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1}}{2n+1}$$

est un nombre entier.

*Voir* mon Mémoire : *La formola di Waring e sue notevoli applicazioni,* chap. II, p. 19. G. Candido (Italie).

Autres réponses de MM. E.-B. Escott, Mehmed Nadir et Plakhowo.
Autre réponse de M. Woodall (Londres), communiquée à M. *Nester*.

3231. (**1907**, 126) (*Nester*). — Les nombres $2^n - 2$ sont les doubles de certains des nombres dits *de Mersenne,* au sujet des-

quels ont été proposées ici diverses questions. Nous y renvoyons donc le lecteur, nous bornant à les préciser :

660 (**1895**, 317); **1896**, 115, 188, 281; **1901**, 176; **1904**, 74. — **1613** (**1899**, 197); **1900**, 222; **1901**, 8; **1903**, 158; **1904**. 80. — **1633** (**1899**, 219); **1900**, 38, 244). — **2622** (**1903**, 179). — **2662** (**1903**, 255; **1904**, 60).

*Voir* aussi Ed. LUCAS, *Récréations mathématiques*, t. I, 1re édit., 1882, p. 240-242; 2e édit., 1891, p. 235-236. H. BROCARD.

La solution de $N_n = 2^n - 2 \equiv 0 \pmod{n}$, quand $n$ est composé, est étudiée très en détail par M. E.-B. Escott dans le *Messenger of Mathematics*, vol. XXXVI, 1907, p. 175, 176.

Ce problème est connu sous le nom de *The converse of Fermat's theorem* et c'est aussi le titre de la Note de M. Escott.

H.-J. WOODALL (Londres).

[Traduit de l'anglais. (LA RÉDACTION.)]

Autres réponses de MM. ESCOTT, GLEIZES, PLAKHOWO. M. Escott fait remarquer que les valeurs de $n$ indiquées dans la question sont incorrectes; les plus petites valeurs de $n$ admissibles sont probablement

$$n = 11.31,\ 19.73,\ 23.89,\ 37.73,\ 3.11.17,\ \ldots.$$

**3234**. (**1907**, 147) (*Nester*). — Voir ma réponse à la question **3231** et les références bibliographiques qui y sont indiquées.

H. BROCARD.

Le nombre $2^n - 1 = N$ ne peut être premier si $n$ est composé, car il serait divisible par $2^a - 1$ si $n = ab$.

N est premier pour

$$n = 3,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17,\ 19,\ 31,\ 61.$$

N est composé pour

$$n = 11,\ 23,\ 29,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 59,\ 67,\ 73,\ 79,\ 83,\ 97,$$
$$113,\ 131,\ 151,\ 179,\ 191,\ 197,\ 211,\ 223,\ 233,\ 239,\ 251,\ \ldots.$$

N doit être composé pour $n = 89$.

Je tiens à la disposition de M. *Nester* la décomposition de ces nombres.

Consulter *I. M.*, **1903**, 158; **1904**, 80; **1901**, 8; **1903**, 183; **1904**, 74; etc.

A. GÉRARDIN.

Réponse de M. le colonel A. CUNNINGHAM (Londres), analogue aux deux précédentes.

Les nombres en question ne sont pas tous premiers, d'après ce théorème :

*Si* $n = 4q + 3$ *et est premier en même temps que* $2n + 1$, *le nombre* $N = 2^{n-1}$ *est divisible par* $2n + 1$.

Exemples : $n$ égal à 11, 23, 83, 131, ....

*Voir* FITZ PATRICK et G. CHEVREL, *Exercices d'Arithmétique*. Il y a encore d'autres exceptions (p. 364 et suiv.).

N. PLAKHOWO (Russie).

3237. (**1907**, 147) (A. BOUTIN). — *Propriétés d'un quadrangle.* — M. J. Neuberg me signale que ces propriétés ont été données par Terrier dans les *Nouvelles Annales* (1876, p. 109) et complétées par Sollertinsky. Voir *Mathesis*, 1891, article de M. Neuberg sur les quadrangles complets. Le point d'intersection des quatre cercles podaires est le centre de l'hyperbole équilatère circonscrite à ABCD. Le cas particulier des droites de Simson est dû à M. E. Lemoine (*Nouvelles Annales*, 1869).

A. BOUTIN.

Solutions de MM. L. BICKART, A. DECERF, K. HAGGE (Kolsnap, Allemagne) et MALO, communiquées à M. Boutin.

3243. (**1907**, 149) (N. PLAKHOWO). — (**1901**, 194). — *Fractions continues.* — L'historique des fractions continues est exposé dans l'*Encyclopédie fr.-all. des Sciences math.* (t. I, vol. I, fasc. 2 : *Arithmétique*, p. 163-174); on y voit que la revendication formulée en faveur de Cataldi est, pour ainsi dire, pleinement justifiée.

Il est curieux que les premières lignes des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. I, 1842, p. 1) contiennent une assertion bibliographique erronée.

A ce moment, Terquem n'y prit pas garde. C'est seulement en 1855 qu'il commença un *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathématiques*, où il fit les plus louables tentatives pour mettre en honneur les recherches d'érudition. De 1855 à sa mort, en 1862, il a publié dans ce *Bulletin* une foule de Notes des

plus précieuses. On a pu voir ici le profit qu'en a tiré l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* au point que l'on y trouvera encore la réponse à plusieurs des questions actuelles, et même à bien d'autres à venir, il n'y a aucune témérité à l'affirmer. On ne devra donc pas s'étonner que Terquem ait saisi l'occasion de préciser l'origine des fractions continues. Au *Bulletin* de 1857 (p. 62) il annonce, comme à vérifier, que Cataldi avait employé les fractions continues avant Brouncker dans son Ouvrage : *Trattato,* etc. de 1613. Effectivement, Terquem en donna la démonstration dans un article de 1858 (p. 68-77), où il rendait un compte détaillé de l'Ouvrage de Cataldi : *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadrata delli numeri,* etc. (Bologna, 1613).

L'œuvre de l'initiateur de la bibliographie mathématique en France n'a pas été continuée dans le journal qu'il avait fondé, et Gerono, qui lui survécut près de trente ans, n'a jamais paru s'y intéresser. Elle a heureusement été reprise à l'étranger avec un succès très méritoire, dans plusieurs périodiques bien connus de nos lecteurs. H. Brocard.

M. Plakhowo pourra voir, dans mon *Histoire des Mathématiques* (t. II, p. 622, 762, 766; Leipzig, 1900), la preuve documentée que c'est Bombelli qui, en 1572, a employé le premier des fractions continues dans la recherche des racines carrées. Cataldi, ayant probablement connaissance de l'Ouvrage de Bombelli, a inventé une manière presque moderne d'écrire les fractions continues.

M. Cantor (Heidelberg).

L'invention première des fractions continues a été attribuée jusqu'en ces derniers temps à des géomètres du XVII[e] siècle : les Anglais en faisaient honneur à lord Brouncker (1620-1684), les Français à Huygens (1622-1695), les Allemands à Schwenter (1585-1636), les Italiens à Cataldi (1545-1626). Chacun de ces savants a inventé les fractions continues de son côté sans connaître les travaux d'autrui.

La célèbre fraction continue de Brouncker,

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \ldots}}},$$

publiée par Wallis en 1656, dans l'*Arithmetica infinitorum*, a eu, d'après Euler, pour point de départ probablement la série de Mercator $\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$ Huygens a découvert les propriétés principales des fractions continues et les expose dans sa *Descriptio automatici planetarii* (*Op. posth.*, t. II, 1703), où il insiste sur l'analogie du développement de $\frac{a}{b}$ en fraction continue et de la méthode d'Euclide (*Éléments*, t. VII, p. 1) pour la recherche du plus grand commun diviseur entre *a* et *b*. Daniel Schwenter emploie les fractions continues dans sa *Geometria practica* (Nuremberg, 1627). Enfin, Cataldi donne l'algorithme des fractions continues dès 1613 dans son *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadrata delli numeri* (Bologne). Le Mémoire fondamental d'Euler (*Comment. Acad. Petropolit.* pour 1737, publié en 1744) donna aux fractions continues leur véritable et parfaite théorie analytique.

Leurs devanciers à tous furent, sans parler des astronomes mathématiciens de Chaldée, les Grecs, qui certainement connaissaient la loi de formation des réduites successives de la fraction continue qui représente $\sqrt{2}$. Théon de Smyrne, vers 130, possédait cette loi équivalemment, et peut-être Archimède possédait le développement analogue pour $\sqrt{3}$. Le procédé classique des *Métriques* de Héron fournit les premières réduites de la fraction continue périodique qui représente $\sqrt{A}$ ; ce procédé fut suivi au moyen âge. L'algébriste Nicolas Chuquet, en son *Triparty* (1494), pillé par Estienne de la Roche (1520), donne un procédé qui fournit toutes les réduites successives de ce même développement de $\sqrt{A}$ et, de plus, les fractions dites *intermédiaires*. L'*Algebra* de Bombelli, en 1572, envisageant la racine $\sqrt{13}$, donne une méthode générale qui fournit les réduites successives de $\sqrt{A}$. [*Cf.* les Notes de P. Tannery dans le t. I (*Arithmétique*) de l'*Encycl. des Sc. math.*, édition française de Molk.]

L'histoire des fractions continues a été faite par Favaro et par Gunther dans deux Mémoires publiés par le *Bullettino* de Boncompagni en 1874. *Belga.*

**3244.** (**1907**, 149) (N. Plakhowo). — Henri Brice Charet de Lafré-

moire; né en 1817; élève de l'École Polytechnique, promotion de 1835; sorti sous-lieutenant élève d'Artillerie; rayé des contrôles peu après; était répétiteur au collège Louis-le-Grand, à Paris, lorsqu'il publia, en 1843, un recueil intitulé : *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire* (in-8°, 439 p., 13 pl.), analysé par Terquem (*N. A.*, 1843, p. 515-516). L'Ouvrage, daté de 1844, a eu cinq éditions : la deuxième (1852), entièrement revue et corrigée par E. Catalan; la troisième (1858), revue et augmentée par E. Catalan; la quatrième (1865); la cinquième (1872).

Il en a été publié aussi une traduction allemande : *Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben elementar Geometrie.* Uebers. v. Kauffmann. Herausg. v. Reuschke. 2e édit., 1862.

Du même H. C. de Lafrémoire, un *Traité élémentaire de Géométrie descriptive,* dont la deuxième édition, revue avec soin et augmentée de plusieurs problèmes, parut en 1850-1852.

*Note.* — François Charet de Lafrémoire, frère du précédent; né en 1819; entré en 1838 à l'École Polytechnique; était, en 1855, dans les Ponts et Chaussées; ingénieur en chef en retraite à Paris en 1893.

H. Brocard.

Dans son *Traité élémentaire de Géométrie descriptive* (Paris, Victor Dalmont, éditeur), Catalan, au début de l'Avant-Propos mis en tête de la seconde Partie de l'Ouvrage, dit :

« J'ai publié, il y a deux ans, en gardant l'anonyme, une seconde édition du *Traité élémentaire de Géométrie descriptive,* par M. H. Ch. de Lafrémoire. »

F. Farjon.

H. Ch. de Lafrémoire était un ancien élève de l'École Polytechnique : en 1852, chez Victor Dalmont, libraire, et avec la collaboration d'E. Catalan, il a publié un volume in-8° (*Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*).

H. Lez.

3245. (1907, 150) (A. Aubry). — *Formule de Cusa.* — La formule $x = \frac{3\sin x}{2+\cos x}$, comme appartenant à Cusa, a été citée par Kæstner dans son *Histoire des Mathématiques,* t. I, p. 415 (Göttingen, 1796).

M. Cantor (Heidelberg).

3246. (1907, 150) (K. Hagge). — *Sur une propriété projective*

*du quadrangle.* — Je ne suis pas à même d'élucider le point de savoir si la propriété signalée par M. Hagge a été expressément énoncée sous la forme intéressante qu'il lui a donnée ; mais elle n'est autre que l'involution de six points qu'on fait remonter jusqu'à Desargues, considérée simplement sur une base curviligne du deuxième degré au lieu de la base linéaire du théorème type. En effet, si l'on opère une transformation rationnelle du deuxième ordre admettant les points $A_0$, $B_0$, $C_0$ comme sommets du triangle exceptionnel (transformation qui conserve les propriétés involutives), on est ramené à la figure fondamentale, couples de droites déterminés par quatre points donnés et coupés par une transversale,

E. Malo.

**3251.** (**1907**, 170) (H.-B. Mathieu). — *Énoncé de Lucas.* — La proposition visée dans la question **3251** doit être rectifiée ainsi :

« Si un nombre entier n'est pas congru à 0 ou à $\pm 1$ suivant le module 9, tout nombre formé en permutant les chiffres du premier d'une manière quelconque et en intercalant des 0 et des 9 n'est pas un cube parfait. »

Dans l'exemple donné, 775 est congru à 1 suivant le module 9; donc la proposition précédente ne lui est pas applicable.

Cette proposition rectifiée est, du reste, la conséquence immédiate de la première partie de l'exemple III de Lucas (*Théorie des nombres,* p. 51), dont la seconde partie fait l'objet de la présente question 3251, première partie ainsi conçue et dont la démonstration est des plus aisées :

« Le cube d'un nombre entier est congru à 0 ou à $\pm 1$ suivant le module 9. »

F. Godey.

# QUESTIONS.

**1101. [D1a] (1897, 149).** M. Jordan, dans son *Traité d'Analyse*, t. I, consacre un paragraphe à l'étude des fonctions à variation bornée.

A-t-on des exemples de fonctions bornées qui ne soient pas à variation bornée?

Est-il possible de se faire géométriquement une idée, même grossière, de telles fonctions?

On sait que si $u$, $z$ sont des fonctions positives, bornées et non décroissantes, dans l'intervalle fini $(x_0, X)$, $y = z - u$ sera à variation bornée. M.-R. DE MONTESSUS.

**1103. [C3a] (1897, 169).** Soient $n$ fonctions de $y$ de $n$ variables $x$, dépendant aussi de $r$ paramètres variables $t$, et Y le jacobien

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Quelqu'un a-t-il examiné la nature des fonctions $y$ lorsque les $t$ sont tels que Y est infiniment petit, quels que soient les $x$?

Seraient surtout géométriquement intéressantes les collinéations à déterminant infinitésimal (dégénérescences du triangle, du tétraèdre, etc.). LÉON AUTONNE.

**1104. [V9] (1897, 169).** Selon Aronhold (*Verhandlungen des Vereins für Gewerbfleiss*, t. LI, p. 144; 1872) la construction très connue, dite *de Bobillier*, se trouve dans le *Cours de Géométrie* de cet auteur, 12$^e$ édition, p. 232. Je voudrais savoir où et quand cette construction a été publiée pour la première fois. R. MEHMKE (Stuttgart).

**3308. [I19c]** J'ai trouvé quelques solutions de l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2u^3.$$

Pour $x + y = 2u$, on trouve aisément

$$(a^2m^3 + bn^3)^3 + (a^2m^3 - bn^3)^3 - (6mn^2)^3 = 2(a^2m^3)^3 \qquad (ab = 6),$$

d'où l'on déduit

$$1^3 + 7^3 - 6^3 = 2.4^3, \qquad 25^3 - 7^3 - 24^3 = 2.\ 9^3,$$
$$7^3 - 5^3 - 6^3 = 2.1^3, \qquad 35^3 + 29^3 - 12^3 = 2.32^3,$$
$$11^3 + 7^3 - 6^3 = 2.9^3, \qquad 37^3 + 35^3 - 6^3 = 2.36^3, \ldots.$$

Ayant deux solutions $(x, y, z, u)$ et $(x', y', z', u')$, on aura une nouvelle solution

$$(Mx - Nx')^3 + (My - Ny')^3 + (Mz - Nz')^3 = 2(Mu - Nu')^3,$$
$$M = xx'^2 + yy'^2 + zz'^2 - 2uu'^2, \qquad N = x^2x' + y^2y' + z^2z' - 2u^2u'.$$

Ainsi, à l'aide des précédentes solutions avec $x' = 1$, $y' = 1$, $z' = 0$, $u' = 1$ on obtient

$$90^3 + 77^3 - 5^3 = 2.84^3, \qquad 102^3 + 11^3 + 7^3 = 2.\ 81^3,$$
$$91^3 + 18^3 - 79^3 = 2.57^3, \qquad 138^3 + 91^3 - 83^3 = 2.112^3,$$
$$91^3 - 19^3 - 6^3 = 2.72^3, \qquad 187^3 + 42^3 - 179^3 = 2.\ 76^3, \ldots.$$

Soient $x' = y$, $y' = z$, $z' = x$, $u' = u$ ; il vient

$$x^3(y^3 - z^3)^3 + y^3(z^3 - x^3)^3 + z^3(x^3 - y^3)^3$$
$$= 2u^3[xy(y - x) + yz(z - y) + zx(x - z)]^3.$$

Avec $x = a^2m^3 + bn^3$ et $x' = 1$ ou $x' = a'^2m'^3 + b'n'^3$ on aura des formules plus compliquées.

Je voudrais avoir la solution complète de cette équation.

A. WEREBRUSOW.

**3309. [K21a]** Le problème :

*Mener par un point une droite sur laquelle les côtés d'un angle donné déterminent un segment donné*

est résoluble par la règle et le compas lorsque le point est sur la bissectrice de l'angle.

Qui pourrait me donner la solution dans ce dernier cas? (*Voir* Petersen, traduct. Chemin, problème 405).

Steerman.

3310. **[I19c]** Trouver une infinité de solutions en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$[(xz+1)^2+(xu-1)^2+(yz+1)^2+(yu-1)^2-2(z-u)(x+y)-4] \times [v^2+w^2] = s^2+t^2+p^2+q^2.$$

Mehmed Nadir (Alep).

3311. **[I19c]** Trouver une infinité de solutions en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$(x^2+y^2+z^2)^3 = (v^2+w^2+t^2)(u^2+s^2+p^2).$$

Mehmed Nadir (Alep).

3312. **[I19c]** Peut-on satisfaire à l'équation

$$\begin{aligned}&(1+B+B^2+\ldots+B^{2b})(1+C+C^2+\ldots+C^{2c})\ldots\\ &\quad\times(1+H+H^2+\ldots+H^{2h})(1+A+A^2+\ldots+A^{2a-1})\\ &\quad= 2A^{2a-1}B^{2b}C^{2c}\ldots H^{2h},\end{aligned}$$

où A, B, C, ..., H désignent des nombres premiers impairs, et $a$, $b$, $c$, ..., $h$ des entiers positifs? Paulmier.

3313. **[K8a]** La propriété suivante est-elle connue?

Soient $A_1A_2A_3A_4$ un quadrilatère, $P_{12}$ un point sur $A_3A_4$ tel que

$$\text{triang. } A_1A_2P_{12} = \tfrac{1}{2}\text{ quadr. } A_1A_2A_3A_4,$$

$P_{23}$, $P_{34}$, $P_{41}$ des points analogues.

Les points $P_{12}$, $P_{23}$, $P_{34}$, $P_{41}$ appartiennent à une même droite. K. Hagge (Kolsnap, Allemagne.)

3314. [M'3h] La surface spéciale du troisième degré, engendrée par un cercle passant par deux points fixes et s'appuyant sur une droite fixe, a-t-elle été étudiée avec quelque détail par la Géométrie analytique ou synthétique? L'a-t-on représentée en Géométrie descriptive? En a-t-on mis en vente un modèle en plâtre, en bois, etc.?

M. Stuyvaert.

3315. [Σ] (**1903**, 7, 39; **1904**, 1, 113, 260; **1905**, 6; **1906**, 1, 188; **1907**, 2, 146).

## PRIX ACADÉMIQUES.

### Académie royale de Belgique.

*Sujets de prix pour* 1908. — 1° On demande une contribution importante à l'étude de l'équation différentielle

$$X\,dx + Y\,dy = 0, \tag{1}$$

où X et Y désignent des fonctions données du second degré des variables $x$ et $y$.

Historique de la question. Formes canoniques de l'équation (1). Intégration sous forme finie ou infinie. Étude des courbes qui correspondent à l'équation (1) lorsque $x$ et $y$ désignent des coordonnées cartésiennes. Étude des transformations géométriques définies par cette équation lorsque $x$ et $y$ sont des variables complexes. Prix : 800$^{\text{fr}}$.

2° Exposer et compléter les recherches faites sur le calcul des variations depuis 1850. Prix : 600$^{\text{fr}}$.

Mémoires inédits, en français ou flamand, avec devise, sans nom d'auteur, à adresser à M. le Secrétaire perpétuel, Palais des Académies, Bruxelles, avant le 1$^{\text{er}}$ août 1908.

Pour plus de détails, voir *Bulletin de la classe des Sciences de l'Académie de Belgique*, 1907, p. 82-85.

La Rédaction.

3316 [M'8g] A-t-on déjà étudié la catégorie générale

des courbes définies par l'équation

$$\varepsilon_1 \rho_1 + \varepsilon_2 \rho_2 + \ldots + \varepsilon_k \rho_k = ka,$$

où $\rho_1$, $\rho_2$, ..., $\rho_k$ désignent les distances d'un point M à $k$ points fixes $M_1$, $M_2$, ..., $M_k$, et $\varepsilon_i$ des nombres tels que $\varepsilon_i^2 = 1$?

C. Stéphanos.

**3317.** [I 19c] Comment déduire de l'équation indéterminée

$$4xy = [(1-x)x + (1-y)y + 2(y+u)x - (2y+u)u]^2$$

les formules suivantes, qui donnent une infinité de solutions entières ou fractionnaires, satisfaisant à cette équation?

$$x = \left(\frac{p+q+1}{2}\right)^2,$$
$$y = \left(\frac{p-q+1}{2}\right)^2,$$
$$u = pq.$$

Dans ces relations, si $p$ et $q$ sont des entiers pairs ou impairs en même temps, on obtient pour $x$ et $y$ des valeurs fractionnaires, tandis que, si l'un d'eux est pair et l'autre impair, on a pour $x$ et $y$ des valeurs entières.

Quant à $u$, il est toujours entier.

Mehmed Nadir (Alep).

**3318.** [K6a] Si l'on désigne par $\rho$ et $\rho'$ les distances d'un point $(x, y)$ du plan de deux axes OX, OY, rectangulaires, aux deux points $(c, 0)$ et $(-c, 0)$ de l'axe OX, on a l'identité

$$(2a+\rho+\rho')(2a+\rho-\rho')(2a-\rho+\rho')(2a-\rho-\rho')$$
$$= -16a^2(a^2-c^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} - 1\right),$$

quel que soit $a$.

Cette identité peut être utilisée en plusieurs occasions, et

en particulier pour la discussion des valeurs que prend l'expression

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1$$

pour les diverses positions du point $(x, y)$ dans le plan de la conique $E = 0$.

A-t-on déjà fait usage de l'identité précédente dans quelque Traité de Géométrie analytique?

C. Stéphanos.

# RÉPONSES.

824. (**1896**, 101; **1905**, 193) (H. Brocard). — (**1906**, 101; **1907**, 79). — Dans le *Bull. de Math. Élém.*, 15 juin 1906-1907, p. 277 et suivantes, il y a quatre constructions géométriques des racines de

$$a \cos x + b \sin x = c.$$

Plakhowo (Russie).

1072. (**1897**, 122) (C. Störmer). — (**1897**, 287; **1898**, 107, 276; **1900**, 54, 201). — Réponse de M. Escott transmise à M. C. Störmer.

La Rédaction.

1076. (**1897**, 124; **1907**, 145) (*Pedro*). — *Systèmes d'équations différentielles*. — L'intégration de ces systèmes échappe aux méthodes de M. Poincaré (Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, Paris, 1896, chap. I) à cause des facteurs quadratiques dans les seconds membres. Mais l'auteur semble avoir eu en vue des applications physiques. Or il arrive souvent pour des systèmes différentiels de ce genre que l'on peut, sans faire l'intégration, indiquer assez de propriétés des intégrales pour traiter l'application dont on s'occupe, exemple : question 2839 (**1904**, 259; **1905**, 64; **1906**, 110); même, parfois, l'intégration du système n'avance à rien. Je me permettrai donc d'exprimer le vœu que pour des questions analogues à 1076, 2839, 3188 (**1907**, 75, 215, 227), l'auteur veuille bien indiquer l'application particulière mécanique ou physique visée, ou encore, s'il le préfère, la propriété analytique correspondante des intégrales dont il aurait besoin. Ainsi, s'inspirant des idées de MM. Liapounoff, Hadamard, etc., on peut remarquer que si, physiquement, $x$, $y$, $z$, $ax + a'y + a''z$, ... sont assujettis à certaines conditions telles que

$$\lambda x \frac{dx}{dt} + \mu y \frac{dy}{dt} + \nu z \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2)$$

($\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant des constantes positives convenables) soit négatif pour les petites valeurs de $|x|$, $|y|$, $|z|$, toute solution réelle $x$, $y$, $z$ correspondant pour $t = 0$ à des valeurs initiales de modules assez petits est telle que $|x|$, $|y|$, $|z|$ restent petits ou même tendent vers 0 quant $t$ croît indéfiniment. E. MAILLET.

**1401.** (**1898**, 266) (G. TARRY). — *Problème chinois.* (**1899**, 142; **1904**, 17). — *Voir* mon article du *M. M.* (mars 1907, p. 175-176) intitulé : *The converse of Fermat's theorem.*

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.)

**1761.** (**1900**, 76) (G. ENESTRÖM). — *Renseignements sur Braikenridge.* — Il s'agit du mathématicien « qui a donné la génération des coniques par deux droites mobiles pivotant autour de points fixes » (*N. A.*, 1842, p. 209).

Au British Museum se trouvent dix-huit lettres de William Braikenridge à Birch, écrites de 1732 à 1753. Par la lettre du 2 août 1732, on voit que Braikenridge avait l'intention de faire à Hampstead, où Birch demeurait, un cours de Physique expérimentale. En 1737, il parle d'une lettre qu'il avait adressée à Mac Laurin à propos d'un article publié par celui-ci dans les *Philosophical Transactions*. A partir du 23 octobre 1739, il signa Brakenridge.

A ce résumé d'une Note de M. G. Vacca (*B. M.*, 1902, p. 145) j'ajouterai que, suivant Terquem (*N. A.*, *loc. cit.*), Braikenridge était pasteur anglican. Ceci m'a déterminé à faire consulter des répertoires britanniques, où j'ai pensé avec raison que l'on trouverait de nouvelles précisions chronologiques. Et, en effet, je dois à M. le pasteur H. Dannreuther, à Bar-le-Duc, l'obligeante communication que voici d'une lettre d'un de ses collègues à Londres, M. G. Ramette : « William Brakenridge, docteur en Théologie et *fellow* de la Société royale de Londres, a publié de 1733 à 1754 des Ouvrages ou monographies sur des questions d'ordre mathématique ou sur le mouvement de la population, et il a laissé huit volumes de sermons parus en 1764. »

Voici, pour finir, une note bibliographique : *Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum, auctore Gulielmo Braikenridge* [William Brakenridge]. *Londini apud R. Hett et J. Nurse*, 1733, in-4°, VIII-70 pages. H. BROCARD.

1930. (**1900**, 334) (*Nester*). — *Triangle*. (**1901**, 70). — Réponse de M. Paulmier transmise à M. *Nester*. La Rédaction.

2074. (**1901**, 108) (G. de Rocquigny). — (**1906**, 239). — Si l'on observe que, $2^5$ une fois exprimé par une somme de 3 triangulaires, il suffira d'en ajouter deux autres pour avoir successivement $3^5$, $4^5$, $5^5$, etc., on voit que la décomposition de $2^5$ préparera toutes les suivantes et que l'on aura ainsi

$$\begin{aligned} 3^5-2^5 &= 211 = 91+120, \\ 4^5-3^5 &= 781 = 1+780, \\ 5^5-4^5 &= 2101 = 21+2080, \\ 6^5-5^5 &= 4651 = 91+4560, \\ 7^5-6^5 &= 9031 = 120+8911, \\ 8^5-7^5 &= 15961 = 561+15400, \\ 9^5-8^5 &= 26281 = 630+25651, \\ 10^5-9^5 &= 40951 = 7021+33930. \end{aligned}$$

Ainsi présentée, la décomposition de $(n+1)^5-n^5$, en deux triangulaires, paraît avoir perdu de son aspect empirique et pouvoir être formulée comme une possibilité indiscutable.

En tout cas, la décomposition désirée se trouve manifestement facilitée, puisqu'elle n'exige plus, chaque fois, que deux nouveaux triangulaires.

*Note*. — Quoique encore incomplète, cette nouvelle réponse confirme : 1° que la partition peut se faire de plusieurs manières lorsque $n$ est $> 2$; 2° que certains triangulaires peuvent figurer plusieurs fois.

Quant à une décomposition en identité algébrique, je n'ai pu l'obtenir, même pour des formes particulières de $n$.

H. Brocard.

2125. (**1901**, 186) (G. Picou). — (**1902**, 77; **1905**, 78). — Autre réponse étendue de M. Mehmed Nadir (Alep.). La Rédaction.

2361. (**1902**, 143) (G. Maupin). — (**1902**, 323). — Le *Journal des Savans*, du 26 décembre 1667, rend compte des *Nouveaux élémens de Géométrie* qui venaient de paraître chez Saureux.

L'auteur n'est pas indiqué. On le trouve au nom d'Arnauld dans le Dictionnaire de Barbier, mais il est désigné aussi dans un article de Terquem (*N. A.*, 1850, p. 409-410).

C'est dans ledit Ouvrage que se rencontre pour la première fois le terme d'anti-parallèle, avec la même acception qu'aujourd'hui.

M. P. Tannery a rapporté le témoignage de Leibniz, mais le P. Bernard Lami, de l'Oratoire, avait aussi attribué l'Ouvrage à Antoine Arnauld (*loc. cit.*, p. 410).

Il resterait à vérifier si le manuscrit a été communiqué avant l'impression. On en retrouvera peut-être la trace dans les nombreux papiers d'Arnauld, manuscrits de la Bibliothèque Nationale, *Anc. Saint-Germ. fr.*, 17798-17799, *Anc. suppl. fr.*, 13913 et *Anc. petits f. fr.*, 20945, sans parler de ses lettres. H. Brocard.

2400. (**1902**, 204) (Paulmier). — *Tracé de bissectrices.* (**1902**, 328; **1903**, 60, 314). — M. G. Lemaire nous a adressé quatre tracés simples qui ont été transmis à M. Paulmier. La Rédaction.

2414. (**1902**, 227) (Paulmier). — *Lignes d'égale teinte.* (**1903**, 133; **1904**, 290). — Réponse de M. Bastidon transmise à M. Paulmier. La Rédaction.

2415. (**1902**, 227) (Paulmier) (**1903**, 63, 168; **1904**, 290). — Réponse de M. E. Bastidon communiquée à M. Paulmier : M. E. Bastidon montre que 1121 n'est un carré dans aucun système de numération de base $2^n$, en faisant voir que l'équation indéterminée

$$(y-x-1)(y+x+1)=x^3$$

est impossible pour $x=2^n$. La Rédaction.

2566. (**1903**, 101) (Paulmier). — (**1903**, 223). — Pour la courbe d'ombre de l'hélicoïde, *voir* aussi :

G. Fouret. — Sur les surfaces de vis (*A. F.*, Paris, 1878, p. 173-179). H. Brocard.

2571. (**1903**, 102) (*Rudis*). — (**1903**, 224, 319; **1904**, 156, 242; **1905**, 53, 249; **1906**, 243; **1907**, 132). — Réponse de M. Escott transmise, après traduction de l'anglais, à M. *Rudis*.

La Rédaction.

2779. (**1904**, 115) (H. Brocard). — (**1904**, 247; **1905**, 57). — Lorsque j'ai posé la question en 1896 dans *Mathesis* (n° 1058) et ici en 1904, je désirais avoir le détail de toutes les opérations arithmétiques sur un exemple numérique. Les réponses données (*M.*, 1897, p. 149) et *I. M.* (*loc. cit.*) ont seulement fait mention d'Ouvrages où se trouvait indiquée une solution. Si j'y reviens aujourd'hui, c'est pour ajouter à cette liste un Ouvrage où la solution est exposée complètement sur un exemple numérique à trois et à quatre indéterminées. Il s'agit des *Problèmes* de Bachet, réédition Labosne, 1879, note III, p. 234-238.

*Note.* — Pour une question analogue, mais plus particulière, *voir* C. Brisse (*N. A.*, **1874**, p. 34). H. Brocard.

2855. (**1904**, 285) (E. Maillet). — *Erreurs des mathématiciens* (**1905**, 275; **1906**, 65, 110, 150, 200, 248; **1907**, 31). — Autres réponses de MM. E.-B. Escott, L. Prieto et Carlos Rodriguez (Mexico).

La Rédaction.

2909. (**1905**, 103) (C. Berdellé). — *Systèmes de numération.* (**1905**, 234, 255). — Réponse de M. Mehmed Nadir transmise à M. Berdellé. La Rédaction.

2950. (**1905**, 198) (H. Renan). — *Sphère de Monge.* — Voir *Correspondance sur l'École Polytechnique,* 1808-1809-1813.

O. Terquem, *N. A.*, 1846, p. 617

G. Loria, *Teorie geometriche,* 1896, p. 93.

*Note* de Terquem (*loc. cit.*). — Le théorème de Monge [relatif au lieu du sommet d'un trièdre trirectangle tritangent à un ellipsoïde] a été démontré pour la première fois par Poisson, par le moyen employé ci-dessus [analytiquement], en faisant usage des relations de Lagrange (*Corr. sur l'Éc. Polyt.*, t. I, p. 23, publiée en 1808). Du reste, ce théorème n'est plus qu'un cas particulier du théorème sur les surfaces confocales qu'on doit à M. Dupin et dont il est convenable de donner de suite une démonstration pour le cas général; une propriété analogue existe pour deux coniques confocales, qui, lorsqu'elles se confondent, donnent lieu au théorème sur l'angle droit circonscrit à une conique, déjà connu des anciens et qu'on rencontre dans tous les Traités élémentaires.

*Remarque.* — La *Correspondance* susmentionnée, fondée en 1804 par Hachette et Lermina, a cessé en 1816 après avoir compté 18 cahiers formant trois Volumes.

Je ne suis pas en mesure de les consulter, mais j'insiste sur la nécessité de s'y référer pour préciser certains détails bibliographiques.

J'ignore sur quel témoignage Terquem attribue aux anciens le théorème du cercle orthoptique de l'ellipse; mais je signale, d'après M. T. Lemoyne, que ce théorème est énoncé dans l'Ouvrage de La Hire, *Sectiones conicæ*, n° LVIII, 1685. H. Brocard.

2977. (**1905**, 267) (G. Lemaire). — *Système d'équations.* (**1906**, 72, 152). — Autre réponse de M. E.-N. Barisien transmise à M. G. Lemaire. La Rédaction.

2998. (**1906**, 6) (G. Lemaire) (**1907**, 135). — Réponse de M. G.-A. L'Hommedé (Los Angeles, Californie) transmise à M. G. Lemaire. La Rédaction

3002. (**1906**, 7) (Nazarevsky). — *Transformation algébrique.* (**1907**, 135). — Autre réponse de M. Werebrusow transmise à M. Nazarevsky. La Rédaction.

3005. (**1906**, 8) (Nazarevsky). — *Valeur résiduelle de*

$$1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}.$$

(**1906**, 131). — Autre réponse de M. E.-B. Escott transmise, après traduction de l'anglais, à M. Nazarevsky. La Rédaction.

3034 (**1906**, 62) (H.-B. Mathieu). — *Équation indéterminée.* (**1906**, 255; **1907**, 32, 70). — Autre réponse de M. Werebrusow (Russie) qui sera transmise à M. H.-B. Mathieu, quand il nous aura fait connaître son adresse actuelle. La Rédaction.

3039. (**1906**, 88) (*Balbus*). — (**1907**, 135). — *Extrait d'une réponse de M. Rius y Casas :*

Il y a bien plus de 10 carrés répondant à la question. J'en ai trouvé 84. Mon procédé, réduit au calcul des carrés des multiples de 3, doit m'avoir donné théoriquement tous les carrés répondant à

la question, et il sera bien facile de constater les erreurs ou omissions commises. Il est à noter que, parmi les multiples de 3, deux consécutifs, 65634 et 65637, ont leurs carrés répondant à la question.

J. Rius y Casas (Saragosse).

La liste des 84 carrés a été transmise à M. *Balbus*.

La Rédaction.

3045. (**1906**, 91) (*Crut*). — *Calcul des rayons d'une lentille biconvexe*. (**1906**, 271). — Autre réponse de M. Escott transmise à M. *Crut*.

La Rédaction.

3048 *bis*. (**1906**, 93) (A. Boutin). — *Équation indéterminée*. (**1906**, 228; **1907**, 136). — Autre réponse de M. Werebrusow (Russie) transmise à M. Boutin.

La Rédaction.

3090. (**1906**, 186) (R. Guimaraes). — *Trisection de l'angle* (**1907**, 107). — On nous permettra de compléter et de rectifier le dernier alinéa de la réponse de M. Brocard.

On peut évidemment faire la trisection de l'arc par la règle et le compas, si l'arc est soustendu par le côté d'un polygone régulier de $p$ côtés inscriptible au cercle par la règle et le compas. On sait, depuis Gauss (1801), que les polygones réguliers inscriptibles par la règle et le compas sont ceux où $p$ est de la forme $2^n (n = 2, 3, 4, \ldots)$, *ou* premier et de la forme $2^h + 1$, *ou* le produit de $2^m (m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ par un ou plusieurs facteurs premiers différents entre eux de la forme $2^h + 1$. Du reste, pour que $2^h + 1$ soit premier, il faut, mais il ne suffit pas, que $h$ soit une puissance de 2. On a réussi à construire par la règle et le compas les polygones réguliers de $p$ côtés pour $p = 3$; pour $p = 5$ (Euclide); pour $p = 17$ (Gauss, le 30 mars 1796): pour $p = 257$ (J. Richelot, *J. de Crelle*); pour $p = 65537$ (Hermès, *Götting. Nach.*); c'est-à-dire pour $h = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$.

*Belga*.

3093. (**1906**, 187) (G. Lemaire). — *Histoire du planimètre*. (**1907**, 44, 108). — Il convient d'ajouter à la liste donnée par M. Brocard un Mémoire important indiqué dans ma réponse à 2867 (**1905**, 142):

O. Henrici. — *Report on Planimeters* (*R. B. A.*, **1894**, p. 496-523).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

3123. (**1906**, 260) (G. Lemaire). — (**1907**, 112). — La question n'est pas nouvelle, ou plutôt les solutions 120 et 720 ont été déjà signalées ici par M. Hoffbauer (rép. 956, **1897**, 276).

H. Brocard.

3128. (**1906**, 261) (G. Lemaire). — (**1907**, 182). — Comme le suppose M. Brocard, Laussedat parle effectivement de Mohammed Bagdadinus, dont le Traité a été traduit en latin, probablement par Gérard de Crémone, et publié en 1570 à Pesaro par F. Commandino. D'un autre côté, cet écrit ne saurait guère être appelé un Traité d'arpentage; de fait il s'y agit de diviser un polygone en une raison donnée par une ligne satisfaisant à certaines conditions. Si M. Lemaire désire prendre connaissance du contenu essentiel de l'écrit, il peut consulter un article de F. Woepcke dans le *Journal asiatique*, 1851, sept.-oct. Il y a une notice spéciale publiée à Ulm en 1853 par L.-F. Ofterdinger sur l'écrit de Mohammed Bagdadinus, et d'importants renseignements sur la question ont été donnés par J.-L. Heiberg dans ses *Literargeschichtliche Studien über Euclid* (Leipzig, 1882), p. 13-15, 36-37. G. Eneström (Stockholm).

3161. (**1907**, 29) (Issaly). — *Aire d'une surface ou d'une pseudo-surface.* — L'*identité de forme* relative à l'expression de l'aire, soit d'une surface, soit d'une pseudo-surface, se justifiant d'elle-même par le simple procédé qui sert à l'établir, il est aisé de reconnaître que, lorsque des lieux de ce genre sont respectivement représentés par les équations particulières

$$(1)\qquad dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad = p\,dx + q\,dy,$$

$$(2)\qquad dz = \varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy = \mathfrak{p}\,dx + \mathfrak{q}\,dy,$$

leurs aires le sont par les formules correspondantes

$$(3)\qquad \int\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy, \qquad \int\int\sqrt{1+\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2}\,dx\,dy.$$

Cela étant, arrêtons-nous au cas, plus particulier encore, où l'on a

$$q = ip \qquad \text{ou bien} \qquad \mathfrak{q} = i\mathfrak{p}.$$

Comme ces hypothèses entraînent les conditions

$$p^2 + q^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 = 0,$$

on voit qu'alors nos deux aires (3) sont ***égales entre elles*** et, chose exorbitante, on peut le dire, ***égales*** aussi à leur ***projection commune*** $\int\int dx\,dy$.

Or, qu'on n'allègue pas qu'un tel cas est quasi-chimérique, puisqu'il n'est autre que celui des pseudo-surfaces

$$(4) \qquad dz = (u + iv)(dx + i\,dy),$$

dont l'équation différentielle joue, on le sait, un si grand rôle dans l'Analyse contemporaine.

Pour n'en faire ici qu'une application, exprimons que ces mêmes pseudo-surfaces (3) se transforment en surfaces. Cela exige que l'on ait

$$\frac{\partial(u + iv)}{\partial y} = i\,\frac{\partial(u + iv)}{\partial x};$$

d'où, en décomposant,

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

La transformation n'a donc lieu que si nos pseudo-surfaces deviennent des ***surfaces analytiques***.

Pareillement, on peut dire que les deux pseudo-surfaces partielles ***réelles***

$$(6) \qquad dz = v\,dx + u\,dy,$$

$$(7) \qquad dz = u\,dx - v\,dy$$

doivent se transformer simultanément en surfaces, réelles aussi et ayant, remarquons-le, pour expression commune de leurs aires respectives, l'intégrale

$$\int\int \sqrt{1 + u^2 + v^2}\,dx\,dy.$$

*Nota.* — De tels rapprochements ne sont-ils pas aptes à répandre, par surcroît, un jour tout nouveau sur notre question 3023, concernant la célèbre intégrale de Cauchy (dont nous modifions légèrement la notation), savoir

$$(8) \qquad \int_C dz = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\,d\zeta = \int_C (u + iv)(dx + i\,dy),$$

laquelle est précisément, par sa différentielle, du type (4) ci-dessus?

ISSALY.

3165. (**1907**, 30) (*Zed*). — *Systèmes d'équations.* — La marche suivie dans l'*Intermédiaire* (**1906**, 126) pour établir la méthode d'approximation de Newton dans le cas d'une équation à une inconnue s'étend facilement aux équations à plusieurs inconnues. Supposons le cas de deux variables et les équations ramenées à la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} 0 = a_0 - x + \Sigma a_{m,n} x^m y^n, \\ 0 = b_0 - y + \Sigma b_{m,n} x^m y^n \end{cases} \qquad (m+n>1).$$

Considérons les équations *majorantes*

$$(2)\qquad \begin{cases} 0 = \alpha_0 - \xi + \Sigma \alpha_{m,n} \xi^m \eta^n, \\ 0 = \beta_0 - \eta + \Sigma \beta_{m,n} \xi^m \eta^n \end{cases} \qquad (m+n>1),$$

où

$$(3)\qquad \alpha_{m,n} \geqq (a_{m,n}), \qquad \beta_{m,n} \geqq (b_{m,n}).$$

Lorsqu'il y a des valeurs positives de $\xi$ et $\eta$ rendant négatifs les seconds membres des équations (2), leur ensemble forme une aire fermée et les coordonnées $(\xi_1, \eta_1)$ du point de cette aire le plus voisin de l'origine constituent un système de solutions de ces équations (2). On a

$$\xi_1 > \alpha_0, \qquad \eta_1 > \beta_0,$$

et, si l'on pose

$$\xi = \alpha_0 + \xi', \qquad \eta = \beta_0 + \eta',$$

les équations entre $\xi'$, $\eta'$ pourront se mettre sous la même forme que les équations (2) :

$$0 = \alpha'_0 - \xi' + \Sigma \alpha'_{m,n} \xi'^m \eta'^n, \qquad 0 = \beta'_0 - \eta' + \Sigma \beta'_{m,n} \xi'^m \eta'^n,$$
$$m+n>1,$$

les quantités $\alpha'$ et $\beta'$ étant positives.

En continuant ainsi on a deux séries

$$(4)\qquad \alpha_0 + \alpha'_0 + \ldots + \alpha_0^k + \ldots, \quad \beta_0 + \beta'_0 + \ldots + \beta_0^k + \ldots,$$

qui sont convergentes si le point $\xi_1$, $\eta_1$ existe et tendent vers ces valeurs $\xi_1$, $\eta_1$.

Désignons par $\gamma_{m,n}$ la plus grande des quatre quantités

$$\alpha_{m,n}, \quad \alpha_{n,m}, \quad \beta_{m,n}, \quad \beta_{n,m};$$

si l'équation

$$0 = \gamma_0 - \zeta + \Sigma \gamma_{m,n} \zeta^{m+n}$$

a une racine positive, cette racine est supérieure à $\xi_1$ et à $\eta_1$; mais la plus petite des racines de cette dernière équation est inférieure à $2\gamma_0$; donc, dans ce cas, $\xi_1$ et $\eta_1$ sont tous deux inférieurs à la plus grande des deux quantités $2\alpha_0$, $2\beta_0$; en tous cas, on voit que la somme des termes qui suivent le $k^{\text{ième}}$ dans les séries (4) est plus petite que la plus grande des deux quantités $2\alpha_0^k$, $2\beta_0^k$, pour $k$ suffisamment grand.

Revenant aux équations (1) et opérant comme tantôt sur les équations (2), on obtient deux séries

$$x_1 = a_0 + a'_0 + \ldots + a_0^k + \ldots, \qquad y_1 = b_0 + b'_0 + \ldots + b_0^{(k)} + \ldots,$$

qui sont absolument convergentes, en même temps que les séries (4)

$$\alpha_0^k \geqq (a_0^k), \qquad \beta_0^k \geqq (b_0^k);$$

$x_1$, $y_1$ constituent un système de solutions des équations et il n'y en a pas d'autres tels que $|x| < \xi_1$ et $|y| < \eta_1$; de plus l'erreur, en s'arrêtant au $k^{\text{ième}}$ terme dans ces séries, a un module plus petit que le double de la plus grande des quantités $|a_0^k|$, $|b_0^k|$. A. Pellet.

Autre réponse de M. *Lambda*.

3170. (1907, 50) (E.-N. Barisien). — (1907, 164). — Solution de M. L. Dujardin analogue à celles déjà parues. Les six dernières lignes de la page 165 (de M. Gleizes) constituent une réponse à 3172 (1907, 50, 166) et non à 3170. La Rédaction.

3172. (1907, 50) (*Arcitenens*). — (1907, 166). — Solution de M. L. Dujardin analogue à celles déjà parues. Les six dernières lignes de la page 165 (de M. Gleizes) constituent une réponse à 3172 et non à 3170. La Rédaction.

3173. (1907, 50) (R. de Montessus). — *Bibliographie des jeux.* — Réponse de M. Plakhowo transmise à M. de Montessus.

La Rédaction.

3175. (1907, 51) (G. Lemaire). — *Étymologie d'almanach.* — Réponses de MM. Plakhowo (Russie) et A. Terracini (Turin) transmises à M. G. Lemaire. La Rédaction.

3180. (1907, 52) (*Trinitario*). — Supprimant diverses conditions étrangères et manifestement surabondantes, on pourra réduire l'énoncé 2° à ceci :

On donne deux axes de coordonnées $cX$, $cY$, les points $a$ sur $cX$, $b$ sur $cY$, $\gamma$ sur $ab$. On prend un point $\alpha$ sur $cX$, $\beta$ sur $cY$, et l'on suppose le triangle $\alpha\beta\gamma$ d'aire constante S. Quelle est l'enveloppe du côté $\beta\gamma$?

Les propriétés visées étant projectives, on pourra supposer les axes rectangulaires.

Ainsi posée, la question peut encore être simplifiée en observant que, si l'on désigne par $(a, b)$ les coordonnées du point $\gamma$, la situation de la droite $a\gamma b$ devient indifférente.

On a donc, simplement, à chercher l'enveloppe d'une sécante $\alpha\beta$, telle que l'aire $\alpha\beta\gamma$ soit constante.

Ce problème est classique et facile à traiter.

Les sommets du triangle $\alpha\beta\gamma$ ayant pour coordonnées $(\alpha, 0)$, $(0, \beta)$, $(a, b)$, on a donc à chercher l'enveloppe de la droite

$$\alpha y + \beta x - \alpha\beta = 0, \tag{1}$$

sous la condition

$$a\beta + b\alpha - \alpha\beta - 2S = 0. \tag{2}$$

L'enveloppe a donc pour équation

$$(ay - bx - 2S)^2 - 8S(b - y)x = 0.$$

La nature de cette conique dépendra de la situation du point $\gamma(a, b)$ par rapport à l'hyperbole équilatère

$$xy = ab.$$

La question 1° sera maintenant simplifiée et pourra s'énoncer ainsi :

On donne la droite (1), la condition (2) et les points fixes $a'(p, q)$, $b'(p', q')$. On joint $\alpha b'$, $\beta a'$ qui se rencontrent en un point $(x)$. Trouver le lieu de ce point.

Les équations des droites $\alpha b'$, $\beta a'$ se réduisant à

$$\alpha = \frac{py - qx}{y - q}, \tag{3}$$

$$\beta = \frac{q'x - p'y}{x - p'}, \tag{4}$$

il reste à éliminer $\alpha$, $\beta$ entre les trois équations (2), (3), (4). Le lieu cherché est donc encore une conique.

*Note.* — Ces deux questions ne sont pas nouvelles. Ce sont des exercices depuis longtemps classiques et que bien de nos lecteurs retrouveront dans leurs cahiers, ou dans leurs souvenirs, et sans doute aussi dans des recueils mathématiques. H. BROCARD.

**3184.** (**1907**, 52) (G. DE SANTIS). — *Équation indéterminée.* (**1907**, 167). — Réponse de M. GÉRARDIN analogue aux réponses déjà parues.
LA RÉDACTION.

**3185.** (**1907**, 53) (G. DE SANTIS). — *Équation indéterminée.* (**1907**, 168, 192, 213). — M. Barisien ayant désiré connaître les formules de Lagrange mentionnées dans la réponse de M. Malo (**1907**, 168), celui-ci nous a adressé une Note communiquée à M. Barisien, et dont voici un extrait :

Les formules dont il s'agit se trouvent dans les *Additions à l'Algèbre* d'Euler (section IX), réimprimées dans les Œuvres complètes de Lagrange (t. VII, p. 164 et suivantes). Les voici pour le second degré :

En posant

$$u = xz - qyt, \qquad v = xt + yz - pyt,$$

on a identiquement

$$u^2 + puv + qv^2 = (x^2 + pxy + qy^2)(z^2 + pzt + qt^2).$$

(On peut indiquer des formules un peu plus générales que celles de Lagrange.)

Pour ce qui est de la démonstration, je renverrai au texte même de Lagrange, l'édition (Imprimerie nationale) des Œuvres complètes ne manquant à aucune bibliothèque de chef-lieu de département français. LA RÉDACTION.

**3197.** (**1907**, 77) (*Pysurneuf*). — *Équation transcendante.* (**1907**, 236). — Autres solutions de MM. A. GÉRARDIN et MEHMED-NADIR. LA RÉDACTION.

**3208.** (**1907**, 101) (L. BICKART). — *Théorème sur le quadrilatère.* Au cours d'une étude sur le quadrilatère, j'avais établi, il y a

quelques mois, une proposition qui n'est qu'un corollaire immédiat du théorème de M. Bickart, savoir : *Si, dans chaque trilatère, dérivé d'un quadrilatère donné par la mise à part d'un des côtés successivement, on mène à la droite d'Euler une perpendiculaire par le centre du cercle de Feuerbach, les quatre droites ainsi obtenues concourent en un même point.* Je ne m'étais pas avisé de l'énoncé plus général qui fait l'objet de la question 3208, et même, en ce qui concerne la proposition restreinte, je dois dire qu'après l'avoir aperçue fortuitement au cours d'une construction graphique, je n'en avais vérifié l'exactitude que par des calculs fondés sur l'emploi des coordonnées trilinéaires et d'une extrême complication.

Ce n'est pas sans peine que je suis enfin parvenu à une solution complète, directe et élémentaire, telle que M. Bickart la désire.

Soit

$$y^2 - 4sx - 4s^2 = 0$$

l'équation d'une parabole rapportée à son axe et à la droite perpendiculaire menée par le foyer : l'équation d'une tangente sera

$$x + \theta y + s(1 + \theta^2) = 0,$$

$\theta$ désignant la tangente trigonométrique de l'inclinaison de la tangente sur la directrice, et j'aurai un certain quadrilatère circonscrit à la parabole en attribuant à $\theta$ quatre valeurs arbitraires $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, $\theta_4$. Je supposerai que ces valeurs soient les racines de l'équation

$$\theta^4 - P\theta^3 + Q\theta^2 - R\theta + S = 0,$$

et je poserai encore

$$\frac{\theta^4 - P\theta^3 + Q\theta^2 - R\theta + S}{\theta - \theta_4} = \theta^3 - p\theta^2 + q\theta - r,$$

de sorte que les paramètres P, Q, R, S et $p$, $q$, $r$ seront liés par les relations

$$P = p + \theta_4, \qquad Q = q + p\theta_4, \qquad R = r + q\theta_4, \qquad S = r\theta_4.$$

Cela posé, je me contente d'énoncer :

1° Que le centre $O_4$ du cercle circonscrit au triangle des tangentes $(\theta_1)$, $(\theta_2)$, $(\theta_3)$ a pour coordonnées

$$\alpha = -\frac{s}{2}(1 - q), \qquad \beta = -\frac{s}{2}(p - r),$$

et que le carré du diamètre de ce cercle a pour valeur

$$s^2(1+\theta_1^2)(1+\theta_2^2)(1+\theta_3^2);$$

2° Que les coordonnées de l'orthocentre $H_4$ du même triangle sont

$\xi = -2s$ (Steiner), $\quad \eta = -s(\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_1\theta_2\theta_3) = -s(p+r)$;

3° Que le centre de gravité des orthocentres des quatre triangles compris dans le quadrilatère a pour ordonnée

$$-\frac{s}{4}(P+3R).$$

Je considère maintenant, *sur la parallèle à l'axe menée par ce centre de gravité*, un point I, dont je désignerai l'abscisse par $\rho s$, de manière à pouvoir faire abstraction de $s$ : le carré de la distance du point I à l'orthocentre du triangle des tangentes $(\theta_1)$, $(\theta_2)$, $(\theta_3)$ sera, au facteur $s^2$ près,

$$\overline{IH}_4^2 = (\rho+2)^2 + [p+r-\tfrac{1}{4}(3P+R)]^2;$$

le carré de la distance du même point I au centre du cercle circonscrit au triangle sera

$$\overline{IO}_4^2 = [\rho+\tfrac{1}{2}(1-q)]^2 + [\tfrac{1}{2}(p-r)-\tfrac{1}{4}(3P+R)]^2.$$

Si je suppose les deux distances égales, $\rho$ devra satisfaire à l'équation

$$4(q+3)\rho = (q+3)(q-5) + (p+3r)(3P+R-3p-r).$$

On a, du reste, en vertu des relations entre les coefficients P, Q, R, S, $p$, $q$, $r$,

$$3P+R = 3p+r+(q+3)\theta_4$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} 4\rho &= q-5+(p+3r)\theta_4, \\ &= (q+p\theta_4)+3(r\theta_4)-5, \\ &= Q+3S-5. \end{aligned}$$

La valeur de $\rho$ étant fonction linéaire des coefficients de l'équation déterminatrice des quatre côtés du quadrilatère simultanément, la proposition restreinte mentionnée tout d'abord est établie.

Pour aller plus loin, il me faut invoquer le théorème suivant,

qu'on démontrera sans peine et qui fournit une description graphique intéressante des coniques à centre : *Pour obtenir le rayon du cercle bitangent à une telle conique, décrit d'un point donné de l'axe non focal comme centre, il suffit de diviser par l'excentricité le rayon du cercle concentrique qui passe par les foyers.*

Le carré de l'inverse de l'excentricité est, pour la conique inscrite dans le triangle des tangentes $(\theta_1)$, $(\theta_2)$, $(\theta_3)$, et admettant la droite d'Euler pour axe, le rapport du carré du rayon du cercle circonscrit au carré de la distance $\overline{O_4 H_4}$, c'est-à-dire

$$\frac{4(1+\theta_1^2)(1+\theta_2^2)(1+\theta_3^2)}{(q+3)^2+(p+3r)^2}.$$

Le carré du rayon $\overline{IH_4}$ a, d'autre part, pour valeur, d'après la valeur de $\rho$ portée dans l'expression $(\rho+2)^2+[p+r-\frac{1}{4}(3P+R)]^2$, et en rétablissant le facteur $s^2$,

$$\frac{s^2}{16}[(q+3)^2+(p+3r)^2](1+\theta_4^2);$$

le rayon du cercle bitangent a donc pour carré

$$\frac{s^2}{16}(1+\theta_1^2)(1+\theta_2^2)(1+\theta_3^2)(1+\theta_4^2);$$

*ce qui est le carré du rayon du cercle passant à la fois par le foyer de la parabole et par les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles de tangentes, autrement dit, du cercle principal du quadrilatère.*

Le théorème de M. Bickart est donc complètement établi en même temps que deux propriétés intéressantes de la figure considérée.

E. Malo.

3222. (1907, 122) (Mehmed-Nadir). — Racines de

$$17x^3 \equiv 1113 \pmod{11231}.$$

— Les valeurs demandées de $x$ sont 115, 1468 et 7606.

A. Cunningham, E.-B. Escott, E. Malo, Woodall.

Autre réponse de M. A. Gérardin.

M. A. Cunningham utilise : 1° son travail *Binary Canon extension* préparé en commun avec M. H.-J. Woodall, dont la publica-

tion est sans doute prochaine, et qui donne les résidus de $2^n \pmod p$, $n \leqq 100$, $p$ premier $\leqq 10000$ ; 2° une Table des racines de $x^3 \equiv 1 \pmod p$, allant jusqu'à $p \leqq 50000$, et qu'il compte bientôt publier.

M. H.-J. Woodall utilise sa *Table des résidus des puissances de* 10 donnant les résidus des 30 premières puissances de 10 au moins mod $p^n$ ($p$ 1$^{er}$, $p^n \leqq 10000$). LA RÉDACTION.

3234. (1907, 147) (*Nester*). (1907, 259). — Le nombre $2^n - 1$, $n$ étant impair, n'est pas toujours un nombre premier.

En effet,

$$2^9 - 1 = 511 = 7.73,$$
$$2^{11} - 1 = 2\,047 = 23.89,$$
$$2^{15} - 1 = 32\,767 = 7.31.151.$$

MEHMED NADIR (Alep.)

Réponse analogue de M. LEMAIRE.

3242. (1907, 149) (G. RUSSO). — *Solution d'un problème de Planude.* — Soit un rectangle MNPQ, de base MN $= b$ et de hauteur NP $= h$.

Si, par un point quelconque I de la diagonale NQ, on trace AB parallèle à MN et CD parallèle à NP, les rectangles MCIA et IBPD sont équivalents, et l'on peut écrire

$$\frac{\text{MNBA}}{\text{MCDQ}} = \frac{\text{CNPD}}{\text{MCDQ}} = \frac{\text{IB}}{\text{IA}}.$$

Or, en choisissant le point I sur la bissectrice de l'angle P, les rectangles MNBA et MCDQ sont isopérimètres.

Donc il suffit, pour répondre aux conditions voulues, de poser

$$\frac{\text{IB}}{\text{IA}} = q \qquad \text{et} \qquad \frac{\text{IN}}{\text{IQ}} = \frac{h}{b}.$$

Un calcul de triangles semblables donne ensuite

$$\text{MN} = b, \qquad \text{NB} = \frac{bq^2}{1+q};$$
$$\text{MC} = \frac{b}{1+q}, \qquad \text{CD} = bq;$$

d'où, avec l'hypothèse $b = q^2 - 1$, les formules de Planude :

$$q^2 - 1, \quad q^3 - q^2;$$
$$q - 1, \quad q^3 - q.$$

G. LEMAIRE.

3265. (1907, 194) (S. PRIETO). — Cette propriété a été signalée, rappelée ou retrouvée à diverses reprises. Je crois qu'elle est due à Plücker.

*Voir* aussi : MARINI (*N. A.*, 1864, p. 327); A. MILINOWSKI (*Elem. synt. Geom. der gleich. Hyperbel.*, 1883); P.-H. SCHOUTE (*A. F.*, Blois, 1884, p. 43); H. BROCARD (*M.* 1886, p. 13 et *Le Trifolium, J. S.*, 1891, p. 126 et *Supplément à Mathesis* pour 1892).

La construction susmentionnée a été d'ailleurs retrouvée par d'autres chercheurs; elle se présente assez naturellement comme corrélative à celle de la circonférence, avec laquelle on sait que l'hyperbole équilatère présente de nombreuses analogies.

Peut-être conviendrait-il de vérifier si elle n'est pas énoncée dans l'article de Plücker intitulé : *Recherche graphique du cercle osculateur pour les lignes du second ordre* (*A. G.*, septembre 1826, t. XVII, p. 69-72).

H. BROCARD.

Autre réponse de M. RETALI.

# TABLE DES QUESTIONS ET RÉPONSES.

Chacune des questions publiées dans le Tome XIV porte le numéro d'ordre avec lequel elle a été publiée. Les autres nombres de la Table indiquent les pages du Volume.

Nous avons cru inutile de continuer à signaler les Réponses ou Notes en portefeuille. L'indication des solutions reçues est, en effet, toujours mentionnée au fur et à mesure dans les *Avis divers* annexés aux numéros mensuels de l'*Intermédiaire* (troisième page de la couverture).

| Questions posées. Tome I (1894). | | Réponses. Tome XIV. |
|---|---|---|
| | Page. | Page. |
| 7. | 2 | 247. |

| Tome II (1895). | | Tome XIV. |
|---|---|---|
| | Pages. | Pages. |
| 416. | 5 | 247. |
| 637. | 314 | 175. |

| Tome II (1895). | | Tome XIV. |
|---|---|---|
| | Pages. | Pages. |
| 675. | 346 | 9. |
| 691. | 417 | 247. |

| Tome III (1896). | | Tome XIV. |
|---|---|---|
| | Pages. | Pages. |
| 728. | 30 | 79. |
| 755. | 37 | 55, 127. |
| 817. | 85 | 56. |

| Tome III (1896). | | Tome XIV. |
|---|---|---|
| | Pages. | Pages. |
| 820. | 85 | 247. |
| 824. | 101 | 79, 271. |
| 837. | 107 | 56. |

| Tome IV (1897). | | Tome XIV. |
|---|---|---|
| | Pages. | Pages. |
| 983. | 28 | 79. |
| 1015. | 51 | 127. |
| 1018. | 51 | 11, 129. |
| 1046. | 97 | 80. |

| Tome IV (1897). | | Tome XIV. |
|---|---|---|
| | Pages. | Pages. |
| 1069. | 122 | 175. |
| 1072. | 122 | 271. |
| 1076. | 124 | 271. |

| Tome V (1898). | | Tome XIV. |
|---|---|---|
| | Page. | Page. |
| 1401. | 266 | 272. |

| Questions posées. Tome VI (1899). | Page. | Réponses. Tome XIV. Page. |
|---|---|---|
| 1477. | 74 | 57. |

| Tome VII (1900). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 1761. | 76 | 272. |
| 1886. | 236 | 130. |
| 1910. | 270 | 81. |

| Tome VIII (1901). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 2052. | 82 | 81, 178. |
| 2074. | 108 | 273. |

| Tome IX (1902). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 2254. | 3 | 131. |
| 2285. | 36 | 59. |
| 2360. | 143 | 131. |
| 2361. | 143 | 273. |

| Tome X (1903). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 2555. | 72 | 132. |
| 2566. | 101 | 274. |
| 2571. | 102 | 132, 274. |

| Tome XI (1904). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 2716. | 8 | 61. |
| 2724. | 33 | 132. |
| 2730. | 38 | 132. |
| 2747. | 68 | 61. |

| Tome XII (1905). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 2868. | 10 | 32, 62. |
| 2879. | 27 | 82. |
| 2890. | 52 | 68. |
| 2893. | 52 | 133. |
| 2907. | 103 | 134. |
| 2909. | 103 | 275. |
| 2924. | 128 | 81. |
| 2937. | 149 | 68. |

| Questions posées. Tome VI (1899). | Page. | Réponses. Tome XIV. Page. |
|---|---|---|
| 1515. | 127 | 58. |

| Tome VII (1900). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 1950. | 334 | 273. |
| 1960. | 357 | 12. |
| 1988. | 405 | 131. |

| Tome VIII (1901). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 2125. | 186 | 273. |
| 2248. | 310 | 11. |

| Tome IX (1902). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 2400. | 204 | 274. |
| 2414. | 227 | 274. |
| 2415. | 227 | 274. |

| Tome X (1903). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 2601. | 152 | 61. |
| 2641. | 207 | 81. |

| Tome XI (1904). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 2779. | 115 | 275. |
| 2807. | 165 | 179. |
| 2851. | 283 | 82. |
| 2855. | 285 | 31, 275. |

| Tome XII (1905). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 2941. | 171 | 83. |
| 2948. | 172 | 13. |
| 2950. | 198 | 275. |
| 2954. | 200 | 84, 223. |
| 2964. | 242 | 68. |
| 2965. | 242 | 134, 223. |
| 2971. | 265 | 15, 68. |
| 2973. | 266 | 69. |

| Questions posées. Tome XII (1905). | Pages. | Réponses. Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 2974. | 266 | 15. |
| 2977. | 267 | 134, 276. |
| 2980. | 268 | 69. |

| Questions posées. Tome XII (1905). | Pages. | Réponses. Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 2982. | 269 | 86, 134 |
| 2984. | 269 | 179. |
| 2986. | 270 | 134. |

| Tome XIII (1906). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 2995. | 5 | 70 |
| 2998. | 6 | 135, 276. |
| 2999. | 7 | 15. |
| 3002. | 7 | 135, 276. |
| 3005. | 8 | 276. |
| 3008. | 33 | 86. |
| 3012. | 34 | 135. |
| 3017. | 36 | 86, 180. |
| 3026. | 60 | 86, 181. |
| 3033. | 62 | 70. |
| 3034. | 62 | 32, 70, 276. |
| 3035. | 62 | 72. |
| 3037. | 88 | 135. |
| 3039. | 88 | 135, 276. |
| 3043. | 90 | 33. |
| 3045. | 91 | 277. |
| 3048 *bis*. | 93 | 136, 277. |
| 3050. | 94 | 87. |
| 3053. | 94 | 87, 223. |
| 3056. | 95 | 34. |
| 3060. | 97 | 87, 223. |
| 3061. | 97 | 137. |
| 3062. | 97 | 16, 90. |
| 3063. | 97 | 91. |
| 3065. | 140 | 18. |
| 3067. | 140 | 19, 91. |
| 3069. | 140 | 91. |
| 3071. | 141 | 34. |
| 3072. | 141 | 20, 92. |
| 3074. | 142 | 36. |
| 3076. | 142 | 22, 92. |

| Tome XIII (1906). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 3077. | 142 | 36, 93. |
| 3078. | 163 | 39, 181. |
| 3079. | 163 | 23. |
| 3080. | 164 | 23, 95. |
| 3081. | 164 | 40. |
| 3082. | 164 | 40, 105. |
| 3084. | 164 | 41, 106. |
| 3085. | 185 | 42. |
| 3087. | 185 | 42. |
| 3088. | 186 | 42. |
| 3090. | 185 | 107, 277. |
| 3091. | 187 | 43. |
| 3092. | 187 | 137, 224. |
| 3093. | 187 | 44, 108, 277. |
| 3094. | 187 | 45, 182. |
| 3100. | 189 | 46, 137. |
| 3109. | 236 | 46, 108. |
| 3110. | 236 | 47. |
| 3111. | 236 | 47. |
| 3114. | 257 | 182. |
| 3115. | 257 | 137. |
| 3117. | 258 | 110. |
| 3119. | 259 | 111. |
| 3121. | 259 | 48, 139. |
| 3123. | 260 | 112, 278. |
| 3125. | 260 | 224. |
| 3128. | 261 | 182, 278. |
| 3129. | 261 | 112. |
| 3130. | 261 | 113. |
| 3131. | 262 | 151. |
| 3133. | 262 | 114, 182. |

| Tome XIV (1907). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 3137. | 5 | 116. |
| 3141. | 6 | 116, 139, 224. |
| 3142. | 7 | 117. |
| 3143. | 7 | 140. |

| Tome XIV (1907). | Pages. | Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|
| 3144. | 7 | 141. |
| 3145. | 7 | 142, 225. |
| 3147. | 8 | 118. |
| 3148. | 8 | 226. |

| Questions posées. Tome XIV (1907). | Pages. | Réponses. Tome XIV. Pages. | Questions posées. Tome XIV (1907). | Pages. | Réponses. Tome XIV. Pages. |
|---|---|---|---|---|---|
| 3151. | 26 | 183. | 3186. | 53 | 214. |
| 3153. | 27 | 143. | 3188. | 75 | 215, 227. |
| 3154. | 27 | 184. | 3191. | 75 | 229. |
| 3155. | 27 | 184. | 3193. | 76 | 234. |
| 3157. | 27 | 143. | 3194. | 76 | 235. |
| 3158. | 28 | 155. | 3197. | 77 | 236, 283. |
| 3159. | 28 | 155. | 3199. | 78 | 236. |
| 3160. | 28 | 159. | 3200. | 98 | 236. |
| 3161. | 29 | 278. | 3201. | 98 | 247. |
| 3162. | 29 | 186. | 3202. | 98 | 250. |
| 3163. | 29 | 143, 199. | 3203. | 98 | 251. |
| 3164. | 30 | 160. | 3208. | 101 | 283. |
| 3165. | 30 | 280. | 3210. | 101 | 254. |
| 3166. | 49 | 188. | 3216. | 103 | 254. |
| 3167. | 49 | 163. | 3218. | 104 | 255. |
| 3168. | 49 | 190, 199. | 3219. | 104 | 255. |
| 3169. | 50 | 200, 227. | 3222. | 122 | 286. |
| 3170. | 50 | 164, 281. | 3225. | 124 | 256. |
| 3171. | 50 | 203. | 3226. | 125 | 256. |
| 3172. | 50 | 166, 281. | 3229. | 126 | 257. |
| 3173. | 50 | 281. | 3230. | 126 | 258. |
| 3175. | 51 | 281. | 3231. | 126 | 258. |
| 3176. | 51 | 144. | 3234. | 147 | 259, 287. |
| 3177. | 51 | 166. | 3237. | 147 | 260. |
| 3178. | 51 | 167. | 3242. | 149 | 287. |
| 3179. | 52 | 211. | 3243. | 149 | 260. |
| 3180. | 52 | 282. | 3244. | 149 | 262. |
| 3181. | 52 | x, xiii. | 3245. | 150 | 263. |
| 3182. | 52 | 212. | 3246. | 150 | 263. |
| 3184. | 52 | 167, 283. | 3251. | 170 | 264. |
| 3185. | 53 | 168, 192, 213, 283. | 3265. | 194 | 288. |

*Note.* — Dans ce Tableau nous n'avons indiqué, lorsqu'il y a plusieurs réponses à une même question qui se suivent immédiatement, que la page où se trouve la première de ces réponses consécutives.

*Rappel de questions non résolues antérieurement et reproduites au Tome XIII (1906) ou rectifications.*

| Questions posées. Tome IV (1897). | | Réimpression. Tome XIV. |
|---|---|---|
| | Pages. | Pages. |
| 1062. | 102 | 1. |
| 1065. | 102 | 1. |
| 1066. | 121 | 2. |
| 1067. | 121 | 74. |
| 1069. | 122 | 74. |
| 1073. | 123 | 97. |
| 1075. | 123 | 97. |
| 1076. | 124 | 145. |
| 1078. | 125 | 146. |
| 1082. | 126 | 146. |
| 1083. | 126 | 241. |
| 1084. | 145 | 241. |
| 1093. | 147 | 242. |
| 1095. | 148 | 242. |
| 1097. | 148 | 242. |
| 1101. | 149 | 265. |
| 1103. | 169 | 265. |
| 1104. | 169 | 265. |

**A l'exemple déjà suivi dans plusieurs journaux mathématiques, la Rédaction continue à reproduire les énoncés de questions demeurées sans réponse depuis la fondation de l'*Intermédiaire*.**

# TABLE DES QUESTIONS

CLASSÉES SUIVANT LES DIVISIONS DE L'INDEX DU RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

La Table qui suit fait connaître le sujet général des différentes questions proposées.

Les nombres de cette Table sont les *numéros* des questions auxquelles se rapporte la division de l'Index du Répertoire.

**La lettre Σ désigne les sujets de recherches ou d'études pour lesquels une subdivision spéciale a été adoptée dans l'*Intermédiaire* (*voir* t. II, 1895, p. 177).**

# TABLE PAR NOMS D'AUTEURS.

Les noms inscrits sont exclusivement ceux des auteurs de questions ou de réponses.

L'*italique* désigne les pseudonymes.

Les chiffres ordinaires indiquent les numéros des pages et se rapportent aux QUESTIONS POSÉES ; avec astérisque, ils désignent le rappel des questions au moment de la publication des réponses. Les **caractères gras** sont réservés aux RÉPONSES annoncées ou publiées dans le texte ; les caractères romains désignent les pages du Supplément.

Les Tables ont été établies, cette année, par M. A. Grévy et vérifiées par M. E. Maillet.

La Rédaction.